Archivum Mathematicum

Géza Freud

Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomreihe einer Funktion mit beschränkter Variation

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 4, 247--250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104597

ÜBER DIE KONVERGENZ DER ORTHOGONAL-POLYNOMREIHE EINER FUNKTION MIT BESCHRÄNKTER VARIATION.

GÉZA FREUD, BUDAPEST

Eingegangen am 27. März 1965

Nach dem bekannten Dirichlet-Jordanschen Satze ist die Fouriersche Reihe einer Funktion mit beschänkter Variation in jedem Punkte konvergent, und die Konvergenz ist in jedem abgeschlossenen Teil eines offenen Stetigkeitsintervalles der Funktion gleichmäßig. Die erste Übertragung dieses Satzes auf Orthogonalpolynomreihen rührt von J. P. Natanson [5] her. Sein Ergebnis lautet wie folgt:

Es sei $w \in L[-1, +1]$

$$0 \leqq w(x) \leqq \frac{W}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

die zur Gewichtsfunktion $w(x)$ gehörende normierten Orthogonalpolynome seien $p_n(w; x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann konvergiert die Orthogonalpolynomentwickelung

$$f(x) \sim \sum c_k(f)\, p_k(w; x); \qquad c_k(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)\, p_k(w; x)\, w(x)\, dx \tag{2}$$

einer Funktion $f(x)$ mit beschränkter Variation in $[-1, +1]$ fast überall in $[-1, +1]$ gegen $f(x)$. Später zeigte P. L. Uljanoff [6], daß unter den erwähnten Voraussetzungen die Reihe (2) sogar bei jeder Umordnung der Glieder fast überall konvergiert. Das Problem der gleichmäßigen Konvergenz wurde vom Verfasser schon einmal in seiner Arbeit [4] behandelt. Es wurde gezeigt, daß die Reihe (2) in jedem abgeschlossenen Teil eines offenen Stetigkeitsintervalles der Funktion mit beschränkter Variations $f(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, falls

$$w(x) \leqq c_1(1 - x^2)^{-c_2} \tag{*}$$

und

$$|\, p_n(w; x)\, | \leqq c_3(1 - x^2)^{-c_4}$$

für passende positive Zahlen c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ befriedigt ist.

Obwohl Bedingung (*) für die normierten Jacobischen Polynome befriedigt ist, und nach einer Vermutung von V. A. Stekloff eine

Konsequenz von $w(x) \geqq m > 0$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ sein sollte, scheint diese Bedingung — wenigstens solange die Stekloffsche Vermutung nicht geklärt ist — recht einschränkend. Ziel vorliegender Arbeit ist, einen Satz zu beweisen, welches die Anwendbarkeit des Dirichlet-Jordanschen Kriteriums sichert, ohne dabei irgendeine Abschätzung der einzelnen normierten Orthogonalpolynome vorauszusetzen.

Satz: *Es sei* $w \in L[-1, +1]$, *es sei* (1) *befriedigt, und es sei für ein* $[\xi_1, \xi_2] \subset (-1, +1)$

$$0 < m \leqq w(x) \qquad \text{für} \qquad \xi_1 \leqq x \leqq \xi_2. \tag{3}$$

Ist dann die in $[-1, +1]$ *definierte Funktion* $f_0(x)$ *von beschränkter Schwankung und ist sie stetig im offenen Intervall* (ξ_1, ξ_2), *dann ist die Orthogonalentwicklung* (2) *von* $f(x)$ *in jedem abgeschlossenen Teilintervall von* (ξ_1, ξ_2) *gleichmäßig konvergent gegen* $f(x)$.

Wir wollen vor dem Beweis dieses Satzes einige Hilfssätze einschieben:

A. Es sei

$$g(\Theta) = f(\cos \Theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos k\Theta,$$

und

$$(\max_{|h| \geqq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} | g(\Theta + h) - g(\Theta) |^2 \, d\Theta)^{\frac{1}{2}} = \omega^2(g, \delta),$$

dann ist

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \leqq \frac{W\pi}{2} \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \leqq \frac{W\pi}{2} \frac{4}{\pi} \left[\omega^{(2)} \left(g; \frac{1}{n} \right) \right]^2. \tag{4}$$

Das folgt aus der Zusammensetzung zweier Ungleichungen von J. Alexits [1] und [2].

B. Ist $f(x)$ stetig und von beschränkter Variation V in $[-1, +1]$, dann ist auch $g(\Theta) = f(\cos \Theta)$ in $[-\pi, \pi]$, stetig und von beschränkter Variation V, es ist also (vgl. A. Zygmund [7], Bd. I, S. 242) für

$$| h | \leqq \frac{1}{n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} | g(\Theta + h) - g(\Theta) |^2 \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} | g(\Theta + [k + 1] h) - g(\Theta +$$

$$+ kh) |^2 \, d\Theta \leqq \frac{1}{n} \max_{|h| \leqq \frac{1}{n}} | g(\Theta + h) - g(\Theta) | \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} | g(\Theta + [k + 1]h) -$$

$$- g(\Theta + kh) \mid d\Theta \leqq \frac{2\pi V}{n} \max_{|h| \leqq \frac{1}{n}} \mid g(\Theta + h) - g(\Theta) \mid = 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

also ist unter den erwähnten Voraussetzungen

$$\omega_k^{(2)}\left(g; \frac{1}{n}\right) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{5}$$

C. Aus (3) folgt

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(w, x) = 0(n) \; \xi_1 < x < \xi_2 \tag{6}$$

und diese Abschätzung ist in jedem abgeschlossenen Teil des offenen Intervalls (ξ_1, ξ_2) gleichmäßig.

Aus (1) und (3) folgt, daß die Fejérschen Summen $\sigma_n(f;x)$ von (2) gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil des offenen Intervalls (ξ_1, ξ_2) gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren (G. Freud [3]).

Es sei $f_0(x)$ die Funktion, welche die Bedingungen unseres Satzes befriedigt, und es sei

$$f(x) = \begin{cases} f_0(\xi_1) \text{ für } x < \xi_1 \\ f_0(x) \text{ für } \xi_1 \leqq x \leqq \xi_2 \\ f_0(\xi_2) \text{ für } x \geqq \xi_2 \end{cases}$$

Dann strebt die Differenz

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k(f_0)\, p_k(w; x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\, p_k(w; x)$$

gleichmäßig bezüglich x in jedem echten Teilintervall von (ξ_1, ξ_2) gegen Null (G. Freud [4]). Es genügt also, die Teilsummen von $f(x)$ zu untersuchen.

Beweis des Satzes: Es sei $\xi_1 < \xi' < \xi'' < \xi_2$. Nach C. konvergieren die de la Vallée Poussin-schen Summen

$$V_n(f; x) = 2\sigma_{2n}(f; x) - \sigma_n(f; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n-1} c_k(f)\, p_k(w, x) + 2 \sum_{k=n}^{2n-1} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) c_k(f)\, p_k(w; x).$$

gleichmäßig gegen $f(x)$.

Es genügt also zu zeigen, daß die zweite Summe rechts gleichmäßig in $[\xi', \xi'']$ gegen Null strebt. Nun ist, unter Beachtung von (4), (5) und (6)

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{k}{2n}\right)c_k(f)\,p_k(w;x)\right| \leqq \sum_{k=n}^{2n-1}|c_k(f)|\,|p_k(w;x)| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{k=n}^{2n-1}c_k^2(f)\sum_{k=n}^{2n-1}p_k^2(w;x)} \leqq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\sum_{k=0}^{2n-1}p_k^2(w;x)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{2W}\,\omega^{(2)}\left(g;\frac{1}{n}\right)\sqrt{\sum_{k=0}^{2n-1}p_k^2(w;x)} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{0(n)} \to 0$$

W. z. b. w.

LITERATUR

[1] Alexits G.: Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries des polynomes orthogonaux. Acta Sci. Math. (Szeged) 12 (1950), 223—225.

[2] Alexits G.: Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 4 (1953), 95—101.

[3] Freud G.: Über die starke (C, 1) — Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952), 83—88.

[4] Freud G.: Über die Konvergenz orthogonaler Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952), 89—98.

[5] Натансон: П. И. О. сходимости рядов по ортогональным полиномам. Доклады АН СССР 2 (1834), 209—211.

[6] Улянов: И. Л. О безусловной сходимости почти всюду. Мам. сборник 40 (1956), 95—100.

[7] Zygmund A.: Trigonometric series. 2. Aufl., Bd I—II, Cambridge 1959.