Zdeněk Jankovský
Zur Möbiusschen Geometrie und Kinematik in H^3

Aplikace matematiky, Vol. 34 (1989), No. 6, 453–465

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104376

ZUR MÖBIUSSCHEN GEOMETRIE UND KINEMATIK IN H^3

ZDENĚK JANKOVSKÝ

(Eingegangen am 21. April 1988)

Summary. Im Artikel wird die Möbiussche Geometrie im Halbraum $H^3 \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \in R^3 \mid x_3 > 0\}$ mit Hilfe der Quaternionen über Darstellung

$$z = u + vj\,, \tag{1}$$

wo $u = u_1 + iu_2 \in \boldsymbol{C}$, $v > 0$, $i^2 = j^2 = -1$, untersucht. Zuerst wird die Operierung der durch SL(2, $\boldsymbol{C}$) represäntierten Möbiusschen Gruppe im Halbraum H^3 definiert. Die Punkte in H^3 werden durch die Quaternionen (1) beschrieben. Es wird gezeigt, daß diese Gruppe transitiv im H^3 operiert. Weiter werden die algebraischen Grundinvarianten gefunden. Hier werden der Begriff der $\mathscr{M}$ — Bewegung im H^3 und einige weitere kinematische Grundbegriffe eingeführt. Der letzte Absatz befaßt sich mit den 1-Momentanpolen der $\mathscr{M}('H^3/H^3)$-Bewegung.

Keywords: Möbiussche Geometrie und Kinematik im 3-dimensionalen Halbraum H^3.

AMS Classification: 51B10, 53A17.

1. EINLEITUNG

Die Möbiussche Geometrie in der Ebene (s. z.B. [2], [3]) kann man auf den Oberhalbraum in R^3 erweitern (das wußte schon Poincarè), s. [1]. Die Kreiskurven in der erweiterten Gaußschen Ebene

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup (\infty)$$

bestimmen eineindeutig die zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Kugelflächen, bzw. die zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Ebenen in R^3. Die Spiegelungen angesichts der Kreiskurven in $\bar{\boldsymbol{C}}$ kann man auf die Spiegelungen angesichts dieser zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Kugelflächen erweitern. So können wir die Möbiussche Geometrie in den Raum übertragen. Zu dieser Erweiterung kann man den analytischen Apparat der Quaternionen und die ebene Möbiussche Gruppe anwenden.

Sei $\boldsymbol{Q}$ der Körper der Quaternionen

$$\boldsymbol{a} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\,; \quad a_0 = \operatorname{Re} a\,.$$

Legen wir

$$u = a_0 + a_1 i\,; \quad v = a_2 + a_3 i\,, \quad \text{wo} \quad i^2 = -1\,,$$

also $u, v \in \boldsymbol{C}$; wir bekommen:

$$\text{(1)} \qquad \boldsymbol{a} = a_0 + a_1 i + (a_2 + a_3 i)\, j = u + vj\,; \quad j^2 = -1\,.$$

$\boldsymbol{Q}$ kann man auch in die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})$ einbetten:

$$\text{(2)} \qquad \psi\colon \boldsymbol{Q} \to \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})\colon \psi(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$$

Legen wir

$$\psi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \psi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \psi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

dann bekommen wir:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1; & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3; & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ia_1 & 0 \\ 0 & -ia_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ia_3 \\ ia_3 & 0 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\,.$$

Es gilt:

(i) $\qquad \psi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \psi(\boldsymbol{a}) + \psi(\boldsymbol{b})$

(ii) $\qquad \psi(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha\, \psi(\boldsymbol{a});\ \alpha \in R$

(iii) $\qquad \psi(\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}) = \psi(\boldsymbol{a}) \,.\, \psi(\boldsymbol{b})$,

d.h. ψ ist ein Homomorphismus.

Bezeichnen wir:

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \to u + vj\,,$$

dann ist

$$\text{(3)} \qquad \chi = \varphi \circ \psi\colon \boldsymbol{Q} \to {}'\boldsymbol{Q} \equiv \{u + vj \in {}'\boldsymbol{Q} \mid u, v \in \boldsymbol{C};\ j^2 = -1,\ ij = -ji = k\}\,,$$

wo $'\boldsymbol{Q}$ eine spezielle Repräsentation des Körpers $\boldsymbol{Q}$ der Quaternionen ist.

Sei

$$z = u + vj \in {}^{`}\boldsymbol{Q} \tag{4}$$

ein Quaternion. Der konjugierte Quaternion zu z ist

$$\bar{z} = \bar{u} - vj$$

Lemma 1. $\forall(u \in \boldsymbol{C})$: $uj = j\bar{u}$.

Beweis. $uj = (u_1 + iu_2) \cdot j = u_1 j + u_2 i \cdot j = ju_1 - ju_2 i = j(u_1 - u_2 i) = j\bar{u}$, qed.

Es gilt:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (u + vj) \cdot (\bar{u} - vj) = u\bar{u} + v\bar{v} - uvj + vj\bar{u} =$$
$$= |u|^2 + |v|^2 - uvj + uvj = |u|^2 + |v|^2 \, .$$

Der Modul des Quaternions (4) ist

$$|z| = \sqrt{(z \cdot \bar{z})} = \sqrt{(|u|^2 + |v|^2)} = \operatorname{Det} \psi(z) \, . \tag{4'}$$

2. DIE $\mathscr{M}$-GRUPPE $M(H^3)$

Wir können den Raum R^3 mit Hilfe der Quaternionen durch

$$R^3 = \{x + jy \in {}^{`}\boldsymbol{Q} \mid x \in \boldsymbol{C},\ y \in R\} \tag{5}$$

beschreiben, bzw. den Oberhalbraum H^3 durch

$$H^3 = \{x + jy \in {}^{`}\boldsymbol{Q} \mid x \in \boldsymbol{C},\ y > 0\} \tag{6}$$

und analogisch den Untenhalbraum U^3 durch

$$U^3 = \{x + jy \in {}^{`}\boldsymbol{Q} \mid x \in \boldsymbol{C},\ y < 0\} \tag{7}$$

beschreiben.

Zur Beschreibung: Wenn $\zeta = (x + yj) \in H^3$ ist, dann $\bar{\zeta} \in U^3$ ist ($\bar{\zeta}$ bekommen wir aus ζ durch eine Rotation um die Achse x_1 von π, oder durch eine Zusammensetzung der Symmetrien angesichts der Ebene $x_2 = 0$, and $y = 0$), s. Abb. 1. Wenn $\zeta \in H^3$ ist, dann ist auch $(-\bar{\xi}) \in H^3$ (eine Symmetrie angesichts der Ebene $x_1 = 0$, s. Abb. 2).

Die Möbiussche Gruppe $M(\bar{\boldsymbol{C}})$ wird durch $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ repräsentiert, d.h. für $\mathscr{M} \in$ $\in M(\bar{\boldsymbol{C}})$ gilt:

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \, . \tag{8}$$

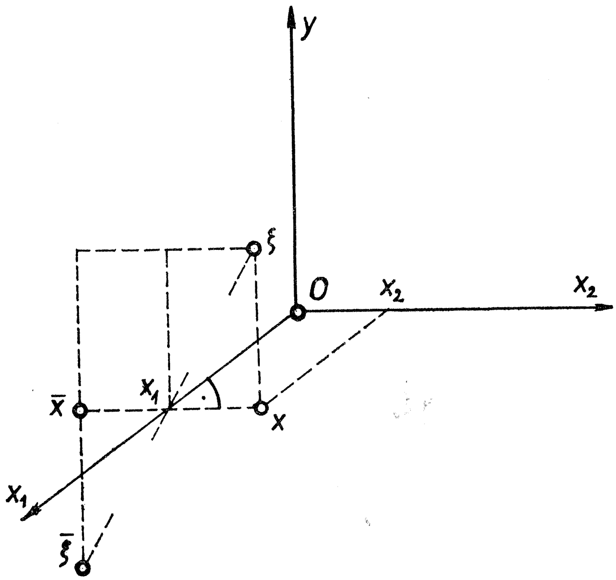

Abb. 1

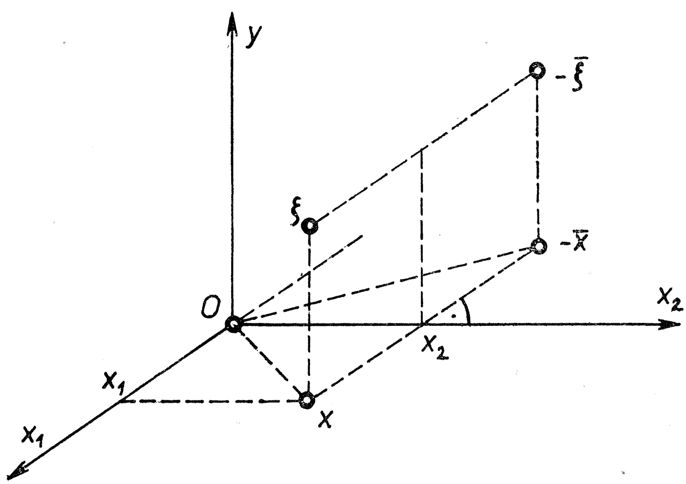

Abb. 2

Definition 1. Definieren wir *die Operation $\mathscr{M}$ auf den Quaternion* $\zeta = x + jy$, $y > 0$, durch:

$$z = \mathscr{M}\zeta = (\alpha\zeta + \beta)(\gamma\zeta + \delta)^{-1} = (\zeta\gamma + \delta)^{-1}(\zeta\alpha + \beta)\,. \tag{9}$$

Beide Darstellungen (9) sind einander gleich, denn wir bekommen (für alle ζ aus (9)):

$$(\zeta\gamma + \delta)(\alpha\zeta + \beta) = (\zeta\alpha + \beta)(\gamma\zeta + \delta)$$

und daraus

$$\zeta\gamma\alpha\zeta + \zeta\gamma\beta + \delta\alpha\zeta + \beta\delta = \zeta\alpha\gamma\zeta + \zeta\alpha\delta + \beta\gamma\zeta + \beta\delta ,$$

es gilt also

$$\underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{1}\zeta = \xi\underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{1} . \tag{10}$$

Bemerkung 1. Aus (10) folgt, daß die Gleichung (9) für $\alpha\delta - \beta\gamma \in R$ gilt; für $\alpha\delta - \beta\gamma \notin R$ gilt (9) nicht, denn die Multiplikation in (10) ist nicht kommutativ.

Satz 1. *$z = \mathscr{M}\zeta$ aus (9) ist ein Quaternion desselben Typs wie $\zeta = x + yj$, $y > 0$, bzw. $y < 0$, bzw. $y \in R$, $x \in \boldsymbol{C}$.*

Beweis. Für $\zeta = x + yj$, $y > 0$, bzw. $y < 0$, bzw. $y \in R$; $x \in \boldsymbol{C}$, bekommen wir aus (9) zuerst

$$\mathscr{M}\zeta = \frac{(\alpha\zeta + \beta)\overline{(\gamma\zeta + \delta)}}{|\gamma\zeta + \delta|^2} . \tag{9'}$$

Wir haben:

$$\gamma\zeta + \delta = \gamma x + \delta + \gamma y j$$

$$\overline{\gamma\zeta + \delta} = \bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta} - \gamma y j$$

$$\alpha\zeta + \beta = \alpha x + \beta + \alpha y j ,$$

weiter ist

$$\begin{aligned}(\alpha\zeta + \beta)\overline{(\gamma\zeta + \delta)} &= (\alpha x + \beta)(\bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}) + \alpha\bar{\gamma}y^2 + \\ &+ [-(\alpha x + \beta)\gamma y + \alpha y(\gamma x + \delta)]\, j = \\ &= (\alpha x + \beta)(\bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}) + \alpha\bar{\gamma}y^2 + \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{1}\, yj\end{aligned}$$

und (9′) kann man in der Form

$$z = \mathscr{M}\zeta = \frac{(\alpha x + \beta)(\bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}) + \alpha\bar{\gamma}y^2 + yj}{|\gamma x + \delta|^2 + |\gamma|^2\, y^2} \tag{11}$$

angeben; aus (11) folgt S 1.

Bemerkung 2. Speziell für $\zeta = x \in \boldsymbol{C}$, d.h. für $y = 0$, bekommen wir (11) in der Form

$$\mathscr{M}x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} . \tag{12}$$

(12) ist eine gewöhnliche ebene $\mathscr{M}$-Transformation in $\overline{\mathbf{C}}$. Aus (11) folgt weiter

Satz 2. *Für beliebige $\mathscr{M} \in M(\overline{\mathbf{C}})$ gilt:*

$$\mathscr{M}(H^3) \subset H^3 \,; \quad \mathscr{M}(U^3) \subset U^3 \,; \quad \mathscr{M}(\overline{\mathbf{C}}) \subset \overline{\mathbf{C}} \,.$$

Satz 3. *$\mathscr{M}$-Gruppe (9) operiert in H^3 transitiv.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathscr{M}$ existiert so, daß $\mathscr{M}(j) = u + vj$, wo $u \in \mathbf{C}$, $v > 0$ beliebig sind.

$$(\alpha j + \beta)(\gamma j + \delta)^{-1} = u + vj$$

d.h.

$$(\alpha j + \beta) = (u + vj)(\gamma j + \delta) \,.$$

Daraus folgt

$$\alpha = u\gamma + v\bar{\delta}$$

$$\beta = u\delta - v\bar{\gamma}$$

d.h. es existiert ein 4-parametriges System der gesuchten $\mathscr{M}$-Transformation (2 komplexe Parameter), qed.

Definition 2. *Die in H^3 operierende $\mathscr{M}$-Gruppe (9) nennen wir die Gruppe $M(H^3)$.*

Bemerkung 3. Angesichts der Sätze 2 und 3 können wir die *$\mathscr{M}$-Geometrie* und *$\mathscr{M}$-Kinematik* auf H^3 angesichts der Gruppe $M(H^3)$ aufbauen.

Bemerkung 4. Für den speziellen Fall $\gamma = 1$ der $\mathscr{M}$-Transformation $\mathscr{M}$ kann man folgendes schreiben:

$$z = (\alpha\zeta + \beta)(\zeta + \delta)^{-1} = \alpha - \frac{1}{\zeta + \delta}$$

Diese $\mathscr{M}$-Transformation kann man zerlegen: $\mathscr{M} = \mathscr{M}_3 \circ \mathscr{M}_2 \circ \mathscr{M}_1$, wo $\zeta_1 = \mathscr{M}_1\zeta = \zeta + \delta$ eine Verschiebung von δ,

$$\zeta_2 = \mathscr{M}_2\zeta_1 = -\frac{1}{\zeta_1} = -\frac{\bar{\zeta}_1}{\zeta_1\bar{\zeta}_1} = \frac{-\bar{\zeta}_1}{|\zeta_1|^2} = \frac{1}{|\zeta_1|}\,\frac{-\bar{\zeta}_1}{|\zeta_1|}$$

eine Zusammensetzung der Homothethie (Koeffizient $1/|\zeta_1|$), der Ebenesymmetrie angesichts $x_1 = 0$ und der Kugelinversion angesichts der Einheitskugelfläche,

$$z = \mathscr{M}_3\zeta_2 = \alpha + \zeta_2$$

eine Verschiebung von α, sind.

Definition 3. *Das Doppelverhältnis* $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ *der Quaternionen* $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ *definieren* wir folgenderweise

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = (\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_1 - \zeta_4)^{-1}(\zeta_2 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3)^{-1}. \tag{13}$$

Satz 4. *Es gilt*

$$\psi((\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4)) \sim \psi((\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)).$$

(*Ähnlichkeit der Matrizen.*)

Beweis. Zuerst untersuchen wir

$$\begin{aligned} z - `z &= (\alpha\zeta + \beta)(\gamma\zeta + \delta)^{-1} - (`\zeta\gamma + \delta)^{-1}(`\zeta\alpha + \beta) = \\ &= (`\zeta\gamma + \delta)^{-1}[(`\zeta\gamma + \delta)(\alpha\zeta + \beta) - (`\zeta\alpha + \beta)(\gamma\zeta + \delta)](\gamma\zeta + \delta)^{-1} = \\ &= (`\zeta\gamma + \delta)^{-1}(\alpha\delta - \beta\gamma)(\zeta - `\zeta)(\gamma\zeta + \delta)^{-1} = \\ &= (`\zeta\gamma + \delta)^{-1}(\zeta - `\zeta)(\gamma\zeta + \delta)^{-1} = \mathcal{M}(\zeta) - \mathcal{M}(`\zeta). \end{aligned} \tag{14}$$

Weiter

$$\begin{aligned} &(\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4) = |\text{angesichts } (13)| = \\ &= (\mathcal{M}\zeta_1 - \mathcal{M}\zeta_3)(\mathcal{M}\zeta_1 - \mathcal{M}\zeta_4)^{-1}(\mathcal{M}\zeta_2 - \mathcal{M}\zeta_4)(\mathcal{M}\zeta_2 - \mathcal{M}\zeta_3)^{-1} = \\ &= |\text{angesichts } (14)| = (\zeta_3\gamma + \delta)^{-1}(\zeta_1 - \zeta_3)(\gamma\zeta_1 + \delta)^{-1}. \\ &\quad .(\gamma\zeta_1 + \delta)(\zeta_1 - \zeta_4)^{-1}(\zeta_4\gamma + \delta)(\zeta_4\gamma + \delta)^{-1}(\zeta_2 - \zeta_4). \\ &\quad .(\gamma\zeta_2 + \delta)^{-1}(\gamma\zeta_2 + \delta)(\zeta_2 - \zeta_3)^{-1}(\zeta_3\gamma + \delta) = \\ &= (\zeta_3\gamma + \delta)^{-1}[(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_1 - \zeta_4)^{-1}(\zeta_2 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3)^{-1}]. \\ &\quad .(\zeta_3\gamma + \delta) = (\zeta_3\gamma + \delta)^{-1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)(\zeta_3\gamma + \delta). \end{aligned} \tag{15}$$

Aus (15) folgt mit Hilfe ψ S4.

Satz 5. $|(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)|$ *ist eine* $\mathcal{M}$*-Invariante, d.h. es gilt*:

$$|(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)| = |(\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4)|. \tag{16}$$

Beweis. $(\zeta_1 \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in `\boldsymbol{Q}$;

$$\psi((\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)) = \Xi \in \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C});$$

$$(\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4) \in `\boldsymbol{Q};$$

$$\psi((\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4)) = `\Xi \in \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C}).$$

Angesichts S4 gilt

$$`\Xi = \boldsymbol{\Pi}^{-1}.\Xi.\boldsymbol{\Pi},$$

wo $\boldsymbol{\Pi} = \psi(\zeta_3\gamma + \delta)$. Daraus und aus (2) und (4') folgt

$$|`\Xi| = |\boldsymbol{\Pi}^{-1} . \Xi . \boldsymbol{\Pi}| = |\boldsymbol{\Pi}^{-1}| . |\Xi| . |\boldsymbol{\Pi}| = |\Xi| ,$$

d.h. (16), qed.

Satz 6. $\mathrm{Re}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ *ist eine $\mathcal{M}$-Invariante, d.h. es gilt:*

$$\mathrm{Re}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \mathrm{Re}(\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4) . \tag{17}$$

Beweis. Sei

$$\psi((\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)) = \Xi ,$$

$$\psi((\mathcal{M}\zeta_1, \mathcal{M}\zeta_2, \mathcal{M}\zeta_3, \mathcal{M}\zeta_4)) = `\Xi .$$

Aus (2) folgt

$$\mathrm{Re}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \Xi$$

und darus bekommen wir (17), qed.

Satz 7. *Die zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Halbkugelflächen und zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Halbebenen in H^3 bildet die $\mathcal{M}$-Gruppe $M(H^3)$ in die zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Halbkugelflächen, bzw. Halbebenen ab.*

Beweis. Die zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Halbkugelflächen, bzw. Halbebenen kann man analytisch durch (18) darstellen:

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta) = \overline{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta)} = \mathrm{Re}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta) . \tag{18}$$

Aus (18) und (17) folgt S7.

Bemerkung 5. Die zu $\bar{\boldsymbol{C}}$ orthogonalen Halbkugelflächen und Halbebenen (18) sind die geometrischen Grundobjekte der $\mathcal{M}$-Geometrie in H^3 (*Poincarésches Modell*).

4. $\mathcal{M}$-BEWEGUNG IN H^3

Definition 4. Das 1-parametrige System der Transformationen $\mathcal{M}(`H^3/H^3)$ der Gruppe $M(H^3)$ mit der analytischen Darstellung:

$$\mathcal{M}(`H^3/H^3)(t) \equiv z(t) = (\alpha(t)\,\zeta + \beta(t))\,(\gamma(t)\,\zeta + \delta(t))^{-1} , \tag{19}$$

wo $t \in \mathcal{I} \subset R$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^n(\mathcal{I})$, $n \geqq 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ auf $\mathcal{I}$, nennen wir die *Möbiussche Bewegung $\mathcal{M}(`H^3/H^3)$ des Ganghalbraumes $`H^3$ im Rasthalbraum H^3*; $(\zeta) \in `H^3$; $(z) \in H^3$.

Lösen wir (19) angesichts ζ; bekommen wir:

$$\zeta = (z\gamma - \alpha)^{-1}(\beta - z\delta) = (-\delta z + \beta)(\gamma z - \alpha)^{-1} . \tag{20}$$

Definition 5. Die Bewegung mit der analytischen Darstellung (20) nennen wir *die Umkehrbewegung $\mathcal{M}^{-1}(H^3/`H^3)$* zut $\mathcal{M}$-Bewegung (19).

Bemerkung 6. $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M} = \mathrm{Id}$ und wir bekommen die Ruhelage.

Definition 6. (19), bzw. 20 für feste (ζ), bzw. (z) stellt eine quaternionische Funktion der reellen Veränderlichen t des Types (11) dar. Diese quaternionische Funktion kann man als eine Kurve in H^3, bzw. in $'H^3$ interpretieren und wir nennen sie *die Bahnkurve des Punktes* (ζ), bzw. (z) in der Bewegung $\mathcal{M}('H^3/H^3)$, bzw. $\mathcal{M}^{-1}(H^3/'H^3)$.

Die Darstellung der Bahnkurve des Punktes $(\zeta) = (x + yj)$, $y > 0$, ist:

$$z = u(t) + v(t)\,j = \frac{(\alpha x + \beta)(\bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}) + \alpha\bar{\gamma}y^2}{|\gamma x + \delta|^2 + |\gamma|^2\, y^2} + \tag{21}$$

$$+ \frac{yj}{|\gamma x + \delta|^2 + |\gamma|^2\, y^2},$$

wo $u(t)$ eine komplexe Funktion und $v(t)$ eine positive reelle Funktion der reellen Veränderlichen t ist.

Die Bahnkurve liegt in einer mit C parallelen Ebene für

$$v(t) = c > 0 \Leftrightarrow |\gamma x + \delta|^2 + |\gamma|^2\, y^2 = {}'c\,. \tag{22}$$

(22) gilt z.B. für $\gamma, \delta = \mathrm{Konst.}$

5. GESCHWINDIGKEITEN UND MOMENTANPOLE

Differenzieren wir (21); wir bekommen:

$$\frac{\mathrm{d}^i z}{\mathrm{d}t^i} = z^{(i)} = u^{(i)} + v^{(i)}j\,. \tag{23}$$

Die Abeleitung (23) können wir als einen Vektor in R^3 interpretieren (in einer Phase t).

Definition 7. Die Ableitung $z^{(i)}(t)$ nennen wir die *i-Geschwindigkeit der $\mathcal{M}$-Bewegung* (19) *des Punktes* (ζ) *in der Phase t.*

Definition 8. Die Punkte $({}^i z) \in H^3$, für welche

$$z^{(i)} = u^{(i)} + v^{(i)}j = 0 \tag{24}$$

gilt, nennen wir die *i-Pole* der $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}('H^3/H^3)$ in der Phase t.

Weiter befassen wir uns mit dem Fall $i = 1$.

Transformieren wir den Parameter t (*Zeitregime*) der $\mathcal{M}$-Bewegung:

$$\Theta = \Theta(t) = \bar{\Theta}(t)\,; \quad \dot{\Theta}(t) \neq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I}\,,$$

wir bekommen

$$\dot{z} = \dot{u} + \dot{v}j = u'\,\dot{\Theta} + v'\,\dot{\Theta}\,j = z'\,\dot{\Theta}\,, \tag{25}$$

$$\text{wo } u' = \frac{du}{d\Theta}, \quad v' = \frac{dv}{d\Theta}, \quad z' = \frac{dz}{d\Theta} \text{ ist.}$$

Aus (25) folgt

$$\dot{z} = 0 \Leftrightarrow z' = 0$$

und daraus folgt

Satz 8. *Die* 1-*Momentanpole sind* Θ-*invariant.*
Weiter gilt

Satz 9. *Die* 1-*Momentanpole sind* $\mathcal{M}$-*invariant.*
Suchen wir eine Darstellung der 1-Momentanpole der $\mathcal{M}$-Bewegung in H^3. Es sei $\dot{z} = \dot{u} + \dot{v}j =$ die Ableitung von (21). Aus (20) und (11) folgt

$$\zeta = x + yj = \frac{(-\delta u + \beta)(\bar{\gamma}\bar{u} - \bar{\alpha}) - \delta\bar{\gamma}v^2 + vj}{|\gamma u - \alpha|^2 + |\gamma|^2 v^2}$$

und daraus ergibt sich

$$x = \frac{(-\delta u + \beta)(\bar{\gamma}\bar{u} - \bar{\alpha}) - \delta\bar{\gamma}v^2}{|\gamma u - \alpha|^2 + |\gamma|^2 v^2}, \tag{26}$$

$$y = \frac{v}{|\gamma u - \alpha|^2 + |\gamma|^2 v^2},$$

und ferner auch

$$\begin{aligned}(27)\quad \dot{u} = \llbracket |\gamma u - \alpha|^2 \{q_0 + 2q_1 u + q_2 u^2\}\, v^2\{\bar{\gamma}(\gamma u - \alpha)\,[(q_2 u + q_1) - \text{conj.}] + \\ + u(\dot{\gamma}\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\bar{\gamma}^{\cdot}) + (\dot{\alpha}\bar{\gamma} + \alpha\bar{\gamma}^{\cdot})\} - |\gamma|^2 q_2 v^4 \rrbracket : [|\gamma u - \alpha|^2 + |\gamma|^2 v^2],\end{aligned}$$

wo

$$q_0 = \alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\beta$$

$$q_1 = \dot{\alpha}\delta - \dot{\beta}\gamma = \beta\dot{\gamma} - \alpha\dot{\delta}$$

$$q_2 = \gamma\dot{\delta} - \delta\dot{\gamma}.$$

Speziell für $v = 0$ hat (27) die Form *der Riccatischen Differentialgleichung*:

$$\dot{u} = q_0 + 2q_1 u + q_2 u^2,$$

vgl. [4]; und wir bekommen weiter:

$$\dot{v} = v\,\frac{|\gamma u - \alpha|^2 \{[q_2 u + q_1] + \text{conj.}\} + v^2\{[\bar{\gamma}q_2(\gamma u - \alpha) - \dot{\gamma}\bar{p}] + \text{conj.}\}}{|\gamma u - \alpha|^2 + |\gamma|^2 v^2} \tag{28}$$

Es gilt

$$\{[\bar{\gamma}q_2(\gamma u - \alpha) - \dot{\gamma}\bar{\gamma}] + \text{conj.}\} = |\gamma|^2\left(\left[q_2 u - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}q_2\right] + \text{conj.}\right) =$$

$$= |\gamma|^2\,([q_2 u + q_1] + \text{conj.})$$

und daraus folgt

$$\dot{v} = v([q_2 u + q_1] + \text{conj.})\,. \tag{29}$$

Aus (29) folgt

$$\dot{v} = 0 \Leftrightarrow v = 0 \;\vee \{[q_2 u + q_1] + \text{conj.}\} = 0\,,$$

wo die letzte Gleichung für $q_2 \neq 0$ die Gleichung einer Geraden p ist,

$$p \equiv \operatorname{Re}(q_2 u) + \operatorname{Re} q_1 = 0\,, \tag{30}$$

und in der parametrischen Beschreibung ist

$$p \equiv u = a + tb\,,$$

wo

$$a = -\frac{q_1}{q_2}\,; \quad b = \sqrt{(q_1^2 - q_0 q_2)}\,.$$

Aus (29) und (30) folgt:

Satz 10. *Alle 1-Momentanpole ${}^1z = u + vj$ der $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}({}^{\backprime}H^3/H^3)$ in der gegebenen Phase t liegen, in der einzigen, zu $\bar{C}$ orthogonalen und durch die Gerade p durchlaufenden Halbebene.*

Bemerkung 7. Für $v = 0$ bekommen wir in der Phase t 2 Momentanpole in $\boldsymbol{C}$ als die Lösung der Gleichung

$$q_2 u^2 + 2q_1 u + q_0 = 0\,. \tag{31}$$

Diese Momentanpole liegen auf p.

Legen wir

$$\dot{u} = 0\,.$$

(27) kann man in der Form

$$F(u, \bar{u}, v) = 0 \tag{32}$$

schreiben, wo in allgemeinen $F(u, \bar{u}, v) \neq \bar{F}(u, \bar{u}, v)$ ist, v ist ein reeller Parameter. (32) ist eine Gleichung vierten Grades in $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$. Die Momentanpole für $v = v_0 > 0$ bekommen wir für die reelle Lösung t der Gleichung

$$F(a + bt, \bar{a} + \bar{b}t, v_0) = 0$$

in der Form

$${}^1z = -\frac{q_1}{q_2} + t\sqrt{(q_1^2 - q_0 q_2)} + jv_0\,.$$

Die Menge aller Momentanpole in der gegebenen Phase kann man z.B. durch die folgende Methode bestimmen.

Wählen wir das Koordinatensystem so, daß die Momentanpole in $\bar{C}$ ${}^1z_1 = 0$ und ${}^1z_2 = \infty$ sind. Dann ist $q_0 = q_2 = 0$; $\gamma = \dot{\gamma} = \beta = \dot{\beta} = 0$. (27) kann man in der Form

$$\dot{u} = 2|\alpha|\, q_1 u$$

schreiben.

$\dot{u} = 0$ gilt für $u = 0$ und alle $v > 0$ und $\dot{v} = 0$ für $q_1 + \bar{q}_1 = 0$ und $u = 0$ und alle $v > 0$.

Die Momentanpole in solcher Phase sind alle Punkte der zu $\bar{C}$ orthogonalen Halbgeraden $u = 0$, $v > 0$.

Daraus folgt:

Satz 11. *In der entsprechenden Phase der $\mathcal{M}({}^{\backprime}H^3/H^3)$-Bewegung füllen die 1-Momentanpole einen Bogen des zu $\bar{C}$ orthogonalen Kreises in H^3 mit den Endepunkten in den Momentanpolen der entsprechenden $\mathcal{M}$-Bewegung in $\bar{C}$ aus.*

Die Untersuchung der restlichen Phasen der $\mathcal{M}$-Bewegung in H^3 und ihre Klassifikation führten wir in einem weiteren Artikel aus.

Literatur

[1] *L. V. Ahlfors:* Möbius transformations in several dimensions. University of Minnesota 1981 (Englisch, russische Übersetzung: Moskva, Mir, 1986).

[2] *W. Benz:* Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[3] *Z. Jankovský:* Zu einigen Fragen der ebene kinematische Geometrie auf der $\mathcal{M}$-Gruppe. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 7 (IV, 3), 1978, 43—51 (Tschechisch).

[4] *Z. Jankovský:* Zu den Möbiusschen Feldern der *i*-Geschrindigkeiten. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 17 (IV, 2), 1980, 91—105 (Tschechisch).

Souhrn

K MÖBIUSOVĚ GEOMETRII A KINEMATICE V H^3

Zdeněk Jankovský

V článku je studována Möbiusova geometrie v poloprostoru $H^3 \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 > 0\}$ pomocí kvaternionů o vyjádření

(1) $$z = u + vj\,,$$

kde $u = u_1 + iu_2 \in C$, $v > 0$, $i^2 = j^2 = -1$.

Nejprve je definováno operování Möbiusovy grupy reprezentované grupou SL(2, C) v poloprostoru H^3, jehož body jsou popsány kvaterniony typu (1). Je ukázáno, že tato grupa operuje v H^3 transitivně. Dále jsou nalezeny základní algebraické invarianty a je zaveden pojem $\mathcal{M}$-pohybu v H^3 a některé další základní kinematické pojmy. Poslední odstavec se zabývá 1-póly $\mathcal{M}({}'H^3/H^3)$-pohybu.

Резюме

К ГЕОМЕТРИИ И КИНЕМАТИКЕ МЕБИУСА В H^3

ZDENĚK JANKOVSKÝ

В статье изучается геометрия Мебиуса в полупространстве $H^3 \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 > 0\}$ при помощи кватернионов типа

$$z = u + vj, \tag{1}$$

где $u = u_1 + iu_2 \in C$, $v > 0$, $i^2 = j^2 = -1$.

Сначала определяется действие группы Мебиуса, представленной группой SL(2, C), в полупространстве H^3 и показывается, что это действие транзитивно. Затем в статье указаны основные алгебраические инварианты и определены $\mathscr{M}$-движение в H^3 и некоторые другие основные кинематические понятия. В заключительной части изучаются 1-полюсы $\mathscr{M}('H^3/H^3)$-движения.

Anschrift des Verfassers: Doc. RNDr. *Zdeněk Jankovský*, CSc., katedra matematiky, fakulta elektrotechnická ČVUT, Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6.