Július Cibula

Equations de von Kármán. I. Résultat d'existence pour les problèmes aux limites non homogènes.

Aplikace matematiky, Vol. 29 (1984), No. 5, 317–332

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104102

EQUATIONS DE VON KÁRMÁN

I. RESULTAT D'EXISTENCE POUR LES PROBLEMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES

JÚLIUS CIBULA

(Reçu le 16 mars 1983)

1. INTRODUCTION

Il existe de très nombreuses références sur les équations de von Kármán. Pour l'étude des questions d'existence, on se reportera à Berger [1], Knightly [8], Hlaváček et Naumann [5, 6], John et Nečas [7], Ciarlet et Rabier [4], etc. Dans cet article, on prend [5] et [7] pour point de départ. Nous nous intéresserons au problème:

$$\Delta^2 w = [\Phi, w] + q \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{1.1}$$

$$\Delta^2 \Phi = -[w, w] \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{1.2}$$

$$w = w_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\,, \tag{1.3}$$

$$w = 0\,, \quad Mw + k_2 w_n = m_2 \quad \text{sur } \Gamma_2\,, \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{aligned} Mw + k_{31} w_n &= m_3 \\ Tw + (w_x \Phi_{y\tau} - w_y \Phi_{x\tau}) + k_{32} w &= r_3 \end{aligned}\right\} \text{sur } \Gamma_3\,, \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} w_n &= 0 \\ Tw + (w_x \Phi_{y\tau} - w_y \Phi_{x\tau}) + k_4 w &= r_4 \end{aligned}\right\} \text{sur } \Gamma_4\,, \tag{1.6}$$

$$\Phi = \Phi_0\,, \quad \Phi_n = \Phi_1 \quad \text{sur } \delta\Omega\,, \tag{1.7}$$

où:

Ω désigne un ouvert borné et simplement connexe de E_2,

$$\Omega \in C^\infty\ {}^{1})\,, \tag{1.8}$$

---

[1]) Pour la définition de classe C^∞, cf. [7].

$\delta\Omega$ désigne une frontière de Ω qui est réunion de quatre parties disjointes mutuellement:

$$\delta\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 ,$$

$$u_x = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad u_{xy} = \frac{\delta^2 u}{\delta x\, \delta y}, \quad \text{etc.} ,$$

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta u) = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} ,$$

$$[u, v] = u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy} ,$$

$n = (n_x, n_y)$ est le vecteur unitaire normal extérieur à $\delta\Omega$,
$\tau = (-n_y, n_x)$ est le vecteur unitaire tangent à $\delta\Omega$,

$$u_n = u_x n_x + u_y n_y , \tag{1.9}$$

$$u_\tau = -u_x n_y + u_y n_x , \tag{1.10}$$

σ est le coefficient de Poisson, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$,

$$Mu = \sigma\Delta u + (1 - \sigma)\left[u_{xx}n_x^2 + 2u_{xy}n_x n_y + u_{yy}n_y^2\right] ,$$

$$Tu = -(\Delta u)_n + (1 - \sigma)\left[u_{xx}n_x n_y - u_{xy}(n_x^2 - n_y^2) - u_{yy}n_x n_y\right]_\tau ,$$

$k_2, m_2\colon \Gamma_2 \to E_1$, $k_{31}, k_{32}, r_3 : \Gamma_3 \to E_1$, $k_4, r_4\colon \Gamma_4 \to E_1$, $\Phi_0, \Phi_1\colon \delta\Omega \to E_1$, $q\colon \Omega \to$ $\to E_1$ sont les fonctions prescrites.

Quand la charge latérale développe l'effort de traction ou elle est assez petite, la question d'existence a été étudiée par Hlaváček et Naumann [5]. Dans le cas: $\Gamma_4 = \emptyset$, $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$ sur Γ_3 et une condition déterminée sur Γ_2 (cf. (5.4) dans [7]), le résultat d'existence a été donné dans John et Nečas [7] par idée de Knightly [8]. Ciarlet et Rabier [4] n'ont pas utilisé cette idée à condition que: $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = \emptyset$.

Dans notre article, nous définirons une équation d'opérateur équivalent à la formulation variationnelle du problème (1.1)–(1.7). Les solutions de cette équation sont des points critiques de la fonctionnelle qui porte le nom d'énergie totale de déformation. On montrera que la fonctionnelle est coercive et faiblement séquentiellement semi-continue inférieure. Nous généraliserons l'idée de Ciarlet et Rabier [4] sans que:

$$[w, w] = 0 \Rightarrow w = 0 .$$

2. SOLUTION CLASSIQUE ET VARIATIONNELLE DU PROBLEME

Définition 2.1. *Le couple $|w, \Phi|$ des fonctions de $C^4(\bar{\Omega})$ est dit une solution classique du problème s'il satisfait à* (1.1)–(1.7).

Dans la suite, nous supposerons que:

$$k_2 \in L_p(\Gamma_2) , \quad k_2 \geqq 0 \quad \text{presque partout sur } \Gamma_2 , \tag{2.1}$$

$$k_{31} \in L_p(\Gamma_3)\,, \quad k_{31} \geqq 0 \quad \text{presque partout sur } \Gamma_3\,,$$

$$k_{32} \in L_1(\Gamma_3)\,, \quad k_{32} \geqq 0 \quad \text{presque partout sur } \Gamma_3\,,$$

$$k_4 \in L_1(\Gamma_4)\,, \quad k_4 \geqq 0 \quad \text{presque partout sur } \Gamma_4\,,$$

(2.2) $$m_2 \in L_p(\Gamma_2)\,, \quad m_3 \in L_p(\Gamma_3)\,, \quad r_3 \in L_1(\Gamma_3)\,, \quad r_4 \in L_1(\Gamma_4)\,,$$

(2.3) $$q \in L_p(\Omega)\,,$$

où: $p \in (1, \infty)$,

(2.4) $$\Phi_0 \in W^{3/2,2}(\delta\Omega)\,, \quad \Phi_1 \in W^{1/2,2}(\delta\Omega)\,^{1})\,.$$

Nous appellerons:

$$A(u, v) =$$

$$= \int_\Omega [u_{xx}(v_{xx} + \sigma v_{yy}) + 2(1 - \sigma)\, u_{xy}v_{xy} + u_{yy}(v_{yy} + \sigma v_{xx})]\, dx\, dy\,,$$

$$a(u, v) = \int_{\Gamma_2} k_2 u_n v_n\, ds + \int_{\Gamma_3} (k_{31}u_n v_n + k_{32}uv)\, ds + \int_{\Gamma_4} k_4 uv\, ds\,,$$

$$p(u) = \int_{\Gamma_2} m_2 u_n\, ds + \int_{\Gamma_3} (m_3 u_n + r_3 u)\, ds + \int_{\Gamma_4} r_4 u\, ds\,,$$

où s représente l'abscisse curviligne de $\delta\Omega$,

$$(u, v)_{W_0{}^{2,2}} = \int_\Omega (u_{xx}v_{xx} + 2u_{xy}v_{xy} + u_{yy}v_{yy})\, dx\, dy\,,$$

$$\|u\|_{W_0{}^{2,2}} = \{(u, u)_{W_0{}^{2,2}}\}^{1/2}\,,$$

$$B(u; v, z) = \int_\Omega [(u_{xy}v_y - u_{yy}v_x)\, z_x + (u_{xy}v_x - u_{xx}v_y)\, z_y]\, dx\, dy\,,$$

$$\mathscr{V} = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : u = u_n = 0 \text{ sur } \Gamma_1, u = 0 \text{ sur } \Gamma_2, u_n = 0 \text{ sur } \Gamma_4\}\,.$$

Soit $/w, \Phi/$ une solution classique du problème (1.1)–(1.7). En appliquant la formule de Green avec les conditions aux limites (1.3)–(1.6), on obtient pour toutes fonctions $\varphi \in \mathscr{V}$, $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)^2$):

(2.5) $$A(w, \varphi) + a(w, \varphi) = B(\Phi; w, \varphi) + \int_\Omega q\varphi\, dx\, dy + p(\varphi)\,,$$

(2.6) $$(\Phi, \psi)_{W_0{}^{2,2}} = -B(w; w, \psi)\,.$$

On désigne:

$$V = \overline{\mathscr{V}}\,,$$

---

1) Pour la définition des espaces L_p, $W^{1/2,2}$, $W^{3/2,2}$, cf. [9].

2) L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ étant l'espace des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})$ à support compact dans Ω.

où l'adhérance est à prendre au sens de l'espace $W^{2,2}(\Omega)$[1]).

Définition 2.2. *Le couple* $[w, \Phi] \in V \times W^{2,2}(\Omega)$ *est dit une solution variationnelle du problème si*:

(i) *l'égalité* (2.5) *est satisfaite pour tout* $\varphi \in V$,
(ii) *l'égalité* (2.6) *est satisfaite pour tout* $\psi \in W_0^{2,2}(\Omega)$,
(iii) *la condition* (1.7) *est satisfaite au sens des traces.*

Grâce aux conditions (1.8) et (2.4), il existe une fonction $F \in W^{2,2}(\Omega)$ telle que:

$$F = \Phi_0\,, \quad F_n = \Phi_1 \quad \text{au sens des traces sur } \delta\Omega\,, \tag{2.7}$$

$$(F, \psi)_{W_0^{2,2}} = 0 \quad \text{pour tout} \quad \psi \in W_0^{2,2}(\Omega)\,. \tag{2.8}$$

On pose:

$$f = \Phi - F\,. \tag{2.9}$$

Il est clair que $f \in W_0^{2,2}(\Omega)$. Grâce à (2.8) et (2.9) on peut écrire (2.5) et (2.6) sous la forme:

$$A(w, \varphi) + a(w, \varphi) = B(F; w, \varphi) + B(f; w, \varphi) + \int_\Omega q\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + p(\varphi)\,, \tag{2.10}$$

$$(f, \psi)_{W_0^{2,2}} = -B(w; w, \psi)\,. \tag{2.11}$$

Définition 2.3. *Le couple* $[w, f] \in V \times W_0^{2,2}(\Omega)$ *est dit une solution variationnelle excessive du problème si*:

(i) *l'égalité* (2.10) *est satisfaite pour tout* $\varphi \in V$,
(ii) *l'égalité* (2.11) *est satisfaite pour tout* $\psi \in W_0^{2,2}(\Omega)$.

3. FORME CANONIQUE

Lemme 3.1. *Soit* $u \in V$ *vérifiant*:

$$A(u, u) + a(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0\,. \tag{3.1}$$

Alors, il existe des constantes $c_1 > 0$ *et* $c_2 > 0$ *telles que*:

$$c_1 \|u\|^2_{W^{2,2}} \leqq A(u, u) + a(u, u) \leqq c_2 \|u\|^2_{W^{2,2}}\,, \tag{3.2}$$

pour tout $u \in V$. (cf. [5], Lemme 3.1)

[1]) $W^{2,2}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{2,2}} = \left\{ \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_\Omega [(u_{xx})^2 + 2(u_{xy})^2 + (u_{yy})^2] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right\}^{1/2}.$$

Dans la suite, nous supposerons que (3.1) est vérifiée[1]).
On définit le produit scalaire de l'espace V par:

$$(u, v)_V = A(u, v) + a(u, v) \tag{3.3}$$

et la norme par:

$$\|u\|_V = \{A(u, u) + a(u, u)\}^{1/2}, \tag{3.4}$$

pour tout couple $/u, v/ \in V \times V$. Grâce au Lemme 3.1, l'espace V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (3.3). Par construction des espaces, on a:

$$W_0^{2,2}(\Omega) \subset V \subset W^{2,2}(\Omega). \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. Les relations (3.2), (3.4), (3.5) et l'injection compacte de l'espace $W^{2,2}(\Omega)$ dans l'espace $W^{1,4}(\Omega)$[2]) prouvent que:

$$V \hookrightarrow W^{2,2}(\Omega),$$

$$V \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,4}(\Omega)^{3}).$$

Remarque 3.2. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$|B(u; v, z)| \leqq \text{const} \|u\|_{W_0^{2,2}} \|v\|_{W^{1,4}} \|z\|_{W^{1,4}}, \tag{3.6}$$

pour tout triplet $/u, v, z/ \in [W^{2,2}(\Omega)]^3$. En appliquant la formule de Green, on obtient:

$$B(u; v, \psi) = B(\psi; u, v) = B(v; \psi, u), \tag{3.7}$$

pour tout triplet $/u, v, \psi/ \in [W^{2,2}(\Omega)]^2 \times W_0^{2,2}(\Omega)$.

Grâce aux Remarques 3.1 et 3.2, on a:

$$|B(F; w, \varphi)| \leqq \text{const} \|F\|_{W^{2,2}} \|w\|_{W^{1,4}} \|\varphi\|_V, \tag{3.8}$$

$$|B(f; w, \varphi)| \leqq \text{const} \|f\|_{W_0^{2,2}} \|w\|_{W^{1,4}} \|\varphi\|_V, \tag{3.9}$$

$$|B(w; \bar{w}, \varphi)| = |B(\psi; w, \bar{w})| \leqq \text{cosnt} \|\psi\|_{W_0^{2,2}} \|w\|_{W^{1,4}} \|\bar{w}\|_{W^{1,4}}, \tag{3.10}$$

---

[1]) Quelques conditions suffisantes sont données dans [5]. Par exemple: 1° $mes(\Gamma_1) > 0$, 2° $mes(\Gamma_2) > 0$ et Γ_2 n'est pas un segment d'une droite, etc.

[2]) $W^{1,4}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{1,4}} = \left\{\int\int_\Omega u^4 \,dx\,dy + \int_\Omega [(u_x)^4 + (u_y)^4] \,dx\,dy\right\}^{1/4}.$$

[3]) Soient X et Y des escapes de Hilbert. Alors, $X \hookrightarrow Y$ désigne l'injection continue de X dans Y et $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ désigne l'injection compacte de X dans Y.

pour tous $w, \bar{w}, \varphi \in V$ et $f, \psi \in W_0^{2,2}(\Omega)$. Par l'inégalité de Hölder, le théorème de traces et $V \hookrightarrow W^{2,2}(\Omega)$ on a:

$$\left|\int_\Omega q\varphi \, dx \, dy\right| \leqq \text{const} \, \|q\|_{L_p(\Omega)} \, \|\varphi\|_V \,, \tag{3.11}$$

$$|p(\varphi)| \leqq \text{const} \left\{ \sum_{i=2}^{3} \left(\|m_i\|_{L_p(\Gamma_i)} + \|r_{i+1}\|_{L_1(\Gamma_{i+1})}\right)\right\} \|\varphi\|_V \,, \tag{3.12}$$

pour tout $\varphi \in V$. Grâce au Théorème de Riesz et par (3.8)–(3.12), on déduit qu'il existe des opérateurs $L\colon V \to V$, $C_1\colon W_0^{2,2}(\Omega) \times V \to V$, $C_2\colon V \times V \to W_0^{2,2}(\Omega)$ et un élément $q^* \in V$ définis par:

$$B(F; w, \varphi) = (Lw, \varphi)_V \,, \tag{3.13}$$

$$B(f; w, \varphi) = (C_1(f, w), \varphi)_V \,, \tag{3.14}$$

$$B(w; \bar{w}, \psi) = (C_2(w, \bar{w}), \psi)_{W_0^{2,2}} \,, \tag{3.15}$$

$$p(\varphi) + \int_\Omega q\varphi \, dx \, dy = (q^*, \varphi)_V \,, \tag{3.16}$$

pour tous $w, \bar{w}, \varphi \in V$ et $f, \psi \in W_0^{2,2}(\Omega)$.

Remarque 3.3. En utilisant la trilinéarité de la forme $B(\ ;\ ,\ )$, on s'aperçoit facilement que l'operateur L est linéaire et les opérateurs C_1 et C_2 sont bilinéaires. Comme

$$B(F; w, \varphi) = B(F; \varphi, w) \,,$$

$$B(w; \bar{w}, \psi) = B(\bar{w}; w, \psi) \,,$$

pour tous $w, \bar{w}, \varphi \in V$ et $\psi \in W_0^{2,2}(\Omega)$, on déduit de (3.13) et (3.15) que:

$$(Lw, \varphi)_V = (L\varphi, w)_V \,, \tag{3.17}$$

$$C_2(w, \bar{w}) = C_2(\bar{w}, w) \quad \text{dans} \quad W_0^{2,2}(\Omega) \,, \tag{3.18}$$

pour tous $w, \bar{w}, \varphi \in V$.

Par (3.13)–(3.16), il est clair que les équations (2.10) et (2.11) sont équivalentes aux équations:

$$w = Lw + C_1(f, w) + q^* \quad \text{dans } V \,, \tag{3.19}$$

$$f = -C_2(w, w) \quad \text{dans } W_0^{2,2}(\Omega) \,. \tag{3.20}$$

Si l'on pose:

$$Cw = C_1(C_2(w, w), w) \,, \tag{3.21}$$

le couple $[w, f] \in V \times W_0^{2,2}(\Omega)$ vérifie:

$$w - Lw + Cw - q^* = 0 \quad \text{dans } V \,, \tag{3.22}$$

$$f = -C_2(w, w) \quad \text{dans } W_0^{2,2}(\Omega) \,. \tag{3.23}$$

Il apparaît clairement que f vérifiant (3.23) est connu dès que w vérifiant (3.22) l'est aussi, en conséquence, la formulation variationnelle (2.10) et (2.11) du problème (1.1)–(1.7) est équivalente à la recherche de éléments $w \in V$ vérifiant l'équation (3.22) (auquel cas f est obtenu par (3.23)).

4. PROPRIETES DES OPERATEURS L, C_1, C_2 ET [,]

Lemme 4.1. *Pour tout triplet* $|\psi, w, \bar{w}| \in W_0^{2,2}(\Omega) \times (V)^2$, *on a*:

$$(C_1(\psi, w), \bar{w})_V = (C_2(w, \bar{w}), \psi)_{W_0^{2,2}}. \tag{4.1}$$

Démonstration. D'après (3.7), (4.14) et (3.15), on a:

$$(C_1(\psi, w), \bar{w})_V = B(\psi; w, \bar{w}) = B(w; \bar{w}, \psi) = (C_2(w, \bar{w}), \psi)_{W_0^{2,2}}$$

pour tout triplet $|\psi, w, \bar{w}| \in W_0^{2,2}(\Omega) \times (V)^2$.

Lemme 4.2. *Pour tout couple* $|w, \bar{w}| \in (V)^2$, *on a*:

$$\|Lw\|_V \leqq \text{const} \, \|w\|_{W^{1,4}}, \tag{4.2}$$

$$\|C_2(w, \bar{w})\|_{W_0^{2,2}} \leqq \text{const} \, \|w\|_{W^{1,4}} \|\bar{w}\|_{W^{1,4}}. \tag{4.3}$$

Démonstration. Les inégalités (4.2) et (4.3) découlent de (3.8), (3.10), (3.13) et (3.15) avec $\varphi = Lw$ et $\psi = C_2(w, \bar{w})$.

Lemme 4.3. *Les opérateurs L et C_2 vérifient la propriété suivante: pour toute suite $\{w^n\}$ d'éléments de V telle que*:

$$w^n \to w \quad \text{faiblement dans } V, \tag{4.4}$$

on a:

$$Lw^n \to Lw \quad \text{fortement dans } V, \tag{4.5}$$

$$C_2(w^n, w^n) \to C_2(w, w) \quad \text{fortement dans } W_0^{2,2}(\Omega). \tag{4.6}$$

Démonstration. Soit alors $\{w^n\}$ une suite d'éléments de V telle que:

$$w^n \to w \quad \text{faiblement dans } V.$$

Par la compacité de l'injection:

$$V \subset\subset W^{1,4}(\Omega)$$

(cf. la Remarque 3.1), on a:

$$w^n \to w \quad \text{fortement dans } W^{1,4}(\Omega). \tag{4.7}$$

La linéarité de L et la bilinéarité de C_2 permettent d'écrire:

$$Lw^n - Lw = L(w^n - w),$$

$$C_2(w^n, w^n) - C_2(w, w) = C_2(w^n - w, w^n) + C_2(w, w^n - w),$$

soit:

$$\|Lw^n - Lw\|_V = \|L(w^n - w)\|_V,$$

$$\|C_2(w^n, w^n) - C_2(w, w)\|_{W_0^{2,2}} \leqq \|C_2(w^n - w, w^n)\|_{W_0^{2,2}} + \|C_2(w, w^n - w)\|_{W_0^{2,2}}.$$

Les inégalités (4.2) et (4.3) donnent:

(4.8) $$\|Lw^n - Lw\|_V \leqq \text{const}\ \|w^n - w\|_{W^{1,4}},$$

(4.9) $$\|C_2(w^n, w^n) - C_2(w, w)\|_{W_0^{2,2}} \leqq \text{const}\ \|w^n - w\|_{W^{1,4}} (\|w^n\|_{W^{1,4}} + \|w\|_{W^{1,4}}).$$

Grâce à (4.7) le second membre de (4.8) et (4.9) tend vers 0 et l'on obtient finalement (4.5) et (4.6)

Lemme 4.4 *Pour toute suite $\{w^n\} \subset V$ telle que:*

(4.10) $$w^n \to w \quad \text{fortement dans } V,$$

on a:

(4.11) $$\int_\Omega [w^n, w^n]\, F\, dx\, dy \to \int_\Omega [w, w]\, F\, dx\, dy,$$

où F est un élément de $W^{2,2}(\Omega)$.

Démonstration. D'aprés le Théorème de Sobolev et la Remarque 3.1, on sait que:

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \quad V \hookrightarrow W^{2,2}(\Omega),$$

et donc:

$$z \in C(\bar{\Omega}), \quad [u, v] \in L_1(\Omega),$$

(4.12) $$\left|\int_\Omega [u, v]\, z\, dx\, dy\right| \leqq (\max_{\bar{\Omega}} |z|) \int_\Omega |[u, v]|\, dx\, dy,$$

pour tout triplet $/u, v, z/ \in (V)^2 \times W^{2,2}(\Omega)$. En appliquant l'inégalité de Hölder et par $V \hookrightarrow W^{2,2}(\Omega)$, on obtient:

(4.13) $$\left|\int_\Omega [u, v]\, z\, dx\, dy\right| \leqq \text{const}\ (\max_{\bar{\Omega}} |z|)\ \|u\|_V\ \|v\|_V.$$

Soit alors $\{w^n\}$ une suite telle que:

(4.14) $$w^n \to w \quad \text{fortement dans } V.$$

Il est facile de voir que:

(4.15) $$\left|\int_\Omega [w^n, w^n]\, F\, dx\, dy - \int_\Omega [w, w]\, F\, dx\, dy\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\int_\Omega [w^n - w, w^n]\, F\, dx\, dy\right| + \left|\int_\Omega [w, w^n - w]\, F\, dx\, dy\right|,$$

par la bilinéarité du crochet [,]. L'inégalité (4.13) reportée dans (4.15) donne:

$$\left|\int_\Omega [w^n, w^n] F \, dx \, dy - \int_\Omega [w, w] F \, dx \, dy\right| \leqq \tag{4.16}$$

$$\leqq \text{const} \left(\max_{\bar\Omega} |F|\right) \left(\|w^n\|_V + \|w\|_V\right) \|w^n - w\|_V .$$

Grâce à (4.14) le membre de droite de (4.16) tends vers 0 et on obtient (4.11).

Lemme 4.5. *Soit* $w \in V$ *vérifiant*:

$$C_2(w, w) = 0 .$$

Alors:

$$[w, w] = 0 .$$

Démonstration. Soit w un élément de V. En vertu de la densité de $\mathscr{V}$ dans l'espace V, il existe une suite $\{w^n\} \subset \mathscr{V}$ telle que:

$$w^n \to w \quad \text{fortement dans } V .$$

En appliquant la formule de Green et par (3.15), on obtient:

$$(C_2(w^n, w^n), \psi)_{W_0^{2,2}} = B(w^n; w^n, \psi) = \int_\Omega [w^n, w^n] \psi \, dx \, dy ,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Grâce aux Lemmes 4.3 et 4.4 on a:

$$(C_2(w, w), \psi)_{W_0^{2,2}} = \int_\Omega [w, w] \psi \, dx \, dy .$$

Comme $C_2(w, w) = 0$, on a

$$\int_\Omega [w, w] \psi \, dx \, dy = 0 , \tag{4.17}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On définit une distribution sur Ω par:

$$\psi \in \mathscr{D}(\Omega) \to \langle [w, w], \psi \rangle = \int_\Omega [w, w] \psi \, dx \, dy . \tag{4.18}$$

De l'inégalité (4.12) et de la continuité de l'injection:

$$W_0^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar\Omega) ,$$

on obtient:

$$\left|\int_\Omega [w, w] \psi \, dx \, dy\right| \leqq \text{const} \int_\Omega |[w, w]| \, dx \, dy \, \|\psi\|_{W_0^{2,2}} , \tag{4.19}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Comme $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans l'espace $W_0^{2,2}(\Omega)$, l'inégalité (4.19) montre que la distribution définit une forme linéaire sur l'espace $W_0^{2,2}(\Omega)$, c'est-à-dire par définition, un élément de l'espace $W^{-2,2}(\Omega)$[1]:

$$[w, w] \in W^{-2,2}(\Omega) .$$

Par définition, on sait que:

$$\|[w, w]\|_{W^{-2,2}} = \sup_{\psi \in \mathscr{D}(\Omega)} \frac{|\langle [w, w], \psi \rangle|}{\|\psi\|_{W_0^{2,2}}} . \tag{4.20}$$

Les relations (4.17), (4.18) et (4.20) donnent:

$$\|[w, w]\|_{W^{-2,2}} = 0 ,$$

et donc:

$$[w, w] = 0.$$

Dans la suite, α désigne l'angle compris entre le vecteur τ et le demi-axe positif des x. On a:

$$n_x = \sin \alpha , \quad n_y = -\cos \alpha . \tag{4.21}$$

La courbure de $\delta\Omega$ étant définie par:

$$K = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} , \tag{4.22}$$

on a, d'après (4.21) et (4.22):

$$K = n_x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_y - n_y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_x . \tag{4.23}$$

Lemme 4.6. *Pour tout $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$, on a:*

$$w_x w_{y\tau} - w_y w_{x\tau} = w_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_\tau - w_\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_n + K[(w_n)^2 + (w_\tau)^2] , \tag{4.24}$$

sur $\delta\Omega$.

Démonstration. Soit w un élément de $C^\infty(\bar{\Omega})$. Comme

$$n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad \text{sur } \delta\Omega , \tag{4.25}$$

on déduit de (1.9) et (1.10) que:

$$w_x = w_n n_x - w_\tau n_y \quad \text{sur } \delta\Omega , \tag{4.26}$$

$$w_y = w_n n_y + w_\tau n_x \quad \text{sur } \delta\Omega . \tag{4.27}$$

[1]) $W^{-2,2}(\Omega)$ désigne le dual de l'espace $W_0^{2,2}(\Omega)$.

Par la dérivation des équations (4.25)−(4.27) par rapport à s, on trouve

(4.28) $$n_x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_x + n_y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_y = 0 \quad \text{sur } \delta\Omega\,,$$

(4.29) $$w_{x\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_x = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_n\right) n_x - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_\tau\right) n_y + w_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_x - w_\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_y\,,$$

(4.30) $$w_{y\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_n\right) n_y + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_\tau\right) n_x + w_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_y + w_\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_x\,,$$

sur $\delta\Omega$. En multipliant (4.26) et (4.27) par $w_{y\tau}$ et $w_{x\tau}$ respectivement et en soustrayant, on obtient:

(4.31) $$w_x w_{y\tau} - w_y w_{x\tau} = w_n[w_{y\tau} n_x - w_{x\tau} n_y] - w_\tau[w_{y\tau} n_y + w_{x\tau} n_x]\,.$$

Les égalités (4.25) et (4.28)−(4.30) reportées dans (4.31) donnent:

$$w_x w_{y\tau} - w_y w_{x\tau} =$$
$$= w_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_\tau - w_\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_n + \left[n_x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_y - n_y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n_x\right]\left[(w_n)^2 + (w_\tau)^2\right].$$

Grâce à (4.23), on conclut (4.24).

Dans la suite, nous supposerons que:

(I) $$K\Phi_0 \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_2\,,$$

(II) $$\Phi_0 = 0\,, \quad \Phi_1 \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3\,,$$

(III) $$K\Phi_0 \geqq 0\,, \quad \Phi_1 \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_4\,.$$

Remarque 4.1. Il découle de (I)−(III) que:

$$KF \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_2\,,$$
$$F = 0\,, \quad F_n \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3\,,$$
$$KF \geqq 0\,, \quad F_n \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_4\,,$$

au sens des traces.

Lemme 4.7. *Les conditions (I)−(III) étant vérifiées, on a pour tout $w \in V$:*

(4.32) $$(Lw, w)_V \leqq \int_\Omega [w, w]\, F \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

où $F \in W^{2,2}(\Omega)$ est une fonction satisfaisante à (2.7) et (2.8).

Démonstration. Soit w un élément de $\mathscr{V}$. En appliquant la formule de Green (deux fois) et (3.13), on obtient:

$$(4.33)\qquad (Lw, w)_V = B(F; w, w) = \int_\Omega [w, w]\, F\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y -$$

$$- \int_{\delta\Omega} [(F_x w_y - F_y w_x)\, w_\tau]\, \mathrm{d}s - \int_{\delta\Omega} [(w_x w_{y\tau} - w_y w_{x\tau})\, F]\, \mathrm{d}s\,.$$

On déduit de (4.25)–(4.27) que:

$$(4.34)\qquad F_x w_y - F_y w_x = F_n w_\tau - F_\tau w_n \quad \text{sur } \delta\Omega\,.$$

Les égalités (4.24) et (4.34) reportées dans (4.33) donnent:

$$(4.35)\qquad (Lw, w)_V = \int_\Omega [w, w]\, F\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \int_{\delta\Omega} (F_n w_\tau - F_\tau w_n)\, w_\tau\, \mathrm{d}s -$$

$$- \int_{\delta\Omega} \left[w_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_\tau - w_\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_n + K(w_n)^2 + K(w_\tau)^2 \right] F\, \mathrm{d}s\,.$$

Puisque $w \in \mathscr{V}$ et la condition (II) est vérifiée:

$$w = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\,,$$
$$w_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4\,,$$
$$F = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3\,.$$

On s'aperçoit alors que:

$$w_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} w_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4\,,$$
$$F_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3\,.$$

Reportant ces conditions dans (4.35), on obtient:

$$(Lw, w)_V = \int_\Omega [w, w]\, F\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y -$$

$$- \left\{ \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} F_n (w_\tau)^2\, \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} KF(w_n)^2\, \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_4} KF(w_\tau)^2\, \mathrm{d}s \right\}.$$

Grâce aux conditions (I)–(III) et à la Remarque 4.1, on a finalement:

$$(4.36)\qquad (Lw, w)_V \leqq \int_\Omega [w, w]\, F\, dx\, dy\,,$$

pour tout $w \in \mathscr{V}$. $\mathscr{V}$ étant dense dans l'espace V et grâce aux Lemmes 4.3 et 4.4 on conclut que (4.36) est satisfaite pour tout $w \in V$.

5. RESULTAT D'EXISTENCE

Lemme 5.1. *Les solutions de l'équation* (3.22) *sont des points critiques de la fonctionnelle* $J : V \to E_1$ *définie par*:

$$(5.1)\qquad J(w) = \tfrac{1}{2}\|w\|_V^2 - \tfrac{1}{2}(Lw, w)_V + \tfrac{1}{4}\|C_2(w, w)\|^2_{W_0{}^{2,2}} - (q^*, w)_V\,.$$

Démonstration. En vertu de la linéarité de L, la bilinéarité et symétrie de C_2, un simple calcul montre que:

$$DJ(w, h) = \lim_{t\to 0} \frac{J(w + th) - J(w)}{t} =$$

$$= (w, h)_V - \tfrac{1}{2}(Lw, h)_V - \tfrac{1}{2}(Lh, w)_V + (C_2(w, h), C_2(w, w))_{W_0{}^{2,2}} - (q^*, h)_V\,,$$

d'après la définition de la différentielle de Gâteaux pour tout couple $/w, h/ \in V \times V$ Grâce à (3.17) et (4.1), on obtient:

$$DJ(w, h) = (w - Lw + C_1(C_2(w, w), w) - q^*, h)_V\,,$$

et donc:

$$\operatorname{grad} J(w) = w - Lw + Cw - q^*\,,$$

pour tout $w \in V$.

Définition 5.1. *Soient* X *un espace de Hilbert,* $f : X \to E_1$ *une fonctionnelle et* u *un élément arbitraire de* X. *Alors*:

(i) f *est dite faiblement séquentiellement semi-continue inférieure sur* X *si*:

$$f(u) \leqq \liminf_{n\to\infty} f(u^n)\,,$$

pour toute suite $\{u^n\}$ *d'éléments de* X *qui converge faiblement vers* $u \in X$;

(ii) f *est dite faiblement continue sur* X *si la suite* $\{f(u^n)\}$ *converge vers* $f(u)$ *dans* E_1, *pour toute suite* $\{u^n\}$ *d'éléments de* X *qui converge faiblement vers* $u \in X$.

Lemme 5.2. *La fonctionnelle* J *définie par* (5.1) *est faiblement séquentiellement semi-continue inférieure sur* V.

Démonstration. La fonctionnelle quadratique:

$$g(w) = \tfrac{1}{2}\|w\|_V^2 - (q^*, w)_V$$

est faiblement séquentiellement s.c.i. (cf. [3] ou [10]). La fonctionnelle:

$$j(w) = -\tfrac{1}{2}(Lw, w)_V + \tfrac{1}{4}\|C_2(w, w)\|_{W_0^{2,2}}^2$$

est faiblement continue, grâce au Lemme 4.3 et aux propriétés du produit scalaire[1]). Alors, leur somme est la fonctionnelle faiblement séquentiellement s.c.i.

Lemme 5.3. *Si les conditions* (I) – (III) *sont vérifiées, alors*:

$$\lim_{R \to \infty} J(w) = \infty ,$$

où $R = \|w\|_V$.

Démonstration. (*idée de Ciarlet et Rabier* [4]). Dans le cas contraire, il existe une suite $\{w^n\}$ de l'espace V et une constante $c > 0$ telles que:

$$\lim_{n \to \infty} \|w^n\|_V = \infty , \tag{5.2}$$

$$\tfrac{1}{2}\|w^n\|_V^2 - \tfrac{1}{2}(Lw^n, w^n)_V + \tfrac{1}{4}\|C_2(w^n, w^n)\|_{W_0^{2,2}}^2 - (q^*, w^n)_V \leqq c . \tag{5.3}$$

On peut supposer (cf. (5.2)) que $w^n \neq 0$ pour tout $n \in N$. On pose:

$$v^n = \frac{w^n}{\|w^n\|_V} , \tag{5.4}$$

pour tout $n \in N$. En divisant par $\|w^n\|_V^2$ l'inégalité (5.3), on obtient:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(Lv^n, v^n)_V + \tfrac{1}{4}\|w^n\|_V^2 \, \|C_2(v^n, v^n)\|_{W_0^{2,2}}^2 \leqq \frac{c}{\|w^n\|_V^2} + \frac{1}{\|w^n\|_V}(q^*, v^n)_V , \tag{5.5}$$

pour tout $n \in N$, où l'on a utilisé l'homogénéité de L et C_2. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite bornée[2]) $\{v^n\}$ converge faiblement vers une limite $v \in V$. Grâce au Lemme 4.3 et par propriété du produit scalaire, on a:

$$(Lv^n, v^n)_V \to (Lv, v)_V , \tag{5.6}$$

$$\|C_2(v^n, v^n)\|_{W_0^{2,2}}^2 \to \|C_2(v, v)\|_{W_0^{2,2}}^2 , \tag{5.7}$$

$$(q^*, v^n)_V \to (q^*, v)_V . \tag{5.8}$$

---

[1]) Soit:

$$u^n \to u \quad \text{fortement}, \quad v^n \to v \quad \text{faiblement}$$

dans l'espace de Hilbert V. Alors:

$$(u^n, v^n)_V \to (u, v)_V .$$

[2]) Parce que: $\|v^n\|_V = 1$.

(i) Soit $\|C_2(v, v)\|^2_{W_0^{2,2}} > 0$. Grâce à (5.2) et (5.6)–(5.8), le membre de droite de (5.5) tend vers 0 pendant que le membre de gauche de cette même inégalité tend vers $+\infty$, ce qui est absurde.

(ii) Soit $\|C_2(v, v)\|^2_{W_0^{2,2}} = 0$. Alors, $C_2(v, v) = 0$ dans $W_0^{2,2}(\Omega)$ et $[v, v] = 0$, par le Lemme 4.5. Il découle de (5.5) que:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(Lv^n, v^n)_V \leqq \frac{c}{\|w^n\|_V^2} + \frac{1}{\|w^n\|_V} (q^*, v^n)_V . \tag{5.9}$$

Grâce à (5.2), (5.6) et (5.8), on obtient:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(Lv, v)_V \leqq 0 . \tag{5.10}$$

Par (4.32), on a:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \int_\Omega [v, v] \, F \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqq 0 . \tag{5.11}$$

Puisque: $[v, v] = 0$, le membre de gauche de (5.11) est $\frac{1}{2}$ pendant que le membre de droite de cette même inégalité est 0, ce qui est absurde.

Grâce aux Lemmes 5.1–3 et par une conclusion classique (cf. [3] ou [10]), on obtient le Théorème suivant:

Théorème. *Supposons les conditions* (1.8), (2.1)–(2.4), (3.1) *et* (*I*)–(*III*) *vérifiées. Alors, l'équation* (3.22) *possède au moins une solution. Plus précisément, il existe au moins un élément* $w_0 \in V$ *tel que*:

$$J(w_0) \leqq J(w) ,$$

pour tout $w \in V$, *où* J *est la fonctionnelle définie par* (5.1).

Remerciement. L'auteur remercie vivement dr. R. Kodnár pour les discussions au cours de la préparation.

Références

[1] *M. S. Berger:* On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate, I. Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), 687–719.

[2] *M. S. Berger*, et *P. C. Fife:* On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate, II. Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), 227–241.

[3] *J. Céa:* Optimisation, théorie et algoritmes. Dunod, Paris 1971.

[4] *P. G. Ciarlet* et *P. Rabier:* Les équations de von Kármán. Lecture Notes in Math., vol. 826. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1980.

[5] *I. Hlaváček* et *J. Naumann:* Inhomogenous boundary value problems for the von Kármán equation, I. Apl. mat. 19, (1974), 253–269.

[6] *I. Hlaváček* et *J. Naumann:* Inhomogenous boundary value problems for the von Kármán equation, II. Apl. mat. 20 (1975), 280–297.

[7] *O. John* et *J. Nečas:* On the solvability of von Kármán equations. Aplikace matematiky, 20 (1975), 48—62.

[8] *G. H. Knightly:* An existence theorem for the von Kármán equations. Arch. Rat. Mech. Anal., 27 (1967), 233—242.

[9] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Prague 1967.

[10] *M. M. Вайнберг:* Вариационный метод и метод монотонных операторов. Наука, Москва 1972.

Súhrn

ROVNICE VON KÁRMÁNA I. EXISTENČNÝ VÝSLEDOK PRE NEHOMOGÉNNE OKRAJOVÉ ÚLOHY

Július Cibula

V článku je definovaná operátorova rovnica, ktorá je ekvivalentná variačnej formulácii úlohy. Riešenia tejto rovnice sú kritické body energetického funkcionálu. Funkcionál je koercívny a slabo zdola polospojitý. Na základe vety z funkcionálnej analýzy dostávame existenčný výsledok úlohy.

Adresse d'auteur: RNDr. *Július Cibula*, Katedra matematiky a desk. geometrie, Strojnícka fakulta SVŠT, Gottwaldovo nám. 17, 812 31 Bratislava.