

# Aplikace matematiky

---

Miroslav Šisler

Über eine Modifikation eines verallgemeinerten Überrelaxationsverfahrens

*Aplikace matematiky*, Vol. 24 (1979), No. 5, 348–354

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103815>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1979

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ÜBER EINE MODIFIKATION EINES VERALLGEMEINERTEN ÜBERRELAXATIONSVERFAHRENS

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen 6. Oktober 1977)

In den Arbeiten [2]–[5] wurde ein gewisses Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

untersucht; dabei  $\mathbf{B}$  bezeichnete eine schwach  $p$ -zyklische, konsistent geordnete  $n \times n$  Blockmatrix. Das Iterationsverfahren wurde durch die Beziehungen (3), (4), (5), (6) aus der Arbeit [2] definiert (man bemerke, dass die Beziehung (6) aus der Arbeit [2] folgenderweise lauten soll:  $x_{v+1} = T(\alpha, \beta) x_v + P(\alpha, \beta) b$ ). Eine genaue Formulierung der Voraussetzungen kann man in der Arbeit [2], Seite 327 (siehe die Beziehung (7)) finden.

In den Arbeiten [3], [4], [5] wurde gezeigt, dass unter gewissen, die Wahl von der Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und die Lage der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{B}$  betreffenden, Bedingungen das untersuchte Verfahren schneller, als das Überrelaxationsverfahren, konvergiert (das Überrelaxationsverfahren ist dabei ein Spezialfall des untersuchten Verfahrens).

In dieser Arbeit untersucht man den Fall, wenn  $\mathbf{B}$  eine ganz allgemeine Matrix mit dem Spektralradius  $\rho(\mathbf{B}) < 1$  ist. Statt des Systems (1) untersuche man nun das folgende Gleichungssystem:

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass man für die Lösung  $\mathbf{x}$  des Systems (1) die Lösung  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  des Systems (2) bekommt; es gilt im Gegenteil, dass für die Lösung  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  des Systems (2)  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  gilt, wobei  $\mathbf{x}$  eine Lösung des Systems (1) ist. Das System (2) kann man ferner folgenderweise schreiben:

$$(3) \quad \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{c},$$

wobei  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$  gilt. Da  $\mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^2 \end{pmatrix}$  gilt, besitzen die Matrizen  $\mathbf{B}^2$ ,  $\mathbf{C}^2$  identische Eigenwerte und es gilt also  $\varrho(\mathbf{C}^2) = \varrho(\mathbf{B}^2)$ . Da  $\mathbf{C}$  eine schwach 2-zyklische Matrix ist, gilt auch  $\varrho(\mathbf{C}) = \varrho(\mathbf{B}) < 1$ . Die Matrix  $\mathbf{C}$  schreibt man jetzt in der Form

$$\mathbf{C} = \mathbf{L} + \mathbf{U},$$

wo  $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$  ist. Da die Matrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  alle Bedingungen für die Matrizen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  aus der Arbeit [2], S. 327, erfüllen, kann man zu der Lösung des Systems (3) eine durch folgende Formeln definierte Methode benutzen:

$$(4) \quad \mathbf{z}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{z}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta) \mathbf{c},$$

$$(5) \quad \mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E}_{2n} + \beta \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1) \mathbf{E}_{2n} + (\beta + 1) \mathbf{L} + \mathbf{U}],$$

$$(6) \quad \mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E}_{2n} + \beta \mathbf{L})^{-1};$$

dabei bezeichnet  $\alpha, \beta$  reelle, von Null verschiedene Parameter und  $\mathbf{E}_{2n}$  die Einheitsmatrix der Dimension  $2n$  (die Beziehungen (4), (5), (6) entsprechen dabei offensichtlich den Beziehungen (4), (5), (6) aus der Arbeit [2]).

Aus (5), (6), (7) folgen jetzt folgende Beziehungen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{v+1} \\ \mathbf{y}_{v+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{B} & \alpha \mathbf{E}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha - 1) \mathbf{E}_n & \mathbf{B} \\ (\beta + 1) \mathbf{B} & (\alpha - 1) \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{y}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{B} & \alpha \mathbf{E}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{B} & \alpha \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{v+1} \\ \mathbf{y}_{v+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - 1) \mathbf{E}_n & \mathbf{B} \\ (\beta + 1) \mathbf{B} & (\alpha - 1) \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{y}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

$$(7) \quad \alpha \mathbf{x}_{v+1} = (\alpha - 1) \mathbf{x}_v + \mathbf{B} \mathbf{y}_v + \mathbf{b},$$

$$(8) \quad \alpha \mathbf{y}_{v+1} = (\alpha - 1) \mathbf{y}_v + (\beta + 1) \mathbf{B} \mathbf{x}_v - \beta \mathbf{B} \mathbf{x}_{v+1} + \mathbf{b}.$$

Bei der Bezeichnung  $\zeta_{2v} = \mathbf{x}_v$ ,  $\zeta_{2v+1} = \mathbf{y}_v$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$  bekommt man die durch den Beziehungen

$$(9) \quad \alpha \zeta_i = (\alpha - 1) \zeta_{i-2} + \mathbf{B} \zeta_{i-1} + \mathbf{b} \quad (\text{für gerade } i),$$

$$(10) \quad \alpha \zeta_i = (\alpha - 1) \zeta_{i-2} + (\beta + 1) \mathbf{B} \zeta_{i-3} - \beta \mathbf{B} \zeta_{i-1} + \mathbf{b} \quad (\text{für ungerade } i),$$

definierte Folge  $\{\zeta_i\}_{i=2}^{\infty}$ . Falls man ferner  $\beta = -1$ ,  $\alpha = 1/\omega$  legt, folgt aus den Beziehungen (10), (11) die Beziehung

$$(11) \quad \zeta_i = (1 - \omega) \zeta_{i-2} + \mathbf{B} \zeta_{i-1} + \mathbf{b}, \quad i = 2, 3, \dots,$$

was dem, auf das  $2n$ -dimensionale System (3) (siehe z. B. [1]) angewandten Überrelaxationsverfahren entspricht.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge  $\{\zeta_i\}_{i=2}^{\infty}$  zu der Lösung  $\mathbf{x}$  des Systems (1) hängt von dem Spektralradius der  $2n$ -dimensionalen Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  ab. Den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten dieser Matrix und den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{B}^2$  drückt folgender Satz aus.

**Satz 1.** A. Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ . Falls  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  ist und falls die Zahl  $\sigma$  die Beziehung

$$(12) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = \sigma(1 + \beta - \lambda\beta)$$

erfüllt, ist  $\sigma$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$ .

B. Falls  $\sigma$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$  ist, dann ist jede Wurzel  $\lambda$  der Gleichung (12) ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ .

Beweis. A. Man setze voraus, dass  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  ist. Dann existiert ein von der Null verschiedener Vektor  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ , sodass

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \alpha \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{B} & \alpha \mathbf{E}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha - 1) \mathbf{E}_n & \mathbf{B} \\ (\beta + 1) \mathbf{B} & (\alpha - 1) \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

gilt. Daher folgt schrittweise

$$\begin{pmatrix} (\alpha - 1) \mathbf{E}_n & \mathbf{B} \\ (\beta + 1) \mathbf{B} & (\alpha - 1) \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{B} & \alpha \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix},$$

$$(\alpha - 1) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{y} = \lambda \alpha \mathbf{x},$$

$$(\beta + 1) \mathbf{B} \mathbf{x} + (\alpha - 1) \mathbf{y} = \lambda \beta \mathbf{B} \mathbf{x} + \lambda \alpha \mathbf{y},$$

$$(13) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha) \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{y},$$

$$(14) \quad (1 + \beta - \lambda\beta) \mathbf{B} \mathbf{x} = (1 - \alpha + \lambda\alpha) \mathbf{y}.$$

Aus (13) folgt sofort

$$(15) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha) \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{B}^2 \mathbf{y}.$$

Da nach der Voraussetzung  $1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$  ist, folgt von (14) und (15) die Beziehung

$$(16) \quad \mathbf{B}^2 \mathbf{y} = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^2}{1 + \beta - \lambda\beta} \mathbf{y},$$

sodass man angesichts (12) die Gleichung

$$(17) \quad \mathbf{B}^2 \mathbf{y} = \sigma \mathbf{y}$$

bekommt. Falls  $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$  gilt, ist  $\sigma$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$ , was zu beweisen war. Falls  $\mathbf{y} = \mathbf{o}$  ist, gilt  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  angesichts  $\mathbf{z} \neq \mathbf{o}$ . Von (13) und (14) folgt dann sofort, dass  $(1 - \alpha + \lambda\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ,  $(1 + \beta - \lambda\beta)\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{o}$  ist. Aus der Beziehung  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  ergibt sich  $1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$  und es ist also  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ . Angesichts  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  ist ferner  $1 - \alpha + \lambda\alpha = 0$ . Da  $\sigma$  nach der Voraussetzung die Gleichung (12) erfüllt, muss  $\sigma = 0$  sein; die Zahl  $\sigma = 0$  ist tatsächlich ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$ , da  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  gilt.

Dadurch ist der erste Teil des Satzes 1 bewiesen.

B. Es sei nun  $\sigma$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$ . Man untersuche folgende drei Möglichkeiten:

a)  $\alpha = -\beta$ ,  $\sigma \neq 0$ . Dann ist die Gleichung (11) von der Form

$$(18) \quad (1 + \beta - \lambda\beta)^2 = \sigma(1 + \beta - \lambda\beta)$$

und die Zahl  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$  ist eine ihrer Wurzeln. Man kann leicht beweisen, dass diese Zahl  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(-\beta, \beta)$  ist. Falls nämlich  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$  gilt, wo  $\mathbf{x}$

ein beliebiger von Null verschiedener Vektor ist, kann man leicht die Gültigkeit der Beziehung  $\mathbf{T}(-\beta, \beta)\mathbf{z} = [(1 + \beta)/\beta]\mathbf{z}$  beglaubigen.

Man untersuche ferner die zweite Wurzel der Gleichung (18), d. h. die Zahl  $\lambda = (1 + \beta - \sigma)/\beta$ . Da nach der Voraussetzung  $\sigma$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$  ist, existiert ein solcher Vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ , dass  $\mathbf{B}^2\mathbf{x} = \sigma\mathbf{x}$  gilt. Man definiert einen Vektor  $\mathbf{y}$  durch die Beziehung  $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ . Es ist nun leicht zu beweisen, dass folgende Beziehung gilt:

$$(19) \quad \mathbf{T}(-\beta, \beta)\mathbf{z} = [(1 + \beta - \sigma)/\beta]\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Diese Beziehung ist nämlich folgenden Beziehung äquivalent:

$$\begin{aligned} -(1 + \beta)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} &= -(1 + \beta - \sigma)\mathbf{x}, \\ (1 + \beta)\mathbf{B}\mathbf{x} - (1 + \beta)\mathbf{y} &= (1 + \beta - \sigma)\mathbf{B}\mathbf{x} - (1 + \beta - \sigma)\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Davon folgt sofort, dass

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \sigma\mathbf{x}, \quad \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

und auch  $\mathbf{B}^2\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} = \sigma\mathbf{x}$  gilt. Es gilt also (19), was wir beweisen sollten.

b) Es sei jetzt  $\alpha = -\beta$ ,  $\sigma = 0$ . Die Gleichung (12) ist dann von der Form  $(1 + \beta - \lambda\beta)^2 = 0$  und sie besitzt also eine zweifache Wurzel  $\lambda = (\beta + 1)/\beta$ . Die Beziehung  $\mathbf{T}(-\beta, \beta)\mathbf{z} = [(\beta + 1)/\beta]\mathbf{z}$  gilt dann für den Vektor  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$ , wo  $\mathbf{x}$  ein beliebiger, von Null verschiedener Vektor ist.

c) Es sei  $\alpha \neq -\beta$ . Dann kann man beweisen, dass für jede Wurzel  $\lambda$  der Gleichung (12) die Beziehung  $1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$  gilt. Falls nämlich  $1 + \beta - \lambda\beta = 0$  gilt, gilt auch  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$  und aus der Beziehung (14) folgt dann die Gleichung

$$(20) \quad \left(1 - \alpha + \frac{1 + \beta}{\beta} \alpha\right) \mathbf{y} = \mathbf{o}.$$

Da  $\sigma$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^2$  ist, ist  $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$  in (20) und nach (20) ist  $1 - \alpha + [(1 + \beta)/\beta] \alpha = 0$  oder  $\alpha = -\beta$ , was ein Widerspruch ist.

Man untersuche also den Fall, dass  $\lambda \neq (1 + \beta)/\beta$  und  $\sigma \neq 0$  ist. Aus der Beziehung (17) mit  $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$  und aus (12) folgt dann die Beziehung (16). Man wähle jetzt einen solchen Vektor  $\mathbf{x}$ , dass (13) gilt. Aus (13) und (16) folgt dann sofort

$$(21) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha) \mathbf{B}\mathbf{x} = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^2}{1 + \beta - \lambda\beta} \mathbf{y}.$$

Falls  $1 - \alpha + \lambda\alpha \neq 0$  ist, folgt sofort aus (21) die Beziehung (14). Da die Beziehungen (13) und (14) äquivalent mit der Beziehung  $\mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$  sind, ist  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ , was zu bewiesen war. Der Fall mit  $1 - \alpha + \lambda\alpha = 0$  kann nicht vorkommen, da aus (12)  $\sigma = 0$  folgen würde, was ein Widerspruch mit der Voraussetzung  $\sigma \neq 0$  wäre.

Es sei ferner  $\sigma = 0$ . Aus (12) folgt dann, dass  $1 - \alpha + \lambda\alpha = 0$  oder  $\lambda = (\alpha - 1)/\alpha$  ist. Es sei  $\mathbf{y}$  ein von Null verschiedener und der Zahl  $\sigma = 0$  entsprechender Eigenvektor. Die Beziehung (17) ist dann der Form  $\mathbf{B}^2 \mathbf{y} = \mathbf{o}$ ; es ist also die Matrix  $\mathbf{B}$  singulär und es existiert ein solcher von Null verschiedener Vektor  $\mathbf{x}$ , dass  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{o}$  gilt. Man kann leicht die Gültigkeit der Beziehung  $\mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{z} = (\alpha - 1)/\alpha \mathbf{z}$  mit  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$  beglaubigen.

Dadurch ist der Satz 1 bewiesen.

Man bemerke noch, dass der Satz 1 aus dem Satz 1 der Arbeit [2] folgt. Man untersuche nämlich statt der Matrix  $\mathbf{B}$  aus dem oben erwähnten Satz die Matrix  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$  und ihre Zerlegung  $\mathbf{C} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$ , wo  $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$  ist. Mir Rücksicht darauf, dass es sich um eine schwach zweizyklische Matrix handelt genügt es in dem Satz 1 der Arbeit [2]  $p = 2$ ,  $h = k = 1$  zu legen. Da ferner die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{C}^2$  identisch mit den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{B}^2$  sind, bekommt man sofort den Satz 1 dieser Arbeit. Ein elementarer Beweis des Satzes 1 wurde durch eine spezielle Zerlegung der Matrix  $\mathbf{B}$  auf die Matrizen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$  ermöglicht.

Der Satz 1 ermöglicht einige Ergebnisse der Arbeiten [3], [4], [5] auf den erwägten  $2n$ -dimensionalen Fall anzuwenden. Man setze voraus, dass für die Eigenwerte  $\sigma_i$  der Matrix  $\mathbf{B}^2$  die Ungleichungen  $0 < \sigma_i < 1$  gelten und dass  $s = \min_i \sigma_i$ ,  $S = \max_i \sigma_i$

ist. Solange  $\beta = -1$  und  $\alpha = 1/\omega$  gilt, bekommt man das, dem Oberrelaxationsverfahren entsprechende, Iterationsverfahren (11). Es ist bekannt, dass

$\min_{\omega} \varrho(\mathbf{T}(1/\omega, -1)) = (1 - \sqrt{(1 - S)})/(1 + \sqrt{(1 - S)})$  für  $\omega = 2/(1 + \sqrt{(1 - S)})$  gilt.

Man bezeichne jetzt mit  $\Omega$  eine Menge solcher Punkte  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha > 0$ , für die  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq (1 - \sqrt{(1 - S)})/(1 + \sqrt{(1 - S)})$  gilt (es handelt sich also um eine Menge der Parameter  $[\alpha, \beta]$ , für die das durch die Formeln (9), (10) definierte Iterationsverfahren wenigstens so schnell, wie das Verfahren (11) für den optimalen Parameter  $[\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}]$  konvergiert). Die Gestalt der Menge  $\Omega$  ist dann durch die Sätze festgestellt, die ganz analogisch den Sätzen 2, 3 aus der Arbeit [4] sind, insofern man in diesen Sätzen die Zahl  $m^2$  bzw.  $M^2$  durch die Zahl  $s$  bzw.  $S$  ersetzt. Eine annähernde Lage der optimalen Parameter  $[\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}]$  gilt der folgende Satz an:

**Satz 2.** Es sei  $1 - \sqrt{(1 - S)} < s \leq S$  und

$$\alpha_0 = (1 + \sqrt{(1 - S)})(1 - s)/(1 + \sqrt{(1 - S)} - s),$$

$$\beta_0 = -2(1 - s)/(1 + \sqrt{(1 - S)} - s).$$

Dann ist  $[\alpha_0, \beta_0] \in \Omega$  und es gilt

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) \leq \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \sqrt{\left(\frac{s(S - s)}{(1 + \sqrt{(1 - S)})^2(1 - s)}\right)} < \frac{1 - \sqrt{(1 - S)}}{1 + \sqrt{(1 - S)}},$$

wobei für  $s = S$  die Gleichheit

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = 0$$

gilt.

Der Satz 2 ist analogisch dem Satz 4 aus der Arbeit [4].

Analogische Ergebnisse bekommt man für den Fall  $\sigma_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Man bezeichnet  $S = \max_i |\sigma_i|$ ,  $s = \min_i |\sigma_i|$ ; es ist bekannt, dass das den Parametern  $\beta = -1$  und  $\alpha = 1/\omega$  entsprechende Iterationsverfahren am schnellsten für  $\omega_0 = 2/(1 + \sqrt{(1 + S)})$  konvergiert und es gilt dann  $\varrho(\mathbf{T}(1/\omega_0, -1)) = (1 - \sqrt{(1 + S)}) : (1 + \sqrt{(1 + S)})$ . Falls man wieder durch  $\Omega$  die Menge solcher Parameter  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha > 0$  bezeichnet, für die  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq -(1 - \sqrt{(1 + S)})/(1 + \sqrt{(1 + S)})$  ist, gelten für die Gestalt dieser Menge den Sätzen 2, 3 der Arbeit [5] analogische Sätze, solange man wieder die Zahl  $m^2$  bzw.  $M^2$  durch die Zahl  $s$  bzw.  $S$  ersetzt. Die annähernde Lage der optimalen Parameter  $[\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}]$  gibt folgender, dem Satz 4 aus der Arbeit [5] analogischer, Satz an:

**Satz 3.** Es sei  $-1 + \sqrt{(1 + S)} < s \leq S$ ,

$$\alpha_0 = (1 + \sqrt{(1 + S)})(1 + s)/(1 + \sqrt{(1 + S)} + s),$$

$$\beta_0 = -2(1+s)/(1+\sqrt{(1+S)+s}).$$

Dann ist  $[\alpha_0, \beta_0] \in \Omega$  und es gilt

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) \leq \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \sqrt{\left(\frac{s(S-s)}{(1+\sqrt{(1+S)+s})^2(1+s)}\right)} < -\frac{1-\sqrt{(1+S)}}{1+\sqrt{(1+S)}},$$

wobei für  $s = S$  die Gleichheit

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = 0$$

gilt.

#### Literatur

- [1] Varga, A. S.: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.
- [2] Šisler, M.: Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren. Aplikace matematiky, 18 (1973), 325–332.
- [3] Šisler, M.: Über die Optimierung eines zweiparametrigem Iterationsverfahrens. Aplikace matematiky, 20 (1975), 126–142.
- [4] Šisler, M.: Bemerkungen zur Optimierung eines zweiparametrigem Iterationsverfahrens. Aplikace matematiky, 21 (1976), 213–220.
- [5] Šisler, M.: Über ein Iterationsverfahren für die Lösung spezieller linearer Gleichungssysteme mit einer zyklischen Matrix. Aplikace matematiky, 23 (1978), 295–299.

#### Souhrn

### O JEDNÉ MODIFIKACI ZOBECNĚNÉ SUPERRELAXAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

Zkoumá se rychlost a optimalizace jisté iterační metody pro řešení soustav lineárních rovnic tvaru  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , která závisí na dvou parametrech a je zobecněním superrelaxační metody. V práci jsou aplikovány některé předchozí autorovy výsledky platné za předpokladu slabě  $p$ -cyklické matice  $\mathbf{B}$  na případ soustavy s obecnou maticí  $\mathbf{B}$ . Jsou uvedeny formule pro přibližnou hodnotu optimálních parametrů. Rychlost konvergence je porovnávána s rychlostí optimalizované superrelaxační metody.

*Anschrift des Verfassers:* RNDr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.