Aplikace matematiky

Libuše Grygarová

Über Punktberührung von konvexen Mengen

Aplikace matematiky, Vol. 23 (1978), No. 6, 453–466

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103771

ÜBER PUNKTBERÜHRUNG VON KONVEXEN MENGEN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eigegangen 29. März 1977)

Diese Arbeit schliesst auf eine frühere Arbeit [1] des Verfassers, deren Ergebnisse (und die dort eingeführten Begriffe) hier benutzt werden, an. Die im Artikel [1] eingeführte Symbolik wird hier ebenfalls beibehatten.

In der konvexen Optimierung werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Optimalität der gesuchten Lösung der vorgegebenen Optimierungsaufgabe auf verschiedene Art und Weise hergeleitet. Es ist bekannt (z. B. [2]) dass solche Bedingungen den Bedingungen für die Berührung von konvexen Mengen äquivalent sind. Das Ziel der vorgelegten Arbeit ist eben die Herleitung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Berührung von konvexen Mengen, die dann in Spezialfällen zu den bekannten Bedingungen für die Lösung des vorgelegten konvexen Optimierungsproblem führen (z. B. zu den Kuhn-Tucker Bedingungen). Bei dieser Herleitung wird hier von den Eigenschaften der sphärischen Abbildung einer konvexen abgeschlossenen Menge ausgegangen. (Der Begriff einer solchen Abbildung wurde in [1] eingeführt.)

Im ersten Teil der Arbeit werden bestimmte Begriffe und Behauptungen, die die konvexe Analysis betreffen und in der zittierten Arbeit [1] enthalten sind, kurz angegeben. Im zweiten Teil der Arbeit wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Berührung von konvexen Mengen in voller Allgemeinheit auf einem geometrischen Weg abgeleitet. Im Abschluss der Arbeit wird die Anwendung der im Teil 2 abgeleiten Ergebnisse auf die konvexe Optimierung illustriert.

§1. EINLEITENDE BEGRIFFE

Der Satz über die Trennung von konvexen Mengen stellt einen der Fundamentalsätze der konvexen Analysis dar. Unter trennbaren Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ versteht man allgemein solche zwei Mengen $\boldsymbol{A} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{B} \neq \emptyset$, für die es eine Hyperebene $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{E}_n$ mit den Eigenschaften $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \not\subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^1$, $\boldsymbol{B} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^2$, wobei $\overline{\boldsymbol{H}}^1$, $\overline{\boldsymbol{H}}^2$ abgeschlossene

Halbräume in $\mathbf{E}_n$ mit $\bar{H}^1 \cap \bar{H}^2 = \mathbf{R}$ sind. Wir führen zuerst den sogenannten Trennungssatz für konvexe Mengen und den Satz von Farkas (siehe z. B. [3], [4]) ohne Beweis in folgender Form an.

Satz 1.1. *Zwei konvexe Mengen ${}_i\mathbf{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ in $\mathbf{E}_n$ sind genau dann trennbar, wenn*

$$\text{rel. int } {}_1\mathbf{M} \cap \text{rel. int } {}_2\mathbf{M} = \emptyset$$

gilt.

Satz 1.2. *Es sei $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}_n$ ein konvexer Kegel mit ${}_0\mathbf{x}$ als Scheitel, ${}^p\mathbf{K}({}_0\mathbf{x})$ der zu ihm zugehörige Polarkegel mit einem Scheitel in ${}_0\mathbf{x}$, ${}_1\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$, ${}_1\mathbf{x} \neq {}_0\mathbf{x}$ ein beliebiger Punkt. Definiert man die Hyperebene*

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid ({}_1\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x},\ \mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}) = 0\}$$

und die ihr zugehörigen offenen Halbräume

$$H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid ({}_1\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x},\ \mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}) > 0\}\,,$$
$$H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid ({}_1\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x},\ \mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}) < 0\}\,,$$

so gilt

$$\mathbf{K} \subset \bar{H}^- \Leftrightarrow {}_1\mathbf{x} \in {}^p\mathbf{K}({}_0\mathbf{x})\,,$$
$$\mathbf{K} \subset \bar{H}^+ \Leftrightarrow 2\,{}_0\mathbf{x} - {}_1\mathbf{x} \in {}^p\mathbf{K}({}_0\mathbf{x})\,.$$

Der Begriff des sphärisches Bildes $\mathbf{S}_M$ einer abgeschlossenen konvexen Menge $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$ wurde in Arbeit [1] eingeführt, und zwar auf folgende Weise:

Bezeichnet man

$\mathbf{K}_M(\mathbf{x})$ ... der lokale Berührungskegel der Menge $\mathbf{M}$ in ihrem Punkt $\mathbf{x}$,

${}^p\mathbf{K}_M(\mathbf{x})$ ... der Polarkegel zu $\mathbf{K}_M(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}$,

${}^p\mathbf{K}'_M(\mathbf{x})$ ... derjenige Kegel, der aus dem Kegel ${}^p\mathbf{K}_M(\mathbf{x})$ durch eine Translation, die den Punkt $\mathbf{x}$ in den Koordinatenursprung $\mathbf{o}$ in $\mathbf{E}_n$ überführt, entsteht,

so heisst die Menge

$$\mathbf{S}_M = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} {}^p\mathbf{K}'_M(\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q} \tag{1.1}$$

mit

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \tag{1.2}$$

das sphärische Bild von $\mathbf{M}$. In [1] wurde gezeigt, dass für die Abschliessung $\bar{\mathbf{S}}_M$ die Gleichheit

$$\bar{\mathbf{S}}_M = {}^p\mathbf{M}_R \cap \mathbf{Q} \tag{1.3}$$

gilt, wobei ${}^{p}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ der zu dem Recessionskegel $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ der Menge $\boldsymbol{M}$ zugehörige Polarkegel mit $\boldsymbol{o}$ als Scheitel ist. (In der Einleitung der Arbeit [1] wurden die obigen Begriffe ausführlich beschrieben.)

Die Punkte in $\boldsymbol{E}_n$ sollen im folgenden Text z. B. mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$ bezeichnet werden, wobei eine ähnliche Bezeichnung auch für Vektoren in $\boldsymbol{E}_n$ benutzt wird. Der Vektor $\boldsymbol{x}$, bedeutet also den Vektor mit dem Anfangspunkt in $\boldsymbol{o}$ und mit dem Endpunkt $\boldsymbol{x}$.

§2. PUNKTBERÜHRUNG VON KONVEXEN MENGEN

Definition 2.1. *Falls ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ abgeschlossene, konvexe Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ mit*

$$ {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} \neq \emptyset\,, \quad \text{rel. int}\, {}_1\boldsymbol{M} \cap \text{rel. int}\, {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset $$

sind, so sagt man, dass die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ eine Punktberührung in jedem Punkt ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$ besitzen (oder, dass sie sich in jedem Punkt ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$ berühren).

Vereinbarung. Unter den Symbolen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ sollen weiter stets abgeschlossene nichtleere, konvexe Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ gemeint werden.

Satz 2.1. *Falls sich die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ im Punkte ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$ berühren, so gibt es einen Punkt $\boldsymbol{y}$ mit*

$$ \|\boldsymbol{y}\| = 1\,, \quad -\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{{}_1\boldsymbol{M}}\,, \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{{}_2\boldsymbol{M}}\,, $$

wo $\boldsymbol{S}_{{}_i\boldsymbol{M}}$ das sphärische Bild der Menge ${}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ ist.

Beweis. Ist eine der Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$, z. B. ${}_1\boldsymbol{M}$, beschränkt, so gilt $\boldsymbol{S}_{{}_1\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{Q}$ [1]). Wählt man $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{{}_2\boldsymbol{M}}$ beliebig, dann gilt offenbar (wegen $\|\boldsymbol{y}\| = 1$) $-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S}_{{}_1\boldsymbol{M}}$ und es gilt daher die Behauptung des Satzes.

Sind beide Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ unbeschränkt, so gibt es (nach Satz 1.1) eine trennende Hyperebene

$$ \boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}\,, \quad (\|\boldsymbol{y}\| = 1)\,, \tag{2.1} $$

dieser Mengen. O.B.d.A. kann man voraussetzen, dass

$$ {}_1\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^{+}\,, \quad {}_2\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^{-} $$

gilt, wobei

$$ \boldsymbol{H}^{+} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0\}\,, \quad \boldsymbol{H}^{-} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < 0\}\,, \tag{2.2} $$

die der Hyperebene $\boldsymbol{R}$ zugehörigen offenen Halbräume sind. Es gilt also $(\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ für $\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$, $(\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq 0$ für $\boldsymbol{x} \in {}_2\boldsymbol{M}$ und wegen ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$, ergibt sich daraus

$$ \max_{\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}} (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) = ({}_0\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})\,, \quad \max_{\boldsymbol{x} \in {}_2\boldsymbol{M}} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ({}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,. $$

Daraus folgt (nach Satz 4, [1]) $-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{{}_1\boldsymbol{M}}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{{}_2\boldsymbol{M}}$.

[1]) Siehe [1], Satz 1.

Satz 2.2. *Es gelte für die Mengen* ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ *die Beziehung* ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, *und es sei* $\boldsymbol{L}$ *die lineare Hülle von* ${}_1\boldsymbol{M} \cup {}_2\boldsymbol{M}$. *Die Mengen* ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ *berühren sich im Punkt* ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$ *genau dann, wenn es einen Punkt* $\boldsymbol{y}$ $(\|\boldsymbol{y}\| = 1)$ *gibt mit*

$$-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{K_{{}_1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}\,, \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_{K_{{}_2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}\,, \quad {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}\,, \tag{2.3}$$

wobei $\boldsymbol{S}_{K_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}$ *das sphärische Bild des Berührungskegels* $\boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ *der Menge* ${}_i\boldsymbol{M}$ *in ihrem Punkt* ${}_0\boldsymbol{x}$ $(i = 1, 2)$ *ist.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ sich im Punkt ${}_0\boldsymbol{x}$ berühren, wobei wir diese Mengen als Mengen des linearen Unterraumes $\boldsymbol{L}$ betrachten. Nach dem Beweis von Satz 2.1 gibt es einen Punkt $\boldsymbol{y}$ mit $\|\boldsymbol{y}\| = 1$, ${}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ in der Weise, dass die Hyperebene in $\boldsymbol{L}$

$${}'\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L} \mid (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}$$

eine trennende Hyperebene von ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ in $\boldsymbol{L}$ ist. Die Hyperebene $\boldsymbol{R}$ aus (2.1) ist ebenfalls eine trennende Hyperebene von ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ in $\boldsymbol{E}_n$. Es gelte für die Halbräume $\boldsymbol{H}^+$, $\boldsymbol{H}^-$ aus (2.2)

$${}_1\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+\,, \quad {}_2\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^-\,.$$

Da $\boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{P}}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ (siehe Einleitung von Arbeit [1]), ${}_0\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ und ${}_0\boldsymbol{x} \notin$ $\notin$ rel. int ${}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ gilt, so ergibt sich aus der Definition des Projektionskegels $\boldsymbol{P}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$

$$\boldsymbol{K}_{{}_1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+\,, \quad \boldsymbol{K}_{{}_2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \overline{\boldsymbol{H}}^-\,. \tag{2.4}$$

Es gilt daher

$$\max_{\boldsymbol{x} \in K_{{}_1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})} \{(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})\} = ({}_0\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})\,, \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in K_{{}_2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})} \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} = ({}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,,$$

voraus nach Satz 4, [1] dann (2.3) folgt.

Setzt man anderseits die Existenz eines Punktes $\boldsymbol{y}$ mit der Eigenschaft (2.3) voraus, so gilt ebenfalls

$$-\boldsymbol{y} \in \overline{\boldsymbol{S}}_{K_{{}_1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}\,, \quad \boldsymbol{y} \in \overline{\boldsymbol{S}}_{K_{{}_2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}\,,$$

woraus nach (1.3)

$$-\boldsymbol{y} \in {}^p[\boldsymbol{K}_{{}_1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}\,, \quad \boldsymbol{y} \in {}^p[\boldsymbol{K}_{{}_2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}\,, \quad \|\boldsymbol{y}\| = 1\,,$$

und daher auch

$${}_0\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in {}^p[\boldsymbol{K}_{{}_1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x})\,, \quad {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in {}^p[\boldsymbol{K}_{{}_2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x})\,, \quad \|\boldsymbol{y}\| = 1 \tag{2.5}$$

folgt (dabei ist $[\boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x})$ der Recessionskegel des Kegels $\boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$ in seinem Scheitel ${}_0\boldsymbol{x}$). Da nach der Definition eines Recessionskegels (siehe [1], Einleitung) $[\boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$ gilt, so gilt auch ${}^p[\boldsymbol{K}_{{}_i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x}) =$

$= {}^{p}\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$. Daraus und aus (2.5) erhält man

$$ {}_0\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in {}^{p}\boldsymbol{K}_{1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \,, \quad {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in {}^{p}\boldsymbol{K}_{2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \,, $$

und weiter nach Satz 1.2

$$ \boldsymbol{K}_{1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \overline{\boldsymbol{H}}^{+} \,, \quad \boldsymbol{K}_{2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \overline{\boldsymbol{H}}^{-} \,, $$

wo $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{H}^{+}, \boldsymbol{H}^{-}$ die Bedeutung aus (2.1), (2.2) haben. Der Fall $\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{R}$ $(i = 1, 2)$ kann nicht vorkommen, denn es wäre dann $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}$, was wegen $\boldsymbol{y} + {}_0\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{y}$ senkrecht zu $\boldsymbol{R}$, nicht in Frage kommt. Wegen ${}_i\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$, $\dim {}_i\boldsymbol{M} = \dim \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$, gilt dann ${}_1\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^{+}$, ${}_2\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^{-}$, wobei ${}_1\boldsymbol{M} \cup {}_2\boldsymbol{M} \not\subset \boldsymbol{R}$. Die Hyperebene $\boldsymbol{R}$ aus (2.1) ist daher eine trennende Hyperebene von ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ und nach Satz 1.1 gilt dann

$$ \text{rel. int}\; {}_1\boldsymbol{M} \cap \text{rel. int}\; {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset \,, $$

woraus dann mit Hinsicht auf die Annahme ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ nach Definition 2.1 die Tatsache, dass die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ sich im Punkt ${}_0\boldsymbol{x}$ berühren, folgt.

Satz 2.3. *Es haben die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ die Eigenschaft ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, und es sei $\boldsymbol{L}$ die lineare Hülle von ${}_1\boldsymbol{M} \cup {}_2\boldsymbol{M}$. Die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ berühren sich dann im Punkt ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$ genau dann, falls es einen Punkt $\boldsymbol{y}$ mit $\|\boldsymbol{y}\| = 1$, ${}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ in der Weise gibt, dass für die Halbgeraden*

$$ p^{-} \equiv \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}t,\ t \in (-\infty, 0\rangle\} \,, $$

$$ p^{+} \equiv \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}t,\ t \in \langle 0, \infty)\} $$

die Inklusion

$$ p^{-} \subset {}^{p}\boldsymbol{K}_{1\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \,, \quad p^{+} \subset {}^{p}\boldsymbol{K}_{2\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) $$

gilt.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ den Berührungskegel der Menge $\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ in ihrem Punkt $\boldsymbol{x}$ $(i = 1, 2)$. Es gilt dann

$$ \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) \,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \ (i = 1, 2) \,. $$

Da $\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})$ ein konvexer Kegel ist, so gilt

$$ \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}({}_0\boldsymbol{x}) \ (i = 1, 2) \,, \tag{2.6} $$

und wir können schreiben

$$ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) \,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, 2) $$

und es gilt daher auch (siehe [1], Einleitung)

$$ \boldsymbol{K}'_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}({}_0\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{K}'_{\boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) \,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}_{i\boldsymbol{M}}({}_0\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, 2) \,. $$

Daraus folgt

$$ {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})}({}_{0}\mathbf{x}) \supset {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \,, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{K}_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2) $$

und da nach (2.6) ebenfalls ${}^{p}\mathbf{K}'_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) = {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})}({}_{0}\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ gilt, so erhält man

$$ (2.7) \qquad \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x})} {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})}(\mathbf{x}) = {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})}({}_{0}\mathbf{x}) = {}^{p}\mathbf{K}'_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2) \,. $$

Nach (1.2) gilt die Gleichheit

$$ \mathbf{S}_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x})} {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q} \quad (i = 1, 2) $$

und somit, laut (2.7),

$$ (2.8) \qquad \mathbf{S}_{\mathbf{K}_{i}\mathbf{M}({}_{0}\mathbf{x})} = {}^{p}\mathbf{K}'_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q} \quad (i = 1, 2) \,. $$

Die Behauptung des Satzes 2.3 folgt dann daraus aufgrund des Satzes 2.2.

Bemerkung 2.1. Nach dem obigen Satz 2.3 berühren sich die Mengen ${}_{1}\mathbf{M}$, ${}_{2}\mathbf{M}$ im Punkt ${}_{0}\mathbf{x} \in {}_{1}\mathbf{M} \cap {}_{2}\mathbf{M}$ genau dann, falls es eine Gerade

$$ l = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{n} \mid \mathbf{x} = {}_{0}\mathbf{x} + \mathbf{v}t \,, \quad t \in (-\infty, \infty)\} \,, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{o} $$

mit $l \subset \mathbf{L}$ in der Weise gibt, dass eine der Halbgeraden l^1, l^2 mit $l^1 \cup l^2 = l$, $l^1 \cap l^2 = {}_{0}\mathbf{x}$, die Eigenschaft $l^i \subset {}^{p}\mathbf{K}_{i\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ hat.

Satz 2.4. *Falls die Mengen ${}_{1}\mathbf{M}$, ${}_{2}\mathbf{M}$ die Voraussetzung aus Satz 2.3 erfüllen, so berühren sich diese Menge im Punkt ${}_{0}\mathbf{x} \in {}_{1}\mathbf{M} \cap {}_{2}\mathbf{M}$ genau dann, wenn es einen Punkt $\mathbf{y}$ mit*

$$ \|\mathbf{y}\| = 1 \,, \quad {}_{0}\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L} \,, \quad \min_{\mathbf{x} \in {}_{1}\mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = ({}_{0}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in {}_{2}\mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} $$

gibt.

Beweis. Nach (2.8) kann man die Beziehungen (2.3) aus dem Satz 2.2 in der Form

$$ -\mathbf{y} \in {}^{p}\mathbf{K}'_{1\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \,, \quad \mathbf{y} \in {}^{p}\mathbf{K}'_{2\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \,, \quad {}_{0}\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L} \,, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 $$

schreiben und es gilt somit auch

$$ {}_{0}\mathbf{x} - \mathbf{y} \in {}^{p}\mathbf{K}_{1\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \,, \quad {}_{0}\mathbf{x} + \mathbf{y} \in {}^{p}\mathbf{K}_{2\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \,, \quad {}_{0}\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L} \,, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \,. $$

Betrachtet man die Hyperebene $\mathbf{R}$ aus (2.1) und die ihr zugehörigen Halbräume $\mathbf{H}^{+}$, $\mathbf{H}^{-}$ aus (2.2), so gilt nach Satz 1.2

$$ \mathbf{K}_{1\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \subset \overline{\mathbf{H}}^{+} \,, \quad \mathbf{K}_{2\mathbf{M}}({}_{0}\mathbf{x}) \subset \overline{\mathbf{H}}^{-} \,. $$

Dies hat zur Folge

$$ {}_{1}\mathbf{M} \subset \overline{\mathbf{H}}^{+} \,, \quad {}_{2}\mathbf{M} \subset \overline{\mathbf{H}}^{-} \,, $$

und wegen ${}_0\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$, folgt daraus

$$\min_{\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in {}_2\mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} .$$

Durch Anwendung des Satzes 2.2 ergibt sich daraus die Behauptung des Satzes 2.4

Satz 2.5. *Die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ mit der Eigenschaft ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ berühren sich im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$ genau dann, wenn ihre Berührungskegel $\mathbf{K}_{{}_i\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ dieselbe Eigenschaft haben.*

Beweis. Es haben die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$ eine Berührung und es sei $\mathbf{R}$ aus (2.1) die Trennengshyperebene dieser Mengen, $\mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-$ die ihr zugehörigen Halbräume aus (2.2), wobei ${}_1\mathbf{M} \subset \overline{\mathbf{H}}^+$, ${}_2\mathbf{M} \subset \overline{\mathbf{H}}^-$ gilt. Nach (2.4) gilt ebenfalls

$$\mathbf{K}_{{}_1\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x}) \subset \overline{\mathbf{H}}^+ , \quad \mathbf{K}_{{}_2\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x}) \subset \overline{\mathbf{H}}^- .$$

Wegen ${}_i\mathbf{M} \subset \mathbf{K}_{{}_i\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$, kann nicht $\mathbf{K}_{{}_1\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x}) \cup \mathbf{K}_{{}_2\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x}) \subset \mathbf{R}$ gelten und somit ist die Hyperebene $\mathbf{R}$ eine trennende Hyperebene der Kegel $\mathbf{K}_{{}_i\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$. Nach Satz 1.2 ergibt sich daraus

$$\text{rel. int}\, \mathbf{K}_{{}_1\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x}) \cap \text{rel. int}\, \mathbf{K}_{{}_2\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x}) = \emptyset \tag{2.9}$$

und wegen ${}_0\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{{}_i\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$, folgt daraus, mit Hinsicht auf die Definition 2.1, dass die Kegel $\mathbf{K}_{{}_i\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ sich im Punkt ${}_0\mathbf{x}$ berühren.

Berühren sich, anderseits, die Kegel $\mathbf{K}_{{}_i\mathbf{M}}({}_0\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ im Punkt ${}_0\mathbf{x}$, so gilt (2.9) und nach Einleitung der Arbeit [1] ebenfalls

$$\text{rel. int}\, {}_1\mathbf{M} \cap \text{rel. int}\, {}_2\mathbf{M} = \emptyset .$$

Wegen ${}_0\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$ folgt daraus weiter, dass die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ sich im Punkt ${}_0\mathbf{x}$ berühren.

§3. ANWENDUNGEN AUF KONVEXE OPTIMIERUNG

Falls $f(\mathbf{x})$ eine über $\mathbf{E}_n$ konvexe Funktion und $\mathbf{M} \neq \emptyset$ eine gegebene, abgeschlossene, konvexe Menge in $\mathbf{E}_n$ sind, so kann man das folgende (konvexe) Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \{f(\mathbf{x})\} ! \tag{3.1}$$

aufstellen. Im Raum $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_1$, dessen Punkte wir mit $(\mathbf{x}, z)$ bezeichnen, führen wir die Menge

$$\mathfrak{E} = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \leqq z\} . \tag{3.2}$$

Die Menge $\mathfrak{E}$ ist (wegen der Stetigkeit von $f(\mathbf{x})$ über $\mathbf{E}_n$) eine abgeschlossene, konvexe Menge in $\mathbf{E}_{n+1}$, die man üblich als den Epigraphen von $f(\mathbf{x})$ bezüglich $\mathbf{E}_n$ nennt.

Ist das Problem (3.1) lösbar (d. h., wenn es einen Punkt ${}_0\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ mit $f({}_0\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ gibt), so betrachten wir den Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ von $\mathfrak{E}$ [2]) und definieren wir die Menge

$$\mathfrak{M} = \{(\boldsymbol{x}, z) \in \boldsymbol{E}_{n+1} |\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M},\ z = f({}_0\boldsymbol{x})\}\,, \tag{3.3}$$

die ebenfalls eine abgeschlossene, konvexe Menge in $\boldsymbol{E}_{n+1}$ ist.

Satz 3.1. *Der Punkt ${}_0\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n$ stellt einen optimalen Punkt des Problems (3.1) genau dann dar, falls die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ sich im Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x})) \in \boldsymbol{E}_{n+1}$ berühren.*

Beweis. Es sei ${}_0\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n$ ein optimaler Punkt des Problems (3.1). Aus (3.2), (3.3) ergibt sich $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x})) \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{E}$ und daher

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{E} \neq \emptyset\,. \tag{3.4}$$

Es sei $(\boldsymbol{x}', z') \in \text{rel. int}\, \mathfrak{M} \cap \text{rel. int}\, \mathfrak{E}$ beliebig. Wegen $z' > f(\boldsymbol{x}')$ und wegen $f(\boldsymbol{x}') \geqq$ $\geqq f({}_0\boldsymbol{x})$, folgt daraus $z' > f({}_0\boldsymbol{x})$, was im Widerspruch mit (3.3) steht. Es muss daher gelten

$$\text{rel. int}\, \mathfrak{M} \cap \text{rel. int}\, \mathfrak{E} = \emptyset\,. \tag{3.5}$$

Nach Definition 2.1 und aus (3.4), (3.5) folgt, dass die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ sich im Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ berühren.

Falls, anderseits, sich die Mengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{E}$ im Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ berühren, so gelten nach der Definition 2.1 die Aussagen (3.4) und (3.5). Nach Satz 1.1 gibt es dann eine trennende Hyperebene R in $\boldsymbol{E}_{n+1}$ der Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$, die offenbar den Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ enthält,

$$R = \{(\boldsymbol{x}, z) \in \boldsymbol{E}_{n+1} |\ (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (z - f({}_0\boldsymbol{x}))\, y_{n+1} = 0\}\,, \quad (\|\boldsymbol{y}\| + |y_{n+1}| > 0)\,. \tag{3.6}$$

Wäre nun $y_{n+1} = 0$, dann würde die Hyperebene R parallel zu der z-Achse. Dies ist aber ein Widerspruch mit der Tatsache, dass mit jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n$ der Punkt $(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$ dem Epigraphen $\mathfrak{E}$ angehört. Es ist daher

$$y_{n+1} \neq 0\,. \tag{3.7}$$

a) Betrachten wir den Fall $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$.

Man kann die Hyperebene R aus (3.6) durch

$$R = \{(\boldsymbol{x}, z) \in \boldsymbol{E}_{n+1} |\ f({}_0\boldsymbol{x}) - z = (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')\} \quad \left(\boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{y}}{y_{n+1}}\right) \tag{3.8}$$

---

[2]) Der Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ stellt offenbar einen Punkt des Randes $\partial\mathfrak{E}$ des Epigraphen $\mathfrak{E}$, dar.

beschreiben. Wir betrachten weiter die der Hyperebene R zugehörigen Halbräume

$$H^+ = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{n+1} |\ f({}_0\mathbf{x}) - z > (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}')\} ,$$
$$H^- = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{n+1} |\ f({}_0\mathbf{x}) - z < (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}')\} .$$

Da $({}_0\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$ für $z \geqq f({}_0\mathbf{x})$ ist, so folgt daraus unmittelbar

$$\mathfrak{E} \subset \overline{H}^- , \quad \mathfrak{M} \subset \overline{H}^+ .$$

Es gilt daher

$$f({}_0\mathbf{x}) - z \geqq (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') , \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{M}$$

und nach (3.3) weiter

$$(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') \leqq 0 , \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{M} . \tag{3.9}$$

Da auch

$$f({}_0\mathbf{x}) - z \leqq (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') , \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$$

gilt, so ist auch

$$f({}_0\mathbf{x}) - z \leqq (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') , \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{M} , \quad z = f(\mathbf{x})$$

und nach (3.9) folgt daraus

$$f({}_0\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{M} .$$

Wegen ${}_0\mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$, ergibt sich hiemit, dass ${}_0\mathbf{x}$ ein Optimalpunkt des Problems (3.1) ist.

b) Falls $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ ist, so wird die Hyperebene R aus (3.6) durch

$$R = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{n+1} |\ z = f({}_0\mathbf{x})\}$$

beschrieben und bezeichnet man

$$\boldsymbol{H}^+ = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{n+1} |\ z > f({}_0\mathbf{x})\} , \quad \boldsymbol{H}^- = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{n+1} |\ z < f({}_0\mathbf{x})\} ,$$

so folgt daraus und aus (3.2), (3.3) $\mathfrak{E} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+$, $\mathfrak{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^-$. Es gilt also für alle $(\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$ und daher auch für Punkte $(\mathbf{x}, z)$ mit $\mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$, $z = f(\mathbf{x})$ die Ungleichung $f(\mathbf{x}) \geqq f({}_0\mathbf{x})$. Da ${}_0\mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$ ist, so ist ${}_0\mathbf{x}$ ein Optimalpunkt des Problems (3.1).

Anwendung 1. Es seien $f(\mathbf{x})$, $g_r(\mathbf{x})$ $(r = 1, \ldots, m)$ konvexe Funktionen, die auf $\mathbf{E}_n$ stetig differenzierbar sind. Die Menge

$$\boldsymbol{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ g_r(\mathbf{x}) \leqq 0 \ (r = 1, \ldots, m),\ \mathbf{x} \geqq \boldsymbol{0}\} \tag{3.10}$$

ist dann konvex und abgeschlossen. Wir setzen voraus, dass $\dim \boldsymbol{M} = n$ und dass die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ sich im Punkt $({}_0\mathbf{x}, f({}_0\mathbf{x}))$ berühren. Um den Satz 2.3 anwenden zu können, werden wir zuerst die Berührungskegel von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ aus (3.2) und (3.3) im Punkt $({}_0\mathbf{x}, f({}_0\mathbf{x})) \in \mathbf{E}_{n+1}$ beschreiben. Der Berührungskegel des Epigraphen $\mathfrak{E}$

in seinem Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ wird durch

$$\boldsymbol{K}_{\mathfrak{G}}({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x})) = \left\{(\boldsymbol{x}, z) \in \boldsymbol{E}_{n+1} \,\middle|\, z \geqq f({}_0\boldsymbol{x}) + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) \,.\, (x_\alpha - {}_0x_\alpha)\right\}$$

beschrieben und somit gilt

$$(3.11) \qquad {}^{p}\boldsymbol{K}_{\mathfrak{G}}({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x})) =$$

$$= \left\{(\boldsymbol{x}, z) \in \boldsymbol{E}_{n+1} \,\middle|\, x_\alpha = {}_0x_\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) \,.\, t,\ z = f({}_0\boldsymbol{x}) - t,\ t \geqq 0\right\}.$$

Um den Berührungskegel der Menge $\mathfrak{M}$ im Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ zu beschreiben, werden wir zwei in Frage kommende Fälle unterscheiden:

a) ${}_0\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} \boldsymbol{M}$.

Es gilt hier $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x})) \in \operatorname{rel.int} \mathfrak{M}$, $\dim \mathfrak{M} = \dim \boldsymbol{M} = n$ und $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{M}}({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x})) = L$, wobei L die lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ ist. Die Menge ${}^{p}\boldsymbol{K}_{\mathfrak{M}}({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ ist daher eine mit der z-Achse parallele Gerade, die zugleich (nach Satz 2.3 und nach (3.11)) in Richtung des Vektors $(\partial f/\partial x_1({}_0\boldsymbol{x}), \ldots, \partial f/\partial x_n({}_0\boldsymbol{x}), -1)$ gerichtet ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

d. h., es gilt das bekannte Kriterium für die Optimalität in einem inneren Punkt der fraglichen Menge.

b) ${}_0\boldsymbol{x} \in \partial \boldsymbol{M}$.

Definieren wir

$$I_1 = \{r \in \{1, \ldots, m\} \mid g_r({}_0\boldsymbol{x}) = 0\}, \quad I_2 = \{\alpha \in \{1, \ldots, n\} \mid {}_0x_\alpha = 0\}.$$

Der Berührungskegel $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{M}}({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ von $\mathfrak{M}$ im Punkt $({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ ist dann durch

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g_r}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) \,.\, (x_\alpha - {}_0x_\alpha) \leqq 0 \ (r \in I_1), \quad x_\alpha - {}_0x_\alpha \geqq 0 \ (\alpha \in I_2), \quad z = f({}_0\boldsymbol{x})$$

beschrieben. Für den Polarkegel ${}^{p}\boldsymbol{K}_{\mathfrak{M}}({}_0\boldsymbol{x}, f({}_0\boldsymbol{x}))$ gilt dann (in seinen Punkten $(\boldsymbol{x}, z)$)

$$x_\alpha = {}_0x_\alpha + \sum_{r \in I_1} u_r \frac{\partial g_r}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) - \sum_{\beta \in I_2} u_\beta \delta_\beta^\alpha, \quad u_r, u_\beta \geqq 0 \ (r \in I_1,\ \beta \in I_2) \quad (z\text{-beliebig}).$$

Nach Satz 2.3 folgt daraus

$$-\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) = \sum_{r \in I_1} u_r \frac{\partial g_r}{\partial x_\alpha}({}_0\boldsymbol{x}) - \sum_{\beta \in I_2} u_\beta \delta_\beta^\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

aber dies sind eben die bekannte lokalen Kuhn-Tucker Bedingungen für die Optimalität des Punktes ${}_0\boldsymbol{x}$ für das Problem (3.1).

Anwendung 2. Nach Satz 2.4 haben die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ eine Berührung im Punkt $({}_0\mathbf{x}, f({}_0\mathbf{x}))$ genau dann, wenn es ein $\mathbf{y}^* \in E_{n+1}$, $\|\mathbf{y}^*\| = 1$, $\mathbf{y}^* = (\mathbf{y}, y_{n+1})$ [3]) in der Weise gibt, dass

$$(3.12) \qquad \min_{\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + z y_{n+1}\} = \{({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}\} = \max_{\mathfrak{E}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + z y_{n+1}\}$$

(wobei auch die Symbole $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$ vertauscht werden können). Wir überführen nun die Beziehung (3.12) auf eine äquivalente. Dazu setzen wir zuerst woraus, dass (3.12) gilt und wir unterscheiden hier zwei Fälle:

a) Fall $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$.

Aus (3.12) folgt laut (3.2) und (3.3)

$$(3.13) \qquad (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq 0\,, \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$$

und weiter nach (3.13) (und aus der Tatsache, dass der Punkt $({}_1\mathbf{x}, {}_1z)$ mit ${}_1\mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$, ${}_1z > f({}_0\mathbf{x})$ die Eigenschaft $({}_1\mathbf{x}, {}_1z) \in \mathfrak{E}$ hat) die Ungleichung $y_{n+1} \leqq 0$. Nach (3.7) ist dann $y_{n+1} < 0$. Wir können daher die Gleichheit

$$\{({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}\} = \max_{\mathfrak{E}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + z y_{n+1}\}$$

aus (3.12) in der Form

$$(3.14) \qquad \min_{\mathfrak{E}} \{(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') + z\} = f({}_0\mathbf{x}) \quad \left(\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{y}}{y_{n+1}}\right)$$

schreiben. Da die Funktion $(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') + z$ eine in ihren Variablen lineare Funktion auf $\boldsymbol{E}_{n+1}$ und $\mathfrak{E}$ eine konvexe Menge ist, so kommt ein Extremum dieser Funktion auf dem Rand von $\mathfrak{E}$, vor. Daraus und nach (3.14) ergibt sich

$$(3.15) \qquad \min_{\mathfrak{E}} \{(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') + f(\mathbf{x})\} = \min_{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n} \{(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') + f(\mathbf{x})\} = f({}_0\mathbf{x})$$

$$\left(\text{mit } \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{y}}{y_{n+1}}\,, \quad y_{n+1} < 0\right).$$

b) Fall $\mathbf{y} = \mathbf{o}$.

Aus (3.12) ergibt sich nach (3.2)

$$f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1} \geqq z y_{n+1}\,, \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}\,,$$

und weiter $y_{n+1} \leqq 0$. Wegen (3.7) folgt dann daraus $y_{n+1} < 0$. Es gilt daher $f({}_0\mathbf{x}) \leqq$ $\leqq z$ für $(\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$, d. h. $\min_{\mathfrak{E}} \{z\} = f({}_0\mathbf{x})$. Es gilt also

$$(3.16) \qquad \min_{\mathfrak{E}} \{f(\mathbf{x})\} = \min_{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n} \{f(\mathbf{x})\} = f({}_0\mathbf{x})\,.$$

Die Beziehung (3.12) haben wir daher im Fall $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ auf die Beziehungen (3.13), (3.15), im Fall $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ auf die Beziehung (3.16) überführt.

---

[3]) Wegen $\dim \mathfrak{E} = n + 1$, fällt die Bedingung ${}_0\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \boldsymbol{L}$ vom Satz 2.4 weg.

Es gelten anderseits $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ und die Beziehung (3.13), (3.15). Aus (3.15) folgt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}') + f(\mathbf{x}) \geqq ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') + f({}_0\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n .$$

Für die Punkte $(\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$ ergibt sich daraus

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}') + z \geqq ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}') + f({}_0\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$$

und setzt man $\mathbf{y}' = \mathbf{y}/y_{n+1}$ mit $y_{n+1} < 0$ ein, so erhält man

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + zy_{n+1} \leqq ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}, \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E},$$

d. h.

(3.17) $$\max_{\mathfrak{E}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + zy_{n+1}\} = \{({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}\}.$$

Aus (3.13) erhält man nach (3.3)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + y_{n+1}(f({}_0\mathbf{x}) - z), \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{M},$$

d. h.

(3.18) $$\min_{\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + zy_{n+1}\} = \{({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}\}.$$

Falls $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ und (3.16) gilt, so ist

$$f(\mathbf{x}) \geqq f({}_0\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$$

und daher auch $f(\mathbf{x})\, y_{n+1} \leqq f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}$ für $y_{n+1} < 0$ und für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$. Wegen $\mathbf{y} = \mathbf{o}$, folgt daraus

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x})\, y_{n+1} \leqq ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n .$$

Für die Punkte $(\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E}$ erhält man daraus nach (3.2)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + zy_{n+1} \leqq ({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}, \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{E},$$

d. h.

(3.19) $$\max_{\mathfrak{E}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + zy_{n+1}\} = \{({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}\}.$$

Da laut (3.3) und wegen $\mathbf{y} = \mathbf{o}$

$$(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (z - f({}_0\mathbf{x}))\, y_{n+1} = 0, \quad (\mathbf{x}, z) \in \mathfrak{M}$$

gilt, so gilt auch

(3.20) $$\min_{\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + zy_{n+1}\} = \{({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f({}_0\mathbf{x})\, y_{n+1}\}.$$

Hiemit haben wir die Äquivalenz der Bedingungen (3.12) mit denjenigen aus (3.13), (3.15) (im Fall $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$), bzw. mit der Bedingung (3.16) (im Fall $\mathbf{y} = \mathbf{o}$) bewiesen.

Nach Satz 2.4 und 3.1 ist ein Punkt ${}_0\mathbf{x}$ ein optimaler Punkt des Problems (3.1) genau dann, wenn entweder

a) das Problem $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_n} f(\mathbf{x})$ ist lösbar und es gilt $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_n} f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x})$, oder

b) es gibt ein $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ in der Weise, dass das Problem

$$\min_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_n} \{(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x})\}$$

lösbar, mit $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_n} \{(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x})\} = f({}_0\mathbf{x})$ ist und $(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ gilt.

Beispiel. Betrachten wir das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}\in \mathbf{M}} \{f(\mathbf{x})\} \; !$$

mit

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2\,, \quad \mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_2 |\; 2x_1 - x_2 \geqq 2\}\,.$$

Offenbar ist $f(\mathbf{x})$ eine über $\mathbf{E}_2$ konvexe Funktion und die Menge $\mathbf{M}$ ist nichtleer, konvex und abgeschlossen. Nach dem Überlegungen aus der obigen Anwendung 2 ist das gegebene Problem genau dann lösbar, falls entweder

a) gibt es ein $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ in der Weise, dass $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_n} \{(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x})\}$ lösbar ist und $(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ gilt, oder,

b) $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_n} \{f(\mathbf{x})\} = f({}_0\mathbf{x})$, ${}_0\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ ist.

Man sieht sofort, dass in unserem konkreten Fall die Möglichkeit b) nicht in Frage kommt. Wir werden uns dem Fall a) zu und bezeichnen

$$^*f = (\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1y_1 + x_2y_2 - {}_0x_1y_1 - {}_0x_2y_2\,.$$

Setzt man

$$\frac{\partial {}^*f}{\partial x_1} = 2x_1 + y_1 = 0\,, \quad \frac{\partial {}^*f}{\partial x_2} = 2x_2 + y_2 = 0$$

so ist der Punkt

$$^*x_1 = -\frac{y_1}{2}\,, \quad ^*x_2 = -\frac{y_2}{2}$$

die Lösung des Problems $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_2} \{^*f\}!$.

Die zweite Bedingung $(\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ reduziert sich in unserem Fall auf die Bedingung

$$\begin{aligned} &x_1y_1 + x_2y_2 - {}_0x_1y_1 - {}_0x_2y_2 \geqq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \text{ mit} \\ &2x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad\quad -2 \geqq 0\,. \end{aligned}$$

Durch Vergleich folgt daraus $y_1 = 2k$, $y_2 = -k$, ${}_0x_1y_1 + {}_0x_2y_2 = 2k$. Daraus weiter $2\,{}_0x_1 - {}_0x_2 = 2$. Es gilt also

$$^*x_1 = -k\,, \quad ^*x_2 = \frac{k}{2}$$

und aus der Gleichheit $^*f(^*\mathbf{x}) = f({}_0\mathbf{x})$ ergibt sich durch einfache Berechnung die Bedingung

$$-\tfrac{5}{4}k^2 - 2k\,{}_0x_1 + k\,{}_0x_2 = {}_0x_1^2 + {}_0x_2^2\,.$$

Wegen der obigen Gleichung ${}_0x_2 = 2\,{}_0x_1 - 2$, erhält man durch Ellimination die quadratische Gleichung $5\,{}_0x_1^2 - 8\,{}_0x_1 + (\tfrac{5}{4}k^2 + 2k + 4) = 0$ mit der Lösung

$${}_0x_1 = \frac{8 \pm 2\sqrt{(16 - 5(\tfrac{5}{4}k^2 + 2k + 4))}}{10}\,.$$

Offenbar können wir uns (wegen der obigen Bedeutung des Faktors k) auf den Fall, wo die Lösung ${}_0x_1$ eindeutig ist, d. h. auf den Fall

$$16 - 5(\tfrac{5}{4}k^2 + 2k + 4) = 0$$

einschränken, woraus $k = -4/5$ folgt. Es ist daher ${}_0x_1 = 4/5$, ${}_0x_2 = -2/5$ der gesuchte Optimalpunkt.

Literatur

[1] *L. Grygarová:* Sphärische Abbildung konvexer abgeschlossenen Mengen in $\mathbf{E}_n$ und ihre charakteristische Eigenschaften. Apl. mat. 2 (1978), 115—131.

[2] *В. Г. Болтянский:* Метод шатров в теории экстремальных задач. Успехы математических наук. Москва 1975, т. XXX, вып. 3 (183).

[3] *R. T. Rockafellar:* Convex analysis. Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1972.

[4] *J. Stoer, Ch. Witzgall:* Convexity and Optimization in Finite Dimension I. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

Souhrn

O BODOVÉM DOTYKU KONVEXNÍCH MNOŽIN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

V práci jsou odvozeny určité nutné a postačující podmínky pro bodový styk dvou uzavřených konvexních množin, které jsou ekvivalentní s určitými podmínkami pro optimalitu bodu při daném konvexním optimalisačním problému. Jsou uvedeny dvě aplikace bodového styku, z nichž je patrný význam tohoto pojmu pro konvexní programování.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Libuše Grygarová,* CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.