Jaroslav Chudý

Geometrische Synthese der Bewegung bei gegebener Polkonfiguration

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 6, 447–456

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103612`

GEOMETRISCHE SYNTHESE DER BEWEGUNG BEI GEGEBENER POLKONFIGURATION

JAROSLAV CHUDÝ

(Eingegangen am 11. März 1975)

1. PROBLEMSTELLUNG

In diesem Beitrag will ich auf meine Arbeit [1] anknüpfen, in der ich ebene Bewegungen

$$z = m(\vartheta) + \xi\Theta\,, \quad \Theta = \exp j\vartheta$$

untersucht habe, die analytisch im Intervall $I(\vartheta)$ sind und bei welchen drei aufeinanderfolgende Rastpole im ganzen Intervall der Bedingung

$${}^{k+2}z - {}^{k+1}z = a\,.\,\left({}^{k+1}z - {}^{k}z\right)$$

genügen; hier bedeutet k eine natürliche Zahl und a eine beliebige komplexe Konstante[1]).

Nun will ich ebene Bewegungen untersuchen, die analytisch im Intervall $I(\vartheta)$ sind und bei welchen drei aufeinanderfolgende Rastpole im ganzen Intervall $I(\vartheta)$ der Bedingung

$$(1) \qquad {}^{k+2}z - {}^{k+1}z = f(\vartheta)\,.\,\left({}^{k+1}z - {}^{k}z\right)$$

genügen; hier bedeutet k eine natürliche Zahl, $f(\vartheta)$ eine gegebene komplexe Funktion der reellen Variablen ϑ, die im Intervall $I(\vartheta)$ weiter brauchbare Forderungen erfüllt.

Die Eigenschaft (1) führt auf eine komplexe lineare und homogene Differentialgleichung $(k + 2)$-ter Ordnung für die Funktion $m(\vartheta)$ — des sogenannten kinematischen Parameters — in Form von

$$(2) \qquad m^{(k+2)} - j(1 + f)\, m^{(k+1)} - f\,.\, m^{(k)} = 0\,,$$

[1]) Ich bitte den Leser, der mit der Benutzung der komplexen Symbolik nicht vertraut ist, die Einführung in der zitierten Arbeit [1] durchzulesen; ausführlich siehe [2], Seite 153—160.

wo wegen Kürze die Bezeichnung des Argumentes ϑ in den Funktionen $m(\vartheta)$, $f(\vartheta)$ ausgelassen wurde. Die Funktion $f(\vartheta)$ möge solche Bedingungen genügen, damit für jede Wahl von Anfangsbedingungen für jedes $\vartheta_0 \in I(\vartheta)$ die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (2) garantiert sind.

Aus der S-Invarianz von ${}^k z$ (bezüglich der Koordinatentransformation in der Rastebene (S)) folgt die S-Invarianz der Eigenschaft (1).

Wir eliminieren aus unseren Betrachtungen zuerst diejenigen Bewegungen, bei welchen ${}^k z = {}^{k+1} z$ im ganzen Intervall $I(\vartheta)$; in diesem Fall folgt aus (1), dass ${}^{k'} z = {}^k z$ für alle natürlichen Zahlen $k' > k$, sodass es sich um Bewegungen handelt, bei welchen in jeder Phase die Rastpole von der Ordnung $k' > k$ mit dem Pol ${}^k z$ zusammenfallen. Auch diejenigen Phasen, für die $f(\vartheta) = 0$ und die durch das Zusammenfallen der Rastpole von der Ordnung $k' > k + 1$ mit dem Pol ${}^{k+1} z$ charakterisiert sind, lassen wir beiseite.

Wir fragen zuerst nach der Möglichkeit, ob Eigenschaft (1) für alle $k' > k$ gültig sein kann – in diesem Fall sprechen wir kurz von der Invarianz von (1) bezüglich k – danach untersuchen wir die Frage nach der Existenz der Bewegung mit der Eigenschaft (1) und schliesslich für den Fall $k = 1$ führen wir die geometrische Synthese der Bewegung in Form eines äquivalenten Rollens durch und zeigen einige Beispiele für die spezielle Wahl der Funktion $f(\vartheta)$ an. Die Eigenschaft (1) bezeichnen wir als Konfigurationseigenschaft (im oben angeführten Sinne) und die Funktion $f(\vartheta)$ nennen wir Konfigurationsfunktion.

2. INVARIANZ VON (1) BEZÜGLICH k

In diesem Fall muss die Konfigurationseigenschaft (1), die für gegebenes k gilt, auch für alle $k' > k$ erfüllt sein, d. h. auch für $k + 1$. Dann gilt

$$m^{(k+3)} - j(1 + f)\, m^{(k+2)} - f m^{(k+1)} = 0\,. \tag{3}$$

Die Differentiation von (2) ergibt aber die Gleichung

$$m^{(k+3)} - j(1 + f)\, m^{(k+2)} - (jf' + f)\, m^{(k+1)} - f' m^{(k)} = 0\,.$$

Soll diese mit der Gleichung (3) identisch sein, dann muss

$$f' \,.\, (m^{(k+1)} - j m^{(k)}) = 0$$

gelten. Daraus folgt entweder

$$f' = 0 \Rightarrow f = \text{konst. (dies wurde in der Arbeit [1] durchgeführt)}\,,$$

oder

$$m^{(k+1)} - j m^{(k)} = 0$$

mit der Lösung

(4) $$m = P_{k-1} + \gamma_k \Theta\,,$$

wobei

$$P_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \vartheta^i\,, \quad \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \quad \text{sind beliebige komplexe Konstanten}\,.$$

Die entsprechende Bewegung ist nach der Wahl der Systeme S und Σ durch die Gleichung

$$z = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \vartheta^i + \zeta\Theta \quad \text{für} \quad k > 1$$

(dazu siehe näher [2] auf Seite 63–65) und

$$z = \zeta\Theta \quad \text{für} \quad k = 1$$

(dieser Fall stellt eine Rotation dar) repräsentiert.

Die in diesem Abschnitt betrachteten Fälle schliessen wir als trivial aus der weiteren Betrachtungen aus.

3. EXISTENZ DER BEWEGUNG MIT EIGENSCHAFT (1)

Man zeigt ohne Mühe, dass die Gleichung (2) die partikuläre Lösung m_1, für die $m_1^{(k)} = \Theta$ gilt, d. h. also $m_1 = P_{k-1} + j^{-k}\Theta$, besitzt. Mit Hilfe dieser partikulären Lösung, die zu den in Abs. 2 ausgeschiedenen Bewegungen führt, kann auf Grund der bekannten Substitution $m^{(k)} = \Theta \,.\, h(\vartheta)$ die Ordnung der Gleichung (2) erniedert werden und (2) geht in die Gleichung

$$h'' - j(f-1)\,h' = 0$$

über. Ihre Lösung ist

$$h = c_1 + c_2 \int \left(\exp j \int (f-1)\,\mathrm{d}\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta\,,$$

wobei c_1, c_2 beliebige komplexe Konstanten sind, sodass

$$m^{(k)} = \Theta \,.\, \left(c_1 + c_2 \int \left(\exp j \int (f-1)\,\mathrm{d}\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta\right).$$

Daraus folgt durch k-fache Integration die allgemeine Lösung der Gleichung (2)

(5) $$m = P_{k-1} + \gamma_k \underbrace{\int \ldots \int}_{k} \left(\Theta \int \left(\exp j \int (f-1)\,\mathrm{d}\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta^k + \gamma_{k+1}\Theta\,,$$

wobei wieder P_{k-1} dieselbe Bedeutung wie in Abs. 2 hat. Damit ist gezeigt, dass für jede nichtkonstante Konfigurationsfunktion f und für jede natürliche k die Bewegung mit der Eigenschaft (1) existiert und dass ihre Repräsentation nach Wahl der Systeme S und Σ durch die Gleichung

$$z = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \vartheta^i + \gamma_k \underbrace{\int \ldots \int}_{k} \Theta \left(\int \left(\exp j \int (f - 1) \, d\vartheta \right) d\vartheta \right) d\vartheta^k + \zeta \Theta \tag{6}$$

für $k > 1$ und

$$z = \gamma_1 \int \Theta \left(\int \left(\exp j \int (f - 1) \, d\vartheta \right) d\vartheta \right) d\vartheta \tag{7}$$

für $k = 1$ gegeben ist. Dabei setzen wir voraus, dass in (6) $\gamma_k \neq 0$ und in (7) $\gamma_1 \neq 0$ ist; anderenfalls kämen wir zu den in Abs. 2 ausgeschiedenen Fällen.

4. SYNTHESE DER BEWEGUNG IM FALLE $k = 1$

Im Falle $k = 1$ ist die Bewegung durch die Gleichung (7) repräsentiert, in dem vom Standpunkt der kinematischen Synthese $\gamma_1 = 1$ gesetzt werden kann; die Bewegung ist dann durch die Gleichung

$$z = \int \Theta \left(\int \left(\exp j \int (f - 1) \, d\vartheta \right) d\vartheta \right) d\vartheta + \zeta \Theta \tag{8}$$

repräsentiert. Die ersten Polbahnen dieser Bewegung sind

$$^1C \equiv z = j \int \left(\exp j \int f \, d\vartheta \right) d\vartheta \,, \tag{9}$$

$$^1\Gamma \equiv \zeta = j \int \left(\exp j \int (f - 1) \, d\vartheta \right) d\vartheta \,.$$

Konstruieren wir nun die Funktion $\varphi(\vartheta)$, die mit der Funktion $f(\vartheta)$ durch die Beziehung

$$\varphi = \exp j \int f \, d\vartheta \,, \quad \text{d. h.} \quad f = -\frac{j\varphi'}{\varphi} \tag{10}$$

bzw.

$$\varphi = \Theta \exp j \int f \, d\vartheta \,, \quad \text{d. h.} \quad f = -1 - \frac{j\varphi'}{\varphi} \,, \tag{11}$$

zusammenhängt, dann sind die Gleichungen der ersten Polbahnen von der Form

$$^1C \equiv z = j \int \varphi \, d\vartheta \,; \quad ^1\Gamma \equiv \zeta = j \int \varphi \bar{\Theta} \, d\vartheta \tag{12}$$

bzw.

$$^1C \equiv z = j\int \varphi\bar{\Theta}\,\mathrm{d}\vartheta\,; \quad ^1\Gamma \equiv \zeta = j\int \varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,. \tag{13}$$

Die Bewegungen mit den Polbahnen (12), bzw. (13) sind zueinander invers bei derselben Wahl von $\varphi(\vartheta)$. Wir beschränken uns deshalb auf die mit der Konfigurationsfunktion $f(\vartheta)$ durch die Beziehung (10) verbundenen Funktion $\varphi(\vartheta)$, d. h. auf die Bewegung mit den Polbahnen (12). Für den kinematischen Parameter $m(\vartheta)$ gilt in diesem Falle

$$m(\vartheta) = \int \Theta\left(\int \bar{\Theta}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta\,. \tag{14}$$

Die Funktion $\varphi(\vartheta)$, sowie auch die Konfigurationsfunktion $f(\vartheta)$ können wir auf den Krümmungen ^1k, $^1\varkappa$ der beiden Polbahnen ^1C und $^1\Gamma$ interpretieren. Aus der fundamentalen Gleichung für das Rollen (siehe [2], Seite 39)

$$^1k - {}^1\varkappa = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}^1s} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}^1\sigma}$$

ausgehend, erhalten wir

$$\operatorname{mod}\varphi = \frac{1}{|^1k - {}^1\varkappa|}\,. \tag{15}$$

Ferner folgt aus der Beziehung für den Tangentenwinkel τ_S der ersten Rastpolbahn mit der ersten Achse S

$$\tau_S = \arg{}^1z' = \arg j\varphi = \frac{\pi}{2} + \arg\varphi\,,$$

dass

$$^1k = \frac{\mathrm{d}\tau_S}{\mathrm{d}^1s} = \frac{\mathrm{d}\tau_S}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}^1s} = (\arg\varphi)'\,(^1k - {}^1\varkappa)$$

gilt, woraus

$$\arg\varphi = \int \frac{^1k}{^1k - {}^1\varkappa}\,\mathrm{d}\vartheta \tag{16}$$

folgt. Die Funktion $\varphi(\vartheta)$ kann demnach mittels der Krümmungen ^1k, $^1\varkappa$ der beiden ersten Polbahnen in der Form

$$\varphi = \frac{1}{|^1k - {}^1\varkappa|}\exp j\int \frac{^1k}{^1k - {}^1\varkappa}\,\mathrm{d}\vartheta \tag{17}$$

ausgedrückt werden. Für die Konfigurationsfunktion $f(\vartheta)$ erhalten wir dann

$$\operatorname{Re}f = \frac{^1k}{^1k - {}^1\varkappa}\,, \quad \operatorname{Im}f = (\ln|^1k - {}^1\varkappa|)'\,. \tag{18}$$

Die Funktionen f und φ sind auf Grund der Beziehungen (17) und (18) interpretiert. Die Beziehung (17) erlaubt die Bewegung, die durch die Krümmungen ${}^1k(\vartheta)$, ${}^1\varkappa(\vartheta)$, in der Form von reellen Funktionen des Argumentes ϑ gegeben sind, auszudrücken; die Gleichung der beiden Polbahnen sind durch die Gleichung (12) gegeben und der kinematische Parameter der Bewegung ist durch die Gleichung (14) ausgedrückt.

5. EINIGE SPECIALBEISPIELE

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Spezialbewegungen, die durch solche Funktionen $\varphi(\vartheta)$ gegeben sind, die eine einfache Ermittlung der Integrale in der Gleichungen (12) und Aufstellung der Gleichungen der beiden ersten Polbahnen ermöglichen.

a) Sei $\varphi(\vartheta) = \sin \varkappa\vartheta$, $\varkappa \neq 0$, $\varkappa = \bar{\varkappa} =$ konst.

Dann ist

$$f(\vartheta) = -j\varkappa \operatorname{cotg} \varkappa\vartheta\,, \quad \varkappa\vartheta \in (0; \pi)\,.$$

α) Betrachten wir zuerst den Fall $\varkappa = 1$. Dann ist

$$f(\vartheta) = -j \operatorname{cotg} \vartheta\,, \quad \vartheta \in (0; \pi)\,.$$

Der kinematische Parameter der Bewegung ist

$$m = \int \Theta \left(\int \bar{\Theta} \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\vartheta = \tfrac{1}{2}\Theta(-j - \vartheta) - \tfrac{1}{4}j\bar{\Theta}$$

und die Polbahnen der Bewegung sind

$${}^1C \equiv z = -j \cos \vartheta\,; \quad {}^1\Gamma \equiv \zeta = \tfrac{1}{2}\vartheta - \tfrac{1}{4}\bar{\Theta}^2\,.$$

Die erste Rastpolbahn stellt eine Strecke und die erste Gangpolbahn eine gewöhnliche Zykloide dar. Die Situation in der Phase $\vartheta \to 0$ ist in Abb. 1 dargestellt. Für diese Bewegung ist der k-te Rastpol durch die Beziehung

$$k_z = -\tfrac{1}{2}jk\Theta - \tfrac{1}{4}j(1 - (-1)^k)\,\bar{\Theta}$$

gegeben. Wegen

$${}^{k+2}z - {}^{k}z = -j\Theta \quad \text{für} \quad k \geqq 1$$

liegen die Rastpole derselben Parität in der Phase ϑ auf derselben Geraden, wobei die Trägergeraden der Polen beider Paritäten parallel sind. Die Situation in der Phase $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ ist in Abb. 2 dargestellt.

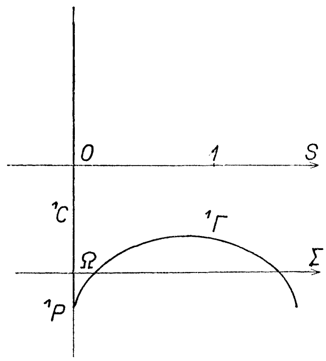
β) Für $0 < |\varkappa| \neq 1$ ist

$$m = \frac{j}{2\varkappa}\left(\frac{1}{\varkappa - 1}\exp j\varkappa\vartheta - \frac{1}{\varkappa + 1}\exp\left(-j\varkappa\vartheta\right)\right)$$

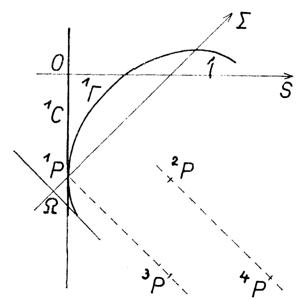
und die Polbahnen der Bewegung sind

$$^1C \equiv z = -\frac{j}{\varkappa}\cos\varkappa\vartheta$$

$$^1\Gamma \equiv \zeta = -\frac{j}{2}\left(\frac{\exp j(\varkappa - 1)\,\vartheta}{\varkappa - 1} + \frac{\exp\left(-j(\varkappa + 1)\,\vartheta\right)}{\varkappa + 1}\right).$$



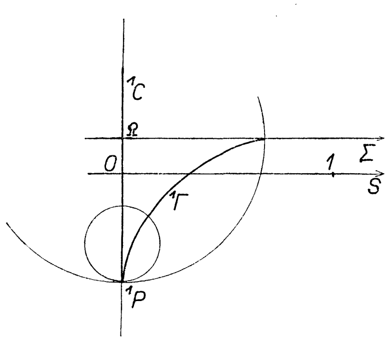
Obr. 1.



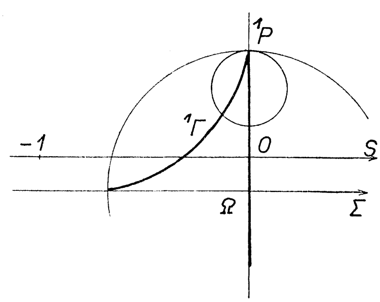
Obr. 2.

Die erste Rastpolbahn stellt eine Strecke dar und die erste Gangpolbahn ist für $|\varkappa| > 1$ eine Hypozykloide mit den Radien der Kreislinien

$$R = \frac{|\varkappa|}{\varkappa^2 - 1}, \quad r = \frac{1}{2(1 + |\varkappa|)},$$



Obr. 3a.

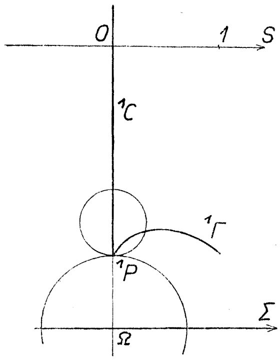


Obr. 3b.

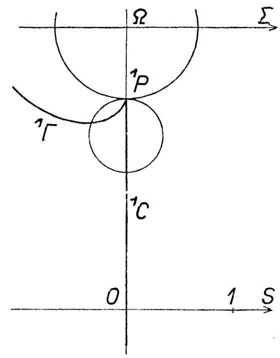
siehe Abb. 3a (für $\varkappa = 2$) und 3b (für $\varkappa = -2$), beides für die Phase $\vartheta \to 0$, und für $0 < |\varkappa| < 1$ eine Epizykloide mit der Radien der Kreislinien

$$R = \frac{|\varkappa|}{1 - \varkappa^2}, \quad r = \frac{1}{2(1 + |\varkappa|)},$$

siehe Abb. 4a (für $\varkappa = \frac{1}{2}$) und 4b (für $\varkappa = -\frac{1}{2}$), beides für die Phase $\vartheta \to 0$.



Obr. 4a.



Obr. 4b.

b) Die Wahl $\varphi = \sinh \varkappa\vartheta$, $\varkappa \neq 0$, führt zur Bewegung mit den Polbahnen

$$^1C \equiv z = \frac{j}{\varkappa} \cosh \varkappa\vartheta$$

$$^1\Gamma \equiv \zeta = \frac{j}{2}\,\bar{\Theta}\left(\frac{\exp \varkappa\vartheta}{\varkappa - j} + \frac{\exp(-\varkappa\vartheta)}{\varkappa + j}\right).$$

Die erste Rastpolbahn stellt eine Halbgerade und die erste Gangpolbahn eine Pseudozykloide (betreffs dieser siehe [3], Seite 119–123) dar.

c) Sei $\varphi = \vartheta^n\Theta$, $\quad \vartheta \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, n natürlich.
Dann ist

$$f(\vartheta) = 1 - \frac{jn}{\vartheta},$$

der kinematische Parameter ist

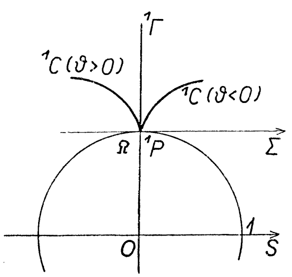
$$m = \frac{1}{n+1}\int \vartheta^{n+1}\Theta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{n+1}\,\Theta j^n \sum_{i=0}^{n+1} j^{-i} \frac{(n+1)!}{i!}\,\vartheta^i,$$

und die Polbahnen des äquivalenten Rollens sind

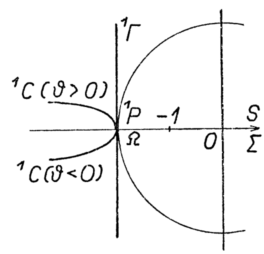
$$^1C \equiv z = n!\, \Theta j^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} j^{-i} \frac{\vartheta^{i-1}}{(i-1)!},$$

$$^1\Gamma \equiv \zeta = \frac{1}{n+1} j \vartheta^{n+1}.$$

Die erste Rastpolbahn ist gleich der n-ten Kreisevolvente mit dem Radius des Grundkreises $r = n!$ und dem Anfangspunkt im Punkte $(n!\, j^n)$. Die erste Gangpolbahn ist für gerades n eine Gerade (die zweite Koordinatenachse Σ) und für ungerades n eine Halbgerade (die zweite positive Halbsache Σ). In den Abb. 5 und 6 ist der Fall für $n = 1$ und $n = 2$ in der Phase $\vartheta \to 0$ dargestellt.



Obr. 5.



Obr. 6.

Literaturverzeichnis

[1] *Chudý J.*, Beitrag zur kinematischen Synthese bei gegebener Polkonfiguration, Aplikace matematiky, *19* (1974), ČSAV, Praha.

[2] *Pírko Z.*, Úvod do kinematické geometrie, SNTL, Praha, 1968.

[3] *Loria, G.*, Ebene Kurven II, 1910.

Souhrn

GEOMETRICKÁ SYNTÉZA POHYBU PŘI DANÉ PÓLOVÉ KONFIGURACI

JAROSLAV CHUDÝ

V příspěvku jsou vyšetřovány komplanární pohyby, mající předepsanou pólovou konfiguraci té vlastnosti, že pro tři po sobě následující pevné póly platí podmínka (1) obsahující tzv. konfigurační funkci f. Po vyloučení triviálních případů je ukázána

existence takových pohybů a nalezena jejich representace. Pro případ, kdy jde o první tři póly, je provedena geometrická syntéza těchto pohybů tak, že jsou vyšetřeny rovnice obou prvních polhodií; kromě toho je nalezen vztah mezi křivostmi těchto polhodií a konfigurační funkcí. Pro týž případ a pro některé volby konfigurační funkce jsou vyšetřeny a znázorněny příslušné specielní pohyby.

Anschrift des Verfassers: Doc. *Jaroslav Chudý,* Katedra matematiky fakulty strojní ČVUT, 121 35 Praha 2, Karlovo nám. 13