Aplikace matematiky

Josef Kofroň

Die ableitungsfreien Fehlerabschätzungen von Quadraturformeln. I

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 1, 39–52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103391`

DIE ABLEITUNGSFREIEN FEHLERABSCHÄTZUNGEN VON QUADRATURFORMELN I

JOSEF KOFROŇ

(Eingegangen am 21. Januar 1971)

Der vorliegende Artikel knüpft an die Arbeiten von P. Davis [1] und von G. Hämmerlin [2] an. Wir gehen aus der Formel beider Autoren für die Fehlerabschätzung der Quadraturformeln aus, wir benutzen jedoch eine allgemeinere Form mit der Belegungsfunktion. Es ist uns gelungen die unendliche Reihe in der Formel zu summieren, was eine genaue Berechnung des Faktors σ ermöglicht. Die betreffenden Formeln werden für eine beliebige Verteilung der Knoten abgeleitet und dann auf verschiedene Quadraturformeln angewandt. Die daraus sich ergebenden ableitungsfreien Abschätzungen werden mit den klassischen in konkreten Beispielen verglichen.

Zum Schluss ist das ganze Verfahren auf Quadraturformeln, welche die Ableitungswerte benutzen, erweitert.

1.

1.1. Es sei $a \in (0, 1)$. Wir werden uns weiter mit der Quadraturformel

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_{n+1}(f) \tag{1}$$

befassen. Die Belegung $p(x)$ sei eine nichtnegative messbare Funktion mit dem konvergenten Integral in $\langle -a, a \rangle$. $x_k^{(n)}$, $A_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $R_{n+1}(f)$ seien die Knoten, Koeffizienten und das Restglied der Formel.

Bemerkung 1. Die in dem Intervall $\langle A, B \rangle$ $(A < B)$ für die Funktion $\varphi(x)$ gegebene Formel mit der Belegung $q(y)$, mit den Koeffizienten $a_k^{(n)}$ und Knoten $y_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ können wir auf das Intervall $\langle -a, a \rangle$ durch die folgende Substitution

$$y = \frac{B - A}{2a}\left(x + a\,\frac{A + B}{B - A}\right) \equiv y(x) \tag{2}$$

transformieren.

Dann ist $A_k^{(n)} = (2a/(B - A))\, a_k^{(n)}$ und $x_k^{(n)}$ erhalten wir mit Hilfe der inversen Substitution in der Form

$$x_k^{(n)} = \frac{a}{B - A}\,(2y_k^{(n)} - (A + B))\,. \tag{3}$$

Weiter ist ersichtlich $f(x) = ((B - A)/2a)\,\varphi(y(x)),\ p(x) = q(y(x))$.

Satz 1. *Es sei* (1) *die gegebene Quadraturformel mit* $a \in (0, 1)$. $p(x)$ *sei in* $\langle -a, a\rangle$ *eine nichtnegative, messbare Funktion mit konvergentem Integral. Es sei* $f(z)$ *eine in dem Kreise* $|z| < 1$, *holomorphe Funktion, die für* $|z| \leqq 1$ *stetig ist.* $f(z)$ *habe weiter die Eigenschaft, dass sie in* $\langle -a, a\rangle$ *nur reelle Werte annimmt. Dann gilt die Ungleichheit:*

$$|R_{n+1}(f)| \leqq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\,[\sum_{j=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^j)|^2]^{1/2}\,.\left[\int_\Gamma |f(z)|^2\,\mathrm{d}s\right]^{1/2}, \tag{4}$$

wo s die Bogenlänge des Kreises $\Gamma = \mathscr{E}(z;\ z = e^{i\varphi},\ \varphi \in \langle 0, 2\pi))$ *ist.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in derselben Weise wie der Beweis der analogen Behauptung in [1], die aus unserem Satze durch Einsetzung $p(x) = 1$ entsteht.

Bemerkung 2. Es folgt aus (1) und (4), dass R_{n+1} ein additives, homogenes und beschränktes Funktional im Hilbertraum der Funktionen ist, welche die im Satze 1 angegebenen Eigenschaften haben. Das Innenprodukt wird durch

$$(u, v) = \int_\Gamma u(\zeta)\,\overline{v(\zeta)}\,\mathrm{d}s$$

definiert.

Wenn wir nach [1] und [2]

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^j)|^2 = \sigma_{n+1}^2(a) \tag{5}$$

bezeichnen, so gilt

$$|R_{n+1}(f)| \leqq \sigma_{n+1}^2(a)\,.\,\|f\|\,. \tag{6}$$

Satz 2. *Es sei* $a \in (0, 1)$, $p(x) \geqq 0$ *in* $\langle -a, a\rangle$ *eine messbare Funktion mit konvergentem Integral. Bezeichnen wir*

$$(7) \qquad \tau_j(a) = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^j \, dx \, .$$

Wenn $R_{n+1}(f)$ der Form (1) ist, gilt

$$(8) \qquad 2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j^2(a) - 2\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j(a)\, (x_k^{(n)})^j + \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{n} \frac{A_l^{(n)}}{1 - x_k^{(n)} x_l^{(n)}} \, .$$

Der Beweis folgt unmittelbar von (5) und (7), wenn wir

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tau_j(a) - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} (x_k^{(n)})^j\right)^2$$

legen. Die unendlichen Reihen, welche in (8) auftreten, sind offenbar konvergent.

Bemerkung 3. Die Formel (8) kann für eine allgemeine Belegung $p(x)$ und für beliebige unsymmetrische Zerlegung der Knoten $x_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ eine endliche Form erhalten, denn für die Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j(a)\, (x_k^{(n)})^j$, $k = 0, 1, \ldots, n$, und $\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j^2(a)$ gelten die folgenden Formeln, welche leicht abzuleiten sind:

$$(9) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j(a)\, (x_k^{(n)})^j = \int_{-a}^{+a} \frac{p(x)}{1 - x x_k^{(n)}}\, dx$$

$$(10) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j^2(a) = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \frac{p(x)\, p(y)}{1 - xy}\, dx\, dy \, .$$

Wir vereinfachen jetzt (8) unter der Voraussetzung, dass die Knoten $x_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$ symmetrisch geordnet sind:

$$(11) \qquad x_k^{(n)} = -x_{n-k}^{(n)} \, , \quad \text{speziell } x_{n/2}^{(n)} = 0 \text{ für } n \text{ gerade}$$

und gleichzeitig $A_k^{(n)} = A_{n-k}^{(n)}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Dann gilt der

Satz 3. *Die Voraussetzungen des Satzes 2 seien erfüllt. Weiter setzen wir voraus, dass die Beziehungen (11) gelten. Dann gilt für ungerade n*

$$(12) \qquad 2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j^2(a) - 4 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} A_k^{(n)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tau_{2j}(a)\, (x_k^{(n)})^{2j}\right) +$$
$$+ 4 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} A_k^{(n)} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{A_l^{(n)}}{1 - (x_k^{(n)} x_l^{(n)})^2}$$

und für gerade n

$$(13)\quad 2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^2(a) - 2\Big[2\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\tau_{2j}(a)\,(x_k^{(n)})^{2j}\Big) + \tau_0(a)\,A_{n/2}^{(n)}\Big] +$$

$$+ 4\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{n/2-1} \frac{A_l^{(n)}}{1-(x_k^{(n)}x_l^{(n)})^2} + 4A_{n/2}^{(n)}\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)} + (A_{n/2}^{(n)})^2 .$$

Beweis. 1) Es sei erstens n ungerade und es sei (11) erfüllt. Dann erhalten wir schrittweise

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{n} \frac{A_l^{(n)}}{1 - x_k^{(n)}x_l^{(n)}} = 4\sum_{k=0}^{(n-1)/2} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} \frac{A_l^{(n)}}{1-(x_k^{(n)}x_l^{(n)})^2},$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(x_k^{(n)})^j &= 2\sum_{k=0}^{(n-1)/2} A_k^{(n)}(x_k^{(n)})^j \quad \text{für } j \text{ gerade}\\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } j \text{ ungerade}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j(a)\Big(\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(x_k^{(n)})^j\Big) = 2\sum_{k=0}^{(n-1)/2} A_k^{(n)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\tau_{2j}(a)\,(x_k^{(n)})^{2j}\Big).$$

2) Für gerade n ist nach (11)

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{n} \frac{A_l^{(n)}}{1 - x_k^{(n)}x_l^{(n)}} = 4\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{n/2-1} \frac{A_l^{(n)}}{1-(x_k^{(n)}x_l^{(n)})^2} + 4A_{n/2}^{(n)}\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)} + (A_{n/2}^{(n)})^2 .$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(x_k^{(n)})^j &= 2\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)}(x_k^{(n)})^j \quad \text{für } j \text{ gerade}, j = 2, 4, \ldots\\ &= 2\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)} + A_{n/2}^{(n)} \quad \text{für } j = 0\\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } j \text{ ungerade}.\end{aligned}$$

Hieraus bekommen wir endlich

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \sum_{j=0}^{\infty}\tau_j(a)\,(x_k^{(n)})^j = 2\sum_{k=0}^{n/2-1} A_k^{(n)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\tau_{2j}(a)\,(x_k^{(n)})^{2j}\Big) + \tau_0(a)\,A_{n/2}^{(n)} .$$

Bemerkung 5. Es ist sehr leicht zu beweisen, dass

$$(14) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{2j}(a)\,(x_k^{(n)})^{2j} = \frac{1}{2}\left[\int_{-a}^{+a} \frac{p(x)\,dx}{1 + x x_k^{(n)}} + \int_{-a}^{+a} \frac{p(x)\,dx}{1 - x x_k^{(n)}}\right]$$

für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt.

Bemerkung 6. Zur Abkürzung führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(15) \qquad I_k^{(n)}(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{2j}(a)\,(x_k^{(n)})^{2j}$$

$$(16) \qquad H(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j^2(a)\,.$$

1.2. Jetzt führen wir die Formeln für die Berechnung von $I_k^{(n)}(a)$ und $H(a)$ in einigen speziellen Quadraturformeln an.

1) Betrachten wir die Formel (1) vom Gausschen Typus für $p(x) = 1$ in $\langle -a, a\rangle$. Wenn $a_k^{(n)}$, $y_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ die in den Tabellen gegebenen Werte für das Intervall $\langle -1, 1\rangle$ sind, so haben wir für das Intervall $\langle -a, a\rangle$:

$$\left.\begin{aligned} A_k^{(n)} &= a \,.\, a_k^{(n)} \\ x_k^{(n)} &= a \,.\, y_k^{(n)} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Weiter ist

$$\left.\begin{aligned} \tau_{2j}(a) &= 2a^{2j+1}/(2j + 1) \\ \tau_{2j+1}(a) &= 0 \end{aligned}\right\} j = 0, 1, \ldots$$

und hieraus

$$I_k^{(n)}(a) = \frac{1}{x_k^{(n)}} \ln \frac{1 + a x_k^{(n)}}{1 - a x_k^{(n)}}\,,$$

$$H(a) \equiv H_1(a) = 4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{2(2j+1)}}{(2j + 1)^2} = \int_{(1-a^2)/(1+a^2)}^{(1+a^2)/(1-a^2)} \frac{\ln v}{v - 1}\,dv - \int_{(1-a^2)/(1+a^2)}^{(1+a^2)/(1-a^2)} \frac{\ln v}{v + 1}\,dv\,.$$

Die beiden Integrale konvergieren. Es gilt $\lim_{v\to 1} (\ln v)/(v - 1) = 1$. Für n gerade ist $I_{n/2}^{(n)}(a) = 2a$.

2) Die Gaussche Formel mit der Belegung $q(y) = y^2$ in $\langle 0, 1\rangle$. Die zugehörigen Koeffizienten $a_k^{(n)}$ und Knoten $y_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sind in den Tabellen in [4] S. 139–142 zu finden. Nach der Überführung des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ auf das Intervall

$\langle -a, a\rangle$ erhalten wir $p(x) = (x + a)^2/4a^2$ und

$$\left.\begin{aligned} x_k^{(n)} &= a(2y_k^{(n)} - 1) \\ A_k^{(n)} &= 2a \,.\, a_k^{(n)} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Nach der Berechnung haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{2j+1}(a) &= a^{2j+2}/(2j + 3) \\ \tau_{2j}(a) &= 2[a^{2j+1}(j + 1)]/[(2j + 1)(2j + 3)] \end{aligned}\right\} j = 0, 1, \ldots$$

Weiter ist

$$I_k^{(n)}(a) = -\frac{1}{2x_k^{(n)}}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a^2(x_k^{(n)})^2}\right)\ln\frac{1 - ax_k^{(n)}}{1 + ax_k^{(n)}} + \frac{1}{ax_k^{(n)}}\right],$$

wobei für n gerade $I_{n/2}^{(n)}(a) = \frac{2}{3}a$ ist. Endlich

$$H(a) = (1 + a^2)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{2(2j+1)}}{(2j + 3)^2} + 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{2(2j+1)}}{(2j + 1)(2j + 3)^2} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{2(2j+1)}}{(2j + 1)^2(2j + 3)^2}$$

oder

$$H(a) = -1 + \tfrac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\ln\frac{1 + a^2}{1 - a^2} + \frac{1 + 4a^2 + a^4}{16a^4}\,H_1(a)\,.$$

($H_1(a)$ siehe das vorgehende Beispiel.)

3) Die Hermitesche Formel, d.h. die Gaussche Formel mit der Belegung $q(y) = (1 - y^2)^{-1/2}$ in $\langle -1, 1\rangle$. Es gilt nach [5]

$$y_k^{(n)} = \cos\left[(2k + 1)\,\pi/(2n + 2)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

$$a_k^{(n)} = \pi/(n + 1) \quad (a_k^{(n)} \text{ ist in diesem Fall von } k \text{ unabhängig})\,.$$

Die Überführung auf das Intervall $\langle -a, a\rangle$ gibt

$$p(x) = (1 - x^2a^{-2})^{-1/2}\,,$$

$$x_k^{(n)} = ay_k^{(n)}\,,$$

$$A_k^{(n)} = a\,.\,a_k^{(n)}\,.$$

Weiter ist

$$\tau_{2j}(a) = a^{2j+1}[(2j - 1)!!/(2j)!!]\,\pi\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

$$\tau_{2j+1}(a) = 0 \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots$$

$$\tau_0(a) = a\pi$$

und endlich

$$I_k^{(n)}(a) = a\pi/\sqrt{(1 - a^2(x_k^{(n)})^2)} .$$

$$H(a) = a^2\pi^2\{1 + \sum_{j=1}^{\infty} a^{4j}[(2j - 1)!!/(2j)!!]^2\}$$

oder

$$H(a) = 2\mathrm{F}(\pi/2, a^2) .$$

($\mathrm{F}(\pi/2, \zeta)$ ist ein vollständiges elliptisches Integral erster Art.)

4) Die Gaussche Formel mit der Belegung $q(y) = \sqrt{(1 - y^2)}$ in $\langle -1, 1\rangle$. Die Koeffizienten und Knoten sind nach [5]:

$$\left.\begin{aligned} a_k^{(n)} &= \frac{\pi}{n+2} \sin^2 \frac{(k+1)\pi}{n+2} \\ y_k^{(n)} &= \cos \frac{(k+1)\pi}{n+2} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Für das Intervall $\langle -a, a\rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sqrt{(1 - x^2a^{-2})} , \\ A_k^{(n)} &= a \,.\, a_k^{(n)} , \\ x_k^{(n)} &= a \,.\, y_k^{(n)} . \end{aligned}$$

Nach der Berechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau_{2j}(a) &= a^{2j+1}[(2j - 1)!!/(2j + 2)!!]\,\pi \quad &&\text{für } j = 1, 2, \ldots \\ \tau_{2j+1}(a) &= 0 &&\text{für } j = 0, 1, 2, \ldots \\ \tau_0(a) &= a\pi/2 . \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$I_k^{(n)}(a) = a\pi/[1 + \sqrt{(1 - a^2(x_k^{(n)})^2)}] ,$$

$$H(a) = a^2\pi^2\{\tfrac{1}{4} + \sum_{j=1}^{\infty} a^{4j}[(2j - 1)!!/(2j + 2)!!]^2\} ,$$

oder auch

$$H(a) = \pi a^{-2}\{2(1 + a^2)\,\mathrm{E}(\tfrac{1}{2}\pi, 2a/(1 + a^2)) - \pi\} .$$

($\mathrm{E}(\frac{1}{2}\pi, \zeta)$ ist ein vollständiges elliptisches Integral zweiter Art.)

5) Die Gaussche Formel mit der Belegung $q(y) = \sqrt{((1 - y)/(1 + y))}$ in $\langle -1, 1\rangle$. Die Koeffizienten und Knoten nach [5] sind

$$\left.\begin{aligned} a_k^{(n)} &= \frac{4\pi}{2n+3} \sin \frac{(k+1)\pi}{2n+3} \\ y_k^{(n)} &= \cos \frac{2(k+1)\pi}{2n+3} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

In dem Intervall $\langle -a, a\rangle$ ist

$$p(x) = \sqrt{((a - x)/(a + x))}$$

$$\left.\begin{aligned} A_k^{(n)} &= a \,.\, a_k^{(n)} \\ x_k^{(n)} &= a \,.\, y_k^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Die Berechnung gibt

$$\tau_j(a) = \frac{4a^{j+1}\pi}{2^{j+2}(j+1)!} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} (-1)^i (2i+1)!!\,(2j-2i-1)!! + (-1)^j (2j+1)!! \right\}$$

$$\text{für } j = 1, 2, \ldots ,$$

$$\tau_0(a) = a\pi .$$

Weiter haben wir

$$I_k^{(n)}(a) = a\pi \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - a^2(x_k^{(n)})^2)} + 1 - a x_k^{(n)}} - \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2(x_k^{(n)})^2)} + 1 + a x_k^{(n)}} \right]$$

oder

$$H(a) = 2\pi \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2a}{1+a^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1-a^2}{1+a^2} \left[\prod\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2}\right) - \prod\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2}\right) \right] \right\} .$$

Hier $\mathrm{F}(\pi/2, \zeta)$ ist wieder ein vollständiges elliptisches Integral 1. Art, $\prod(\pi/2, \zeta, \xi)$ ist ein elliptisches Integral dritter Art.

6) Als das letzte Beispiel betrachten wir die verallgemeinerte Regel mit den äquidistanten Knoten in dem Fall der Belegung $p(x) = 1$ in $\langle -1, 1\rangle$. Nehmen wir an, dass die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ der ursprünglichen Regel gegeben sind. Es gelte $\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} = 2$.

Die Knoten sind

$$y_{k,1}^{(n)} = -1 + 2k/n\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Wir haben für die verallgemeinerte Regel, was die ursprüngliche r-malig benutzte Regel ist:

$$y_{k,r}^{(n)} = -1 + 2k/rn\,, \quad k = 0, 1, \ldots, rn\,.$$

Dann ist

$$a_{k,r}^{(n)} = a_k^{(n)}/r\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, rn$$

$$k \neq n, 2n, \ldots, (r-1)\,n$$

$$a_{k,r}^{(n)} = 2a_k^{(n)}/r\,, \quad k = n, 2n, \ldots, (r-1)\,n\,.$$

Nach der Überführung auf das Intervall $\langle -a, a\rangle$ ist $p(x) = 1$ und

$$\left.\begin{aligned} A_{k,r}^{(n)} &= a\,.\,a_{k,r}^{(n)} \\ x_{k,r}^{(n)} &= a\,.\,y_{k,r}^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots, rn\,.$$

Offensichtlich ist

$$\left.\begin{aligned} \tau_{2j}(a) &= 2a^{2j+1}/(2j+1) \\ \tau_{2j+1}(a) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Weiter ist

$$I_{k,r}^{(n)}(a) = \frac{1}{x_{k,r}^{(n)}} \ln \frac{1 + a x_{k,r}^{(n)}}{1 - a x_{k,r}^{(n)}}$$

und

$$H(a) = H_1(a)\,.$$

($H_1(a)$ siehe 1).)

1.3. Zum Schluss geben wir für die Vergleichung drei Beispiele an.

1) Um die Fehlerabschätzung bei der Berechnung des Integrals

$$\int_{-1/2}^{1/2} x^{10} e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2^{11}} \int_{-1}^{1} t^{10} e^{\frac{1}{4}t^2}\, dt$$

für $n = 2$ mit der Hilfe der Gausschen Formel mit der Belegung $p(x) = 1$ zu berechnen, geben wir einesteils die Abschätzung in der klassischen Form:

$$R_{n+1}(\varphi) = \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)(2n+2)!} \left[\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\right]^2 \varphi^{(2n+2)}(\zeta) \quad (\zeta \in (-1, 1))$$

an, was für $n = 2$

$$|R_3(\varphi)| \leqq \max_{x \in \langle -1,1 \rangle} |\varphi^{(6)}(x)|/15750 \text{ gibt} .$$

Anderenteils geben wir die Abschätzung mit der Hilfe des σ-Koeffizienten an:

$$|R_{n+1}(f)| \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_{n+1}(a) \max_{z \in \Gamma} |f(z)| .$$

Nach der Berechnung für $n = 2$ erhalten wir

$$|R_3(\varphi)| \leqq 0{,}0125 \qquad \text{(die klassische Abschätzung)}$$

$$|R_3(f)| = |R_3(\varphi)| \leqq 0{,}0011 \quad \text{(die } \sigma \text{-Abschätzung)} ,$$

nachdem $\sigma_3(\frac{1}{2}) = 1 . 6515 . 10^{-4}$ ist.

2) Als das zweite Beispiel für die Berechnung von

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^{10} e^{x^2}}{\sqrt{(1 - 4x^2)}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{11}} \int_{-1}^{1} \frac{t^{10} e^{t^2/4}}{\sqrt{(1 - t^2)}} \mathrm{d}t$$

dient die allgemeine Fehlerabschätzung für die Hermitesche Formel in der klassischen Form

$$R_{n+1}(\varphi) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{\varphi^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}, \quad \text{wo} \quad \zeta \in (-1, 1) .$$

Diese Formel gibt für $n = 2$

$$|R_3(\varphi)| \leqq \pi \max_{x \in \langle -1,1 \rangle} |\varphi^{(6)}(x)|/23040 .$$

Die Ergebnisse sind die folgende:

$$|R_3(\varphi)| \leqq 0{,}0268 \qquad \text{(die klassische Abschätzung)}$$

$$|R_3(f)| = |R_3(\varphi)| \leqq 0{,}0024 \quad \text{(die } \sigma\text{-Abschätzung)} ,$$

denn in diesem Falle ist $\sigma_3(\frac{1}{2}) = 3 . 4778 . 10^{-4}$.

3) Das dritte Beispiel. Man soll mit der Gausschen Formel mit der Belegung $\sqrt{(1 - t^2)}$ in $\langle -1, 1 \rangle$ das folgende Integral berechnen:

$$\int_{-1/2}^{1/2} x^{10} e^{x^2} \sqrt{(1 - 4x^2)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{11}} \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - t^2)}\, t^{10} e^{t^2/4}\, \mathrm{d}t .$$

Es ist also $\varphi(t) = 1/2^{11}\, t^{10} \,.\, e^{t^2/4}$, $f(x) = x^{10} e^{x^2}$. Die allgemeine klassische Abschätzung ist

$$|R_{n+1}(\varphi)| = \frac{\pi}{2^{2n+2}} \frac{\varphi^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}, \quad \zeta \in (-1, 1),$$

was für $n = 2$

$$|R_3(\varphi)| \leqq \pi \max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |\varphi^{(6)}(x)|/46080$$

liefert.

Nach der Berechnung erhalten wir

$$|R_3(\varphi)| \leqq 0{,}0134 \qquad \text{(die klassische Abschätzung)},$$

$$|R_3(f)| = |R_3(\varphi)| \leqq 0{,}0055 \quad \text{(die } \sigma\text{-Abschätzung)},$$

denn für diesen Fall ist $\sigma_3(\frac{1}{2}) = 8 \,.\, 0758 \,.\, 10^{-4}$.

2.

Wir verallgemeinern im zweiten Teile die für die Formel (1) geltenden Ergebnisse auf die Formeln

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{t_i - 1} A_{ij}^{(n)} f^{(j)}(x_i^{(n)}) = R_{n+1}(f). \tag{17}$$

Satz 4. *Es sei $f(z)$ in dem Kreise $|z| < 1$ eine holomorphe Funktion. Für $|z| \leqq 1$ sei sie stetig und in dem Intervall $\langle -a, a \rangle$, $a \in (0, 1)$ nehme sie nur reelle Werte an. Die Belegung $p(x)$ sei eine messbare nichtnegative Funktion mit konvergentem Integral in $\langle -a, a \rangle$. Dann gilt die Ungleichheit (4), wo $\Gamma = \mathscr{E}(z; z = e^{i\varphi}, \varphi \in \langle 0, 2\pi))$ ist.*

s ist die Bogenlänge des Kreises Γ und R_{n+1} ist die durch die Formel (17) gegebene Fehlerabschätzung.

Der Beweis läuft soeben wie der Beweis des Satzes 1 durch, wo zu bemerken ist, dass für die Funktion $f(z)$ die folgende Formel gilt:

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, \bar{\zeta}^j}{(1 - z\bar{\zeta})^{j+1}}\, \mathrm{d}s\,.$$

Führen wir gleich wie in dem ersten Teile die Bezeichnung

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{n} |R_{n+1}(x^j)|^2 \tag{18}$$

ein. Um die allgemeine Formel für die Berechnung der Grösse $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$ herzuleiten, wird ein Hilfssatz benötigt.

Lemma. *n, m seien natürliche Zahlen. Dann gilt für alle $x, y \in (-1, 1)$ die Gleichheit*

(19)
$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{1}{1-xy}\right)\right) = m!\,(1-xy)^{-(m+n+1)}x^{m-n}\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i}^2 y^i x^i \frac{m!}{(m-n+i)!}\,.$$

Den Beweis führt man mittels der vollständigen Induktion durch.

Satz 5. *Es sei $R_{n+1}(f)$ der Form (17), wo $a \in (0, 1)$ ist. Die Belegung $p(x)$ sei eine nichtnegative, messbare Funktion mit konvergentem Integral in $\langle -a, a\rangle$. Dann gilt*

(20)
$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^2(a) - 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}j!\int_{-a}^{+a}\frac{p(t)\,t^j}{(1-tx_i^{(n)})^{j+1}}\,\mathrm{d}t + $$
$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{k_l-1}A_{lm}^{(n)}m!(1-x_i^{(n)}x_l^{(n)})^{-(m+j+1)}\,.$$
$$.\,(x_i^{(n)})^{m-j}\sum_{p=0}^{j}p!\binom{j}{p}^2(x_l^{(n)}x_i^{(n)})^p\frac{m!}{(m-j+p)!}\,.$$

Beweis. Aus der Definition (18) ergibt sich

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\tau_r(a) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}^j x^r}{\mathrm{d}x^j}\right)_{x=x_i^{(n)}}\right)^2 =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\tau_r^2(a) - 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}j!\int_{-a}^{+a}\frac{p(t)\,t^j}{(1-tx_i^{(n)})^{j+1}}\,\mathrm{d}t +$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}^j x^r}{\mathrm{d}x^j}\right)_{x=x_i^{(n)}}\right)^2.$$

Für die zweite Potenz in dem letzten Glied haben wir

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}^j x^r}{\mathrm{d}x^j}\right)_{x=x_i^{(n)}}\right)\left(\sum_{m=0}^{k_l-1}A_{lm}^{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}^m x^r}{\mathrm{d}x^m}\right)_{x=x_l^{(n)}}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}A_{ij}^{(n)}\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{k_l-1}A_{lm}^{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}^j x^r}{\mathrm{d}x^i}\right)_{x=x_i^{(n)}}\left(\frac{\mathrm{d}^m x^r}{\mathrm{d}x^m}\right)_{x=x_l^{(n)}}\,.$$

Weiter ist ersichtlich

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}^j x^r}{\mathrm{d}x^j}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^m y^r}{\mathrm{d}y^m}\right) = \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{1}{1 - xy}\right)\right)$$

und nach (19) und dem Lemma erhalten wir (20).

Literaturverzeichnis

[1] *P. Davis:* Errors of Numerical Approximation for Analytic Functions, J. rat. mech. anal. 2, (1953), 303—313.

[2] *G. Hämmerlin:* Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler, Numerische Mathematik 5, (1963), 226—233.

[3] *J. S. Gradschtein, J. M. Ryzik:* Таблицы интегралов, сумм и произведений, 4. Auflage (1963).

[4] *Sprung, W. L. Donald, D. J. Hughes:* Gauss weights and ordinates for $\int_0^1 f(x)\, x^2\, \mathrm{d}x$, Mathematics of Computation 19, (1965), 139—142.

[5] *I. P. Natanson:* Konstruktive Funktionentheorie, (1955).

Résumé.

Práce se zabývá kvadraturním vzorcem

$$\text{(I)} \qquad \int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^n) = R_{n+1}(f)\,, \quad a \in (0, 1)\,,$$

kde $p(x)$ je nezáporná, měřitelná funkce s vlastností $\int_{-a}^{+a} p(x)\, \mathrm{d}x < +\infty$. $f(x)$ je taková reálná funkce na intervalu $\langle -a, a \rangle$, že funkce $f(z)$ komplexní proměnné z, kde $|z| \leqq 1$, je pro $|z| < 1$ holomorfní a pro $|z| = 1$ spojitá. Za těchto předpokladů se odhaduje chyba $R_{n+1}(f)$ ve tvaru nerovnosti

$$\text{(II)} \qquad |R_{n+1}(f)| \leqq \sigma_{n+1}(a) \cdot \|f\|\,,$$

kde

$$\text{(III)} \qquad \sigma_{n+1}^2(a) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^j)|^2\,,$$

$$\text{(IV)} \qquad \|f\|^2 = \int_{\Gamma} |f(z)|^2\, \mathrm{d}s\,,$$

kde s je oblouk kružnice $\Gamma = \mathscr{E}(z; |z| = 1)$.
(Viz [1], [2].)

Veličina $\sigma_{n+1}(a)$ je vypočtena (na rozdíl od citovaných prací) v zakončeném tvaru:

$$(\mathrm{V}) \qquad 2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} \frac{p(x)\,p(y)}{1 - xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \int_{-a}^{+a} \frac{p(x)}{1 - xx_k^{(n)}}\,\mathrm{d}x + \\ + \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \sum_{l=0}^{n} \frac{A_l^{(n)}}{1 - x_k^{(n)}\,x_l^{(n)}}\,.$$

Pro usnadnění praktických výpočtů jsou uvedeny i specielní vzorce pro n liché i sudé.

Jsou uvedeny specielní vzorce pro 5 případů kvadraturních formulí Gaussova typu a pro případ obecné formule s ekvidistantními uzly a $p(x) \equiv 1$ v $\langle -a, a\rangle$.

Vyložené výsledky jsou doplněny třemi konkrétními příklady a je provedeno srovnání s klasickými metodami odhadu.

Konečně jsou zobecněny nerovnost (II) a vzorec (V) pro případ kvadraturních formulí, užívajících hodnot derivací integrované funkce v uzlových bodech.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Josef Kofroň*, CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, Praha 1.