Aplikace matematiky

Lumír Veselý

Některé vlastnosti rozvojů veličin rotačně souměrného magnetického pole v okolí osy souměrnosti do mocninných řad a jejich souvislost s Legendrovymi polynomy

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 4, 309–322

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103238

NĚKTERÉ VLASTNOSTI ROZVOJŮ VELIČIN ROTAČNĚ SOUMĚRNÉHO MAGNETICKÉHO POLE V OKOLÍ OSY SOUMĚRNOSTI DO MOCNINNÝCH ŘAD A JEJICH SOUVISLOST S LEGENDROVÝMI POLYNOMY

LUMÍR VESELÝ

(Došlo dne 26. ledna 1968)

1. ÚVOD

Při studiu otázek souvisejících s měřením rotačně souměrných magnetických polí magnetických čoček ukázal K. PAVLÍK [6] na dvojí způsob vyjádření magnetického pole v okolí osy souměrnosti rozvoji do dvojných řad. Práce se však omezuje jen na několik prvých členů řady a rovněž nepoukazuje na souvislost mezi oběma způsoby rozvojů. Cílem této práce je odvodit dvojné rozvoje pro všechny veličiny pole v uzavřeném tvaru, tj. s možností vyjádřit libovolný člen řady, dále objasnit souvislost mezi oběma způsoby dvojných rozvojů a nakonec ukázat na jejich souvislost s rozvoji do nekonečných řad podle Legendrových polynomů P_m a P_m^1. Přitom bude využito některých výsledků práce [8].

2. VÝCHOZÍ VZTAHY A PŘEDPOKLADY

Budeme sledovat vlastnosti rotačně souměrného magnetického pole v oblasti o, která obsahuje alespoň část osy z. Poloha obecného bodu P, který leží v o, je popsána souřadnicemi válcovými (ϱ, z, α), resp. sférickými (r, ϑ, α). Střed souřadných soustav je 0. Mezi souřadnicemi platí vztahy:

$$\varrho = r \sin \vartheta\,, \quad z = r \cos \vartheta\,. \tag{1a,b}$$

V oblasti o je permeabilita μ všude rovna permeabilitě vakua $\mu_0 = 4\pi \,.\, 10^{-7}$ H/m a nejsou zde zdroje pole. Magnetické pole lze vyjádřit skalárním magnetickým potenciálem $\varphi^*[A]$, vektorovým potenciálem $\boldsymbol{A}$ $[Vs/m]$ a magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$ $[T]$. Pro stručnost použijeme veličinu $\varphi = \mu_0 \varphi^*$, jejíž rozměr je $[Vs/m]$. Vzhledem k rotační souměrnosti nezávisejí veličiny pole na α $(\partial/\partial\alpha = 0)$, magnetická indukce má nenulové složky B_z a B_ϱ a vektorový potenciál má jedinou nenulovou složku A_α, kterou budeme psát stručně A. Mezi potenciály a složkami pole platí podle [2] [7]:

(2a,b) $$B_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad B_\varrho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho},$$

(3a,b) $$B_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho A)}{\partial\varrho} = \frac{\partial A}{\partial\varrho} + \frac{A}{\varrho}, \quad B_\varrho = -\frac{\partial A}{\partial z}.$$

V oblasti o pak pro potenciály platí Laplaceovy rovnice: $\Delta\varphi = 0$ a $\Delta\mathbf{A} = 0$, což ve válcových souřadnicích podle [2], [7] bude:

(4) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

(5) $$\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho A)}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0.$$

V oblasti o předpokládáme dále existenci, spojitost a ohraničenost libovolných derivací podle ϱ, z a smíšených derivací pro všechny veličiny pole B_z, B_ϱ, A, φ. Vzhledem k rotační souměrnosti se omezíme na sledování pole jen v jedné rovině, procházející osou z. Jelikož souřadnici α k popisu polohy nepoužijeme, musíme pro odlišení dvou částí roviny rozdělených osou z považovat ϱ za kladné na jedné polorovině a za záporné na polorovině druhé. Z téhož důvodu musíme brát složku A po obou stranách osy z s různými znaménky.

Pro potenciály pak v důsledku rotační souměrnosti platí:

(6) $$\varphi(z, -\varrho) = \varphi(z, +\varrho),$$

(7) $$A(z, -\varrho) = -A(z, +\varrho).$$

Z nich pak vyplývají vztahy pro složky pole:

(8) $$B_z(z, -\varrho) = B_z(z, +\varrho),$$

(9) $$B_\varrho(z, -\varrho) = -B_\varrho(z, +\varrho).$$

Jelikož jsou A a B_ϱ spojité, vyplývá ze (7) a (9), že A a B_ϱ jsou na ose nulové.

Nakonec uveďme poznámku k některým označením. Veličiny na ose $(B_z)_{\varrho=0}$ a $(\varphi)_{\varrho=0}$ stručně zapíšeme B_0 a φ_0. Ostatní veličiny, např. $(\partial^m A/\partial\varrho^m)_{\varrho=0}$ pak $(\partial^m A/\partial\varrho^m)_0$. Bude-li kromě toho i $z = 0$, zapíšeme $(B_z)_{\varrho=0,z=0}$ a $(\varphi)_{\varrho=0,z=0}$ stručně $B_0(0)$ a $\varphi_0(0)$. Ostatní veličiny, např. $(\partial^m A/\partial\varrho^m)_{\varrho=0,z=0}$ pak $(\partial^m A/\partial\varrho^m)_{00}$. Derivace $(\partial^m B_z/\partial z^m)_{\varrho=0}$ a $(\partial^m\varphi/\partial z^m)_{\varrho=0}$ pak stručně zapíšeme $B_0^{(m)}$ a $\varphi_0^{(m)}$, atd.

3. ROZVOJE DO MOCNINNÝCH ŘAD PODLE ϱ

V tomto odstavci uvedeme známé vztahy pro rozvoje veličin pole do mocninných řad podle ϱ [2], které dále budeme potřebovat. Dostaneme je, vyjádříme-li φ resp. A rozvoji do mocninných řad podle ϱ s neurčenými koeficienty. Rozvoje pak dosadíme do (4) resp. (5), načež obdržíme rekurentní vzorce, kterými hledané koeficienty rozvoje určíme. Tak dostaneme:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \varphi_0^{(2k)} \varrho^{2k}, \tag{10}$$

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k!(k+1)!} B_0^{(2k)} \varrho^{2k+1}. \tag{11}$$

Složky pole B_z a B_ϱ odvodíme z potenciálů pomocí vztahů (2) resp. (3):

$$B_z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} B_0^{(2k)} \varrho^{2k}, \tag{12}$$

$$B_\varrho = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1} k!(k-1)!} \varphi_0^{(2k)} \varrho^{2k-1}, \tag{13a}$$

nebo:

$$B_\varrho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!} B_0^{(2k+1)} \varrho^{2k+1}. \tag{13b}$$

4. VZTAHY MEZI DERIVACEMI VELIČIN POLE NA OSE

Bezprostředně ze souměrnosti veličin pole, daných vztahy (6) až (8), a ze spojitosti jejich derivací vyplývají vztahy:

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2k}A}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0 = 0, \tag{14a,b}$$

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}B_z}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2k}B_\varrho}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0 = 0. \tag{14c,d}$$

Z rozvojů (10) až (13) lze pak odvodit další užitečné vztahy mezi derivacemi veličin pole na ose. Derivujeme φ z (10) $2s$ kráte podle ϱ. Úpravou dostaneme:

$$\frac{\partial^{2s}\varphi}{\partial\varrho^{2s}} = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2 (2k-2s)!} \varphi_0^{(2k)} \varrho^{2k-2s}. \tag{15}$$

Položíme-li $\varrho = 0$, zbude jediný nenulový člen pro $s = k$, takže:

$$\left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0 = \frac{(-1)^k\,(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,\varphi_0^{(2k)}\,. \tag{16}$$

$2k + 1$ násobnou derivací bychom pak obdrželi (14a). Podobným způsobem získáme z (11), (12) a (13b) vztahy:

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}A}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0 = \frac{(-1)^k\,(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\,B_0^{(2k)}\,, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial^{2k}B_z}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0 = \frac{(-1)^k\,(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,B_0^{(2k)}\,, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}B_\varrho}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0 = \frac{(-1)^{k+1}\,(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\,B_0^{(2k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}(2k+2)!}{2^{2k+2}[(k+1)!]^2}\,B_0^{(2k+1)} \tag{19a}$$

a záměnou k na $k - 1$:

$$\left(\frac{\partial^{2k-1}B_\varrho}{\partial\varrho^{2k-1}}\right)_0 = \frac{(-1)^k\,(2k-1)!}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}\,B_0^{(2k-1)} = \frac{(-1)^k\,(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,B_0^{(2k-1)}\,. \tag{19b}$$

Vypočtěme z (16) $\varphi_0^{(2k)}$, ze (17) a (18) $B_0^{(2k)}$ a z (19a) $B_0^{(2k+1)}$:

$$\varphi_0^{(2k)} = \frac{(-1)^k\,2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0, \tag{20}$$

$$B_0^{(2k)} = \frac{(-1)^k\,2^{2k+1}k!(k+1)!}{(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k+1}A}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0 = \tag{21}$$

$$= \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)\cdot\left[\frac{(-1)^k\,2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]\cdot\left(\frac{\partial^{2k+1}A}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0,$$

$$B_0^{(2k)} = \frac{(-1)^k\,2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\left(\frac{\partial^{2k}B_z}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0, \tag{22}$$

$$B_0^{(2k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}\,2^{2k+1}k!(k+1)!}{(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k+1}B_\varrho}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0 = \tag{23}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\,2^{2k+2}[(k+1)!]^2}{(2k+2)!}\left(\frac{\partial^{2k+1}B_\varrho}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0.$$

Porovnáním (21) a (22) máme:

$$\left(\frac{\partial^{2k}B_z}{\partial\varrho^{2k}}\right)_0 = \frac{2k+2}{2k+1}\left(\frac{\partial^{2k+1}A}{\partial\varrho^{2k+1}}\right)_0. \tag{24}$$

Použitím (3b) můžeme napsat:

$$\frac{\partial^{2k+1} B_\varrho}{\partial \varrho^{2k+1}} = - \frac{\partial^{2k+2} A}{\partial \varrho^{2k+1} \partial z}.$$

Dosazením tohoto vztahu do (23) lze $B_0^{(2k+1)}$ vyjádřit derivacemi vektorového potenciálu:

(25a) $$B_0^{(2k+1)} = \frac{(-1)^k \, 2^{2k+1} k!(k+1)!}{(2k+1)!} \left(\frac{\partial^{2k+2} A}{\partial \varrho^{2k+1} \partial z} \right)_0$$

a záměnou k na $k - 1$:

(25b) $$B_0^{(2k-1)} = \frac{(-1)^{k+1} \, 2^{2k-1} (k-1)! \, k!}{(2k-1)!} \left(\frac{\partial^{2k} A}{\partial \varrho^{2k-1} \partial z} \right)_0.$$

Podobně pomocí vztahu (2a) lze napsat $\varphi_0^{(2k+1)} = -B_0^{(2k)}$, načež za $B_0^{(2k)}$ dosadíme z (22), kam opět dosadíme

$$\left(\frac{\partial^{2k} B_z}{\partial \varrho^{2k}} \right)_0 = - \left(\frac{\partial^{2k+1} \varphi}{\partial \varrho^{2k} \partial z} \right)_0,$$

takže:

(26) $$\varphi_0^{(2k+1)} = \frac{(-1)^k \, 2^{2k} (k!)^2}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k+1} \varphi}{\partial \varrho^{2k} \partial z} \right)_0.$$

5. DVOJNÉ ROZVOJE, KDY JE $\varphi_0(z)$ A $B_0(z)$ VYJÁDŘENO TAYLOROVÝMI ROZVOJI V BODĚ 0 PODLE z

Derivace $\varphi_0^{(2k)}(z)$ a $B_0^{(2k)}(z)$ vyjádříme rozvoji do Taylorových řad podle z:

(27) $$\varphi_0^{(2k)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varphi_0^{(2k+s)}(0) \, z^s,$$

(28) $$B_0^{(2k)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} B_0^{(2k+s)}(0) \, z^s.$$

Dosaďme (27) do (10):

(29) $$\varphi(\varrho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^s \varrho^{2k}}{2^{2k} (k!)^2 \, s!} \varphi_0^{(2k+s)}(0).$$

Dále místo k pišme n, zaveďme $m = 2n + s$, za s do (29) dosaďme: $s = m - 2n$ a rovněž zaměňme pořadí součtů:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \to \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n^*},$$

kde

$$n^* = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{pro } m \text{ sudé} \\ \dfrac{m-1}{2} & \text{pro } m \text{ liché} \end{cases} \tag{30}$$

Po úpravě obdržíme:

$$\varphi(\varrho, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\varphi_0^{(m)}(0)}{m!}\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{n^*} \frac{(-1)^n\, m!\, \varrho^{2n} z^{m-2n}}{2^{2n}(n!)^2\,(m-2n)!}\right]. \tag{31}$$

Označme:

$$F_m = \frac{\varphi_0^{(m)}(0)}{m!}. \tag{32}$$

Dále pak výraz ve druhé hranaté závorce (31) je podle vztahu (D4) dodatku roven $r^m P_m$, kde P_m je Legendrův polynom, takže (31) můžeme zapsat ve tvaru:

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} F_m r^m P_m\,. \tag{33}$$

Podobně pro vektorový potenciál dosaďme (28) do (11):

$$A(\varrho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \varrho^{2k+1} z^s}{2^{2k+1} k!(k+1)!\, s!} B_0^{(2k+s)}(0)\,. \tag{34}$$

Dále místo k pišme n, zaveďme $m = 2n + s + 1$, za s do (34) dosaďme: $s = m - 2n - 1$ a rovněž zaměňme pořadí součtů:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \to \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\bar{n}},$$

kde

$$\bar{n} = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2} & \text{pro } m \text{ liché} \\ \dfrac{m-2}{2} & \text{pro } m \text{ sudé} \end{cases} \tag{35}$$

Po úpravě obdržíme:

$$A(\varrho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{B_0^{(m-1)}(0)}{(m+1)!}\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\bar{n}} \frac{(-1)^n\,(m+1)!\, \varrho^{2n+1} z^{m-2n-1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!\,(m-2n-1)!}\right]. \tag{36}$$

Označme:

$$C_m = \frac{B_0^{(m-1)}(0)}{(m+1)!}. \tag{37}$$

Výraz ve druhé hranaté závorce vztahu (36) je podle vztahu (D5) dodatku roven $r^m P_m^1$, kde P_m^1 je přidružený Legendrův polynom, takže (36) můžeme zapsat ve tvaru:

$$(38) \qquad A = \sum_{m=1}^{\infty} C_m r^m P_m^1 \, .$$

Z potenciálů obdržíme snadno složky pole, dosadíme-li (33) do (2) a (48) do (3):

$$B_z = \sum_{m=0}^{\infty} (-F_m) \frac{\partial}{\partial z} (r^m P_m) \, , \quad B_\varrho = \sum_{m=0}^{\infty} (-F_m) \frac{\partial}{\partial \varrho} (r^m P_m) \, ,$$

$$B_z = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho (r^m P_m^1) \, , \quad B_\varrho = \sum_{m=1}^{\infty} (-C_m) \frac{\partial}{\partial z} (r^m P_m^1) \, .$$

Použijeme-li vztahů (D6) až (D9) dodatku, obdržíme po záměně $m - 1$ na m a dalších úpravách vyjádření pro B_z a B_ϱ:

$$(39) \qquad B_z = \sum_{m=0}^{\infty} T_{z,m} r^m P_m \, ,$$

$$(40) \qquad B_\varrho = \sum_{m=1}^{\infty} T_{\varrho,m} r^m P_m^1 \, .$$

Pro zavedené koeficienty rozvojů $T_{z,m}$ a $T_{\varrho,m}$ pak platí:

$$(41) \qquad T_{z,m} = -(m + 1) F_{m+1} = (m + 1)(m + 2) C_{m+1} \, ,$$

$$(42) \qquad T_{\varrho,m} = +F_{m+1} = -(m + 2) C_{m+1} \, .$$

Z (41) a (42) vyplývají jak vztahy mezi koeficienty F_m a C_m tak mezi $T_{z,m}$ a $T_{\varrho,m}$:

$$(43) \qquad F_m = -(m + 1) C_m \, ,$$

$$(44) \qquad T_{z,m} = -(m + 1) T_{\varrho,m} \, .$$

6. DVOJNÉ ROZVOJE, PODLE z A PAK PODLE ϱ

Zde budeme postupovat opačně než v odst. 3. a 5. Nejprve rozvineme φ a A do mocninných řad podle z, načež jejich koeficienty dále rozvineme do Taylorových řad podle ϱ.

Skalární potenciál φ vyjádříme řadou:

$$(45) \qquad \varphi(\varrho, z) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(\varrho) \, z^m \, .$$

Z (45) vidíme, že funkce

$$(46) \qquad v_0(\varrho) = (\varphi)_{z=0} \, .$$

Derivací (45) podle z a položením $z = 0$, dostaneme pro $v_1(\varrho)$:

(47) $$v_1(\varrho) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -(B_z)_{z=0} \,.$$

Dosadíme-li (45) do (4), dostaneme rekurentní vzorec pro v_m:

(48) $$v_{m+2} = \frac{-1}{(m+1)(m+2)} \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho \frac{dv_m}{d\varrho}\right).$$

Z (48) vidíme, že k určení všech funkcí v_m je nutno znát funkce v_0 a v_1 daných vztahy (46) a (47). Rekurentní vzorec (48) je obtížný pro přímé vyřešení funkcí. Proto funkce v_0 a v_1 ihned vyjádříme Taylorovými rozvoji podle ϱ. Vzhledem k podmínkám souměrnosti (6) a (8) budou v_0 a v_1 obsahovat jen sudé mocniny:

(49) $$v_0(\varrho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s)!} v_0^{(2s)}(0)\, \varrho^{2s} \,,$$

(50) $$v_1(\varrho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s)!} v_1^{(2s)}(0)\, \varrho^{2s} \,.$$

Dosadíme-li (49) do rekurentního vzorce (48), dostaneme pro sudý člen:

(51) $$v_{2k} = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k} (s!)^2\, \varrho^{2(s-k)}}{(2k)!\,(2s)!\,[(s-k)!]^2} v_0^{(2s)}(0) \,.$$

Zavedeme-li $n = s - k$ a za s dosadíme: $s = n + k$, bude:

(52) $$v_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k} [(n+k)!]^2\, \varrho^{2n}}{(2k)!\,(n!)^2\,[2(n+k)]!} v_0^{(2n+2k)}(0) \,; \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \,.$$

Podobně dostaneme pro liché členy:

(53) $$v_{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k} [(n+k)!]^2\, \varrho^{2n}}{(2k+1)!\,(n!)^2\,[2(n+k)]!} v_1^{(2n+2k)}(0) \,; \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \,.$$

Rozdělme nejprve (45) na dva součty a to zvláště pro sudé a zvláště pro liché členy:

(54) $$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1} z^{2k+1}$$

a dosaďme sem z (52) a (53):

(55) $$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k} [(n+k)!]^2\, \varrho^{2n} z^{2k}}{(2k)!\,(n!)^2\,[2(n+k)]!} v_0^{(2n+2k)}(0) + $$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k} [(n+k)!]^2\, \varrho^{2n} z^{2k+1}}{(2k+1)!\,(n!)^2\,[2(n+k)]!} v_1^{(2n+2k)}(0) \,.$$

Místo k pišme $k' - n$, zaměňme pořadí sečítání:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n=k'},$$

načež místo k' pišme opět k. Po úpravě dostaneme:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k 2^{2k}(k!)^2}{[(2k)!]^2} v_0^{(2k)}(0)\right] . \left\{\sum_{n=0}^{n=k} \frac{(-1)^n (2k)! \varrho^{2n} z^{2k-2n}}{2^{2n}[2(k-n)]!(n!)^2}\right\} + \tag{56}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!(2k+1)!} v_1^{(2k)}(0)\right] . \left\{\sum_{n=0}^{n=k} \frac{(-1)^n (2k+1)! \varrho^{2n} z^{2k-2n+1}}{2^{2n}[2(k-n)+1]!(n!)^2}\right\} .$$

Porovnáme-li výraz ve dvojité závorce prvého součtu se vztahem (D4a) dodatku, vidíme, že je roven $r^{2k}P_{2k}$. Podobně výraz ve dvojité závorce druhého součtu je podle (D4b) roven $r^{2k+1}P_{2k+1}$. Porovnáme-li (56) s (33), vidíme, že mají stejný tvar, avšak koeficienty F_m jsou v (56) vyjádřeny jiným způsobem. Použijeme-li ještě (46) a (47), obdržíme:

pro $m = 2k$:

$$F_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k}(k!)^2}{[(2k)!]^2} \left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial\varrho^{2k}}\right)_{00} \tag{57}$$

a pro $m = 2k + 1$:

$$F_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!(2k+1)!} \left(\frac{\partial^{2k}B_z}{\partial\varrho^{2k}}\right)_{00} . \tag{58}$$

Uvážíme-li vztahy (20) a (23) mezi derivacemi, které platí pro libovolné z a tedy i pro $z = 0$, vidíme, že (57) a (58) jsou v souladu se vztahem (32).

Jelikož u vektorového potenciálu A je postup obdobný jako u skalárního potenciálu φ, uvedeme jen výsledky. Je-li:

$$\sigma_0(\varrho) = (A)_{z=0} \tag{59}$$

a

$$\sigma_1(\varrho) = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=0} = -(B_\varrho)_{z=0} , \tag{60}$$

lze A vyjádřit:

(61)

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k 2^{2k+1} k!(k+1)!}{(2k+1)!(2k+2)!} \sigma_0^{(2k+1)}(0)\right] . \left\{\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n (2k+2)! \varrho^{2n+1} z^{2k-2n}}{2^{2n+1}[2(k-n)]!\, n!(n+1)!}\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}(k-1)!\, k!}{(2k-1)!(2k+1)!} \sigma_1^{(2k-1)}(0)\right] . \left\{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n (2k+1)! \varrho^{2n+1} z^{2k-2n-1}}{2^{2n+1}[2(k-n)-1]!\, n!(n+1)!}\right\} .$$

Výraz ve dvojité závorce prvého součtu je podle vztahu (D5b) dodatku roven r^{2k+1} . P^1_{2k+1} a výraz ve dvojité závorce druhého součtu podle (D5a) je roven $r^{2k}P^1_{2k}$. Porovnáním s (38) vidíme, že (61) má tentýž charakter, avšak pro výrazy v hranatých závorkách vztahu (61), což jsou koeficienty C_{2k+1} a C_{2k}, uvážíme-li ještě (59) a (60), platí:

$$C_{2k+1} = \frac{(-1)^k\, 2^{2k+1} k!(k+1)!}{(2k+1)!\,(2k+2)!} \left(\frac{\partial^{2k+1} A}{\partial \varrho^{2k+1}}\right)_{00}, \tag{62}$$

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k\, 2^{2k-1}(k-1)!\, k!}{(2k-1)!\,(2k+1)!} \left(\frac{\partial^{2k-1} B_\varrho}{\partial \varrho^{2k-1}}\right)_{00}. \tag{63}$$

Když však do (62) dosadíme ze (17) a do (63) z (19b), zjistíme, že koeficienty C_{2k+1} podle (62) a C_{2k} podle (63) jsou v souladu s vyjádřením (37), které jsme získali dvojnásobným rozvojem podle prvého způsobu.

7. ZÁVĚR

V práci jsme vyšli ze známých rozvojů pro rotačně souměrné magnetické pole v okolí souměrnosti. Zde je pole v bodě $P(\varrho, z)$ vyjádřeno derivacemi veličin pole na ose podle z v bodě $S(0, z)$. Dalším Taylorovým rozvojem podle z jsme vyjádřili derivace veličin pole v bodě $S(0, z)$ derivacemi v počátku souřadné soustavy $O(0, 0)$. Úpravou dvojných řad jsme ukázali na úzkou souvislost s vyjádřením rozvojů do nekonečných řad podle Legendrových polynomů P_m a P^1_m. V odst. 6 jsme odvodili dvojné řady jiným způsobem. Tyto rozvoje mají stejný charakter jako ty, které byly uvedeny v odst. 5., avšak koeficienty rozvojů jsou vyjádřeny jinak. Vztahy mezi derivacemi veličin pole na ose, uvedené v odst. 4. ukazují, že oba způsoby vedou k týmž výsledkům. Přehled rozvojů, jakož i různého způsobu vyjádření koeficientů rozvojů, přičemž jsme použili dalších vztahů odst. 4., je uveden v tab. 1. (v tabulce bylo užito nezkráceného zápisu derivací).

Dvojné řady resp. vyjádření rozvojů pomocí Legendrových polynomů lze považovat za zobecnění známých rozvojů (viz odst. 3). Je to patrné, když zavedeme nový počátek souřadné soustavy O_0, vůči kterému má starý počátek 0 souřadnici z'. Zkoumaný bod P má vůči novému počátku souřadnici z. Pak např. rozvoj pro skalární potenciál φ dostaneme z (31), když z zaměníme na $z - z'$:

$$\varphi(\varrho, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{m!} \left(\frac{\mathrm{d}^m \varphi_0(z)}{\mathrm{d}z^m}\right)_{z=z'}\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{n^*} \frac{(-1)^n\, m!\, \varrho^{2n}(z - z')^{m-2n}}{2^{2n}(k!)^2(m-2n)!}\right]. \tag{64}$$

Přitom je nutno z' považovat za funkci z.

Tab. 1. Přehled rozvojů a koeficientů řad

řady	vztahy mezi koeficienty
$\varphi = \sum\limits_{m=0}^{\infty} F_m r^m P_m$	$F_m = -(m+1)\, C_m \quad (m \neq 0)$
$A = \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m r^m P_m^1$	$T_{z,m} = -(m+1)\, F_{m+1} = (m+1)(m+2)\, C_{m+1}$
$B_z = \sum\limits_{m=0}^{\infty} T_{z,m} r^m P_m$	$T_{\varrho,m} = F_{m+1} = -(m+2)\, C_{m+1}$
$B_\varrho = \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_{\varrho,m} r^m P_m^1$	$T_{z,m} = -(m+1)\, T_{\varrho,m}$

vyjádření koeficientů rozvoje

pomocí potenciálů	F_m $(m \geqq 0)$	$\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}\right)_{00}$	F_{2k} $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{[(2k)!]^2}\left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial \varrho^{2k}}\right)_{00}$
			F_{2k+1} $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!\,(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial \varrho^{2k}\,\partial z}\right)_{00}$
	C_m $(m \geqq 1)$	—	C_{2k} $(k \geqq 1)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!\,(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k} A}{\delta \varrho^{2k-1}\,\partial z}\right)_{00}$
			C_{2k+1} $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{[(2k+1)!]^2}\left(\frac{\partial^{2k+1} A}{\partial \varrho^{2k+1}}\right)_{00}$
pomocí složek pole	F_m $(m \geqq 1)$	$\frac{-1}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1} B_z}{\partial z^{m-1}}\right)_{00}$	F_{2k} $(k \geqq 1)$	$\frac{(-1)^{k+1}\, 2^{2k}(k!)^2}{[(2k)!]^2}\left(\frac{\partial^{2k-1} B_\varrho}{\partial \varrho^{2k-1}}\right)_{00}$
			F_{2k+1} $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^{k+1}\, 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!\,(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k} B_z}{\partial \varrho^{2k}}\right)_{00}$
	C_m $(m \geqq 1)$	$\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m-1} B_z}{\partial z^{m-1}}\right)_{00}$	C_{2k} $(k \geqq 1)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!\,(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k-1} B_\varrho}{\partial \varrho^{2k-1}}\right)_{00}$
			C_{2k+1} $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!\,(2k+2)!}\left(\frac{\partial^{2k} B_z}{\partial \varrho^{2k}}\right)_{00}$
	$T_{z,m}$ $(m \geqq 0)$	$\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m B_z}{\partial z^m}\right)_{00}$	$T_{z,2k}$ $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{[(2k)!]^2}\left(\frac{\partial^{2k} B_z}{\partial \varrho^{2k}}\right)_{00}$
			$T_{z,2k+1}$ $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^{k+1}\, 2^{2k+1}(k!)\,(k+1)!}{[(2k+1)!]^2}\left(\frac{\partial^{2k+1} B_\varrho}{\partial \varrho^{2k+1}}\right)_{00}$
	$T_{\varrho,m}$ $(m \geqq 1)$	$\frac{-1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^m B_z}{\partial z^m}\right)_{00}$	$T_{\varrho,2k}$ $(k \geqq 1)$	$\frac{(-1)^{k+1}\, 2^{2k}(k!)^2}{(2k)!\,(2k+1)!}\left(\frac{\partial^{2k} B_z}{\partial \varrho^{2k}}\right)_{00}$
			$T_{\varrho,2k+1}$ $(k \geqq 0)$	$\frac{(-1)^k\, 2^{2k}(k!)^2}{[(2k+1)!]^2}\left(\frac{\partial^{2k+1} B_\varrho}{\delta \varrho^{2k+1}}\right)_{00}$

DODATEK

Na základě [1] [3] [4] a [5] bylo v práci [8] ukázáno, že Legendrovy polynomy $P_m(\vartheta)$ a $P^1_m(\vartheta)$ lze vyjádřit ve tvaru:

(D1) $$P_m(\vartheta) = \sum_{n=0}^{n=n^*} \frac{(-1)^n\, m!}{2^{2n}(n!)^2\,(m-2n)!} \sin^{2n}\vartheta \cos^{m-2n}\vartheta\,; \quad (m \geqq 0)\,,$$

kde

(D1a) $$n^* = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{pro } m \text{ sudé} \\[2mm] \dfrac{m-1}{2} & \text{pro } m \text{ liché} \end{cases},$$

a

(D2)

$$P^1_m(\vartheta) = \sum_{n=0}^{n=\bar{n}} \frac{(-1)^n\,(m+1)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!\,(m-2n-1)!} \sin^{2n+1}\vartheta \cos^{m-2n-1}, \quad (m \geqq 1)\,,$$

kde

(D2a) $$\bar{n} = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2} & \text{pro } m \text{ liché} \\[2mm] \dfrac{m-2}{2} & \text{pro } m \text{ sudé} \end{cases}.$$

Vyjádřeme součiny $r^m P_m$ a $r^m P^1_m$, kde P_m a P^1_m jsou dány vztahy (D1) a (D2), válcovými souřadnicemi:

(D3) $$\varrho = r \sin\vartheta \quad \text{a} \quad z = r\cos\vartheta\,.$$

Tak obdržíme:

(D4) $$r^m P_m = \sum_{n=0}^{n=n^*} \frac{(-1)^m\, m!\, \varrho^{2n} z^{m-2n}}{2^{2n}(n!)^2\,(m-2n)!}\,,$$

(D5) $$r^m P^1_m = \sum_{n=0}^{n=\bar{n}} \frac{(-1)^n\,(m+1)!\, \varrho^{2n+1} z^{m-2n-1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!\,(m-2n-1)!}\,.$$

Položíme-li $m = 2k$ pro m sudé a $m = 2k + 1$ pro m liché, dostaneme:

(D4a) $$r^{2k} P_{2k} = \sum_{n=0}^{n=k} \frac{(-1)^n\,(2k)!\, \varrho^{2n} z^{2(k-n)}}{2^{2n}(n!)^2\,[2(k-n)]!}\,,$$

(D4b) $$r^{2k+1} P_{2k+1} = \sum_{n=0}^{n=k} \frac{(-1)^n\,(2k+1)!\, \varrho^{2n} z^{2(k-n)+1}}{2^{2n}(n!)^2\,[2(k-n)+1]!}\,,$$

(D5a)
$$r^{2k}P^1_{2k} = \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{(-1)^n (2k+1)!\, \varrho^{2n+1} z^{2(k-n)-1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!\,[2(k-n)-1]!},$$

(D5b)
$$r^{2k+1}P^1_{2k+1} = \sum_{n=0}^{n=k} \frac{(-1)^n (2k+2)!\, \varrho^{2n+1} z^{2(k-n)}}{2^{2n+1} n!(n+1)!\,[2(k-n)]!}.$$

Vztahy (D4a), (D4b) a (D5b) platí pro $k \geqq 0$, kdežto (D5a) pro $k \geqq 1$.

Dále uvedeme vztahy, potřebné pro vyjádření složek magnetické indukce z potenciálů. Derivujme (D4) podle z. Jelikož platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^{m-2n} = \begin{cases} (m-2n)\, z^{m-2n-1} & \text{pro } m > 2n \\ 0 & \text{pro } m = 2n \end{cases},$$

dostaneme po úpravě:

$$\frac{\partial}{\partial z}(r^m P_m) = m \sum_{n=0}^{n=\tilde{n}} \frac{(-1)^n (m-1)!\, \varrho^{2n} z^{(m-1)-2n}}{2^{2n}(n!)^2\,[(m-1)-2n]!},$$

kde

$$\tilde{n} = \begin{cases} \dfrac{(m-1)}{2} & \text{pro } (m-1) \text{ sudé} \\[2mm] \dfrac{(m-1)-1}{2} & \text{pro } (m-1) \text{ liché} \end{cases}.$$

Porovnáním s (D4) vidíme, že součet je vlastně $r^{m-1}P_{m-1}$, takže platí:

(D6)
$$\frac{\partial}{\partial z}(r^m P_m) = \begin{cases} m r^{m-1} P_{m-1} & \text{pro } m \geqq 1\,, \\ 0 & \text{pro } m = 0\,. \end{cases}$$

Pro $m = 0$ je derivace rovna nule, neboť pravá strana (D4) obsahuje jen jeden konstantní člen. Podobným způsobem dostaneme ostatní vztahy:

(D7)
$$\frac{\partial}{\partial \varrho}(r^m P_m) = \begin{cases} -r^{m-1} P^1_{m-1} & \text{pro } m \geqq 2 \\ 0 & \text{pro } m = 0 \text{ a } 1\,, \end{cases}$$

(D8)
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho(r^m P^1_m) = m(m+1)\, r^{m-1} P_{m-1} \quad \text{pro} \quad m \geqq 1\,.$$

(D9)
$$\frac{\partial}{\partial z}(r^m P^1_m) = \begin{cases} (m+1)\, r^{m-1} P^1_{m-1} & \text{pro } m \geqq 2 \\ 0 & \text{pro } m = 1\,. \end{cases}$$

Literatura

[1] *Courant P. - Hilbert D.:* Metody matěmatičeskoj fiziki I. 3. vyd., Gos. izdat. tech. teoret. lit., Moskva—Leningrad 1951.

[2] *Glaser W.:* Grundlagen der Elektronenoptik. Springer Verl. Wien 1952.

[3] *Hobson E. W.:* The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge Univ. Press 1931.

[4] *Jahnke E. - Emde F.:* Tafeln höherer Funktionen 5. vyd., Teubner, Leipzig 1952.

[5] Математический анализ, вычислениа элементарных функций. Справочная математическая библиотека. Физматгиз. Москва 1963.

[6] *Pavlík K.:* Cívková sonda pro měření rotačně souměrných magnetických polí. Elektrotechnický časopis 1968 č. 9, s. 666—682.

[7] *Stratton J. A.:* Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha 1961.

[8] *Veselý L.:* Vyjádření rotačně souměrných magnetických polí cívek rozvoji do nekonečných řad podle Legendrových polynomů. Elektrotechnický časopis 1968 č. 6, s. 401—423.

Summary

SOME PROPERTIES OF THE POWER SERIES EXPANSIONS OF THE QUANTITIES DESCRIBING AXIALLY SYMMETRIC MAGNETIC FIELD IN A NEIGHBORHOOD OF THE AXIS OF SYMMETRY AND THEIR RELATION TO THE LEGENDRE POLYNOMIALS

LUMÍR VESELÝ

The paper starts with the known expansions for the scalar and vector potentials of an axially symmetric magnetic field in a neighborhood of the axis of symmetry into power series. The coefficients of the expansions for the field at a point $P(\varrho, z)$ are expressed by partial derivatives of the magnetic induction with respect to z at the point $P'(\varrho = 0, z)$. These expansions result in certain relations for the higher order derivatives of the quantities describing the field along the axis. Further on two kinds of double expansions are given, the field at a point $P(\varrho, z)$ being expressed by the derivatives of the field quantities at the origin $O(\varrho = 0, z = 0)$. It is shown that both ways, due to the relations among the derivatives of the field quantities along the axis, give the same results. According to the general properties of the Legendre polynomials, the double expansions are in fact expansions into harmonic series expressed by the Legendre polynomials.

Adresa autora: Ing. *Lumír Veselý*, CSc., Vojenská akademie Antonína Zápotockého, Brno.