Miroslav Šisler

Über eine Relaxationsmethode

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 6, 478–488

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103197`

ÜBER EINE RELAXATIONSMETHODE

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 20. November 1967.)

1. In dem Artikel [2] wurde die Konvergenzgeschwindigkeit eines gewissen Iterationsverfahrens für die Lösung des linearen Gleichungsystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ untersucht. Es handelte sich um die mit Hilfe der Iterationsformel

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{b}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

definierte Methode, wo $\mathbf{P}_k = k\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_k = (k-1)\,\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1$, $k > 0$. Dabei $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$ ist eine solche Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$, dass der Spektralradius $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$ der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ kleiner als 1 ist. In dem Artikel [2] wurde die Frage der Wahl des optimalen Parameters k untersucht; der optimale Parameter ist dabei eine solche Zahl $k > 0$, dass der Spektralradius $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ minimal ist und das Verfahren (1) am schnellsten konvergiert. In dem Artikel [2] wurde die Optimalizationsfrage nur für den Fall des reellen Spektrum der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ vollständig gelöst, während im Falle des komplexen Spektrum der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ nur gewisse Abschätzungen für den optimalen Parameter gefunden wurden. In dieser Arbeit ist die Frage der Wahl des optimalen Parameters im Falle des komplexen Spektrum der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ganz allgemein gelöst.

2. Der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$ drückt folgender Satz aus:

2.1. *Seien λ_i, $i = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$, $k \neq 0$. Dann gelten für die Eigenwerte $\mu_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ der Matrix $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$ folgende Formeln:*

$$\mu_i(k) = \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2}$$

(*Es ist offensichtlich $\lambda_i = \mu_i(1)$.*)

Der Beweis dieser Behauptung wurde in dem Artikel [2] angegeben.

Definiert man jetzt für $k \neq 0$ die Funktionen

$$g_i(k) = |\mu_i(k)|^2\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

In folgender Deutung benutzt man die Bezeichnung $\lambda_i - 1 = \Lambda_i$. Dann gilt die Formel

$$(3) \qquad g_i(k) = \left|\frac{\Lambda_i}{k} + 1\right|^2 = \frac{|\Lambda_i|^2}{k^2} + \frac{2\operatorname{Re}\Lambda_i}{k} + 1\,.$$

2.2. *Die Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$ besitzen folgende Eigenschaften:*

a) sie haben Sinn für alle reelle Zahlen $k \neq 0$;

b) sie sind für alle $k \neq 0$ nichtnegativ;

c) für $k < 0$ es gilt die Ungleichung $g_i(k) \geqq 1$;

d) $g_i(1) = |\lambda_i|^2$;

e) die Funktion g_i erlangt für $k_i = |\Lambda_i|^2/|\operatorname{Re}\Lambda_i|$ ihren Minimalwert im Intervalle $(0, \infty)$ und es ist $g_i(k_i) = 1 - \operatorname{Re}^2 \Lambda_i/|\Lambda_i|^2$;

f) die Funktion g_i ist sinkend im Intervalle $(0, k_i\rangle$ und wachsend im Intervalle $\langle k_i, \infty)$;

g) g_i ist konkav im Intervalle $(0, \frac{3}{2}k_i)$ und konvex im Intervalle $\langle\frac{3}{2}k_i, \infty)$;

h) $\lim_{k\to 0} g_i(k) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} g_i(k) = 1$.

Der Beweis dieser Behauptung ist klar. Der Durchlauf der Funktion g_i für $k > 0$ ist an dem Bild 1 entwirft (in Hinsicht auf den Punkt c) man beschränkt sich im Folgendem nur auf den Intervall $0 < k < \infty$).

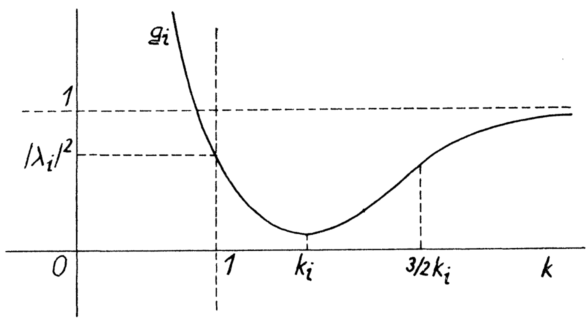

Bild 1.

Nach dem Punkte e) des Hilfsatzes 2.2 ist es klar, dass im Falle, wenn λ_i eine reelle Eigenwert der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ist, erlangt die Funktion g_i für $k_i = |\Lambda_i| = |\lambda_i - 1|$ ihren Minimalwert 0. Falls die Eigenwert λ_i nicht reell ist, es gilt immer $g_i(k) > 0$.

Weitere Bedingungen für k sind durch die folgende Hilfsätze angegeben:

2.3. *Seien λ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$, $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1) < 1$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$ gilt, ist die Erfüllung der Ungleichung*

$$\max_i \frac{|\Lambda_i|^2}{2|\operatorname{Re}\Lambda_i|} < k < \infty\,.$$

2.4. *Sei* $M = \max_i |\lambda_i| = \varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$ *und die Zahl k lege im Intervalle*

$$\frac{1 + M}{2} < k < \infty\,.$$

Dann ist $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$.

Der Beweis beiden Sätze folgt sofort nach der Beziehung (3) (hier ist $g_i(k) < 1$) und nach der Ungleichung $|\lambda_i|/2|\operatorname{Re} \Lambda_i| < (1 + M)/2$, $i = 1, \ldots, n$.

Untersucht man jetzt die Beziehung zwischen den Funktionen g_i, g_j, $j \neq i$. Führt man jetzt die folgende Bezeichnung ein:

$$k_{ij} = \frac{|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2}{2 \operatorname{Re}(\Lambda_j - \Lambda_i)}\,.$$

Dann gilt folgender Hilfsatz:

2.5. *Sei* $|\lambda_i| \leqq |\lambda_j|$. *Es können folgende zwei Fälle eintretten: I)* $k_{ij} \leqq 0$ *oder die Zahl an der linken Seite der Ungleichung hat keinen Sinn. Dann gilt für alle* $k > 0$ *die Ungleichung* $g_i(k) \leqq g_j(k)$; *II)* $k_{ij} > 0$. *Dann die graphische Darstellungen der Funktionen* g_i, g_j *schneiden sich im einen einzigen Punkte* k_{ij}.

Beweis. I) a) Falls der Ausdruck $k_{ij} = (|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2)/2 \operatorname{Re}(\Lambda_j - \Lambda_i)$ keinen Sinn hat, es gilt $\operatorname{Re}(\Lambda_j - \Lambda_i) = 0$, d.h. $\operatorname{Re} \Lambda_j = \operatorname{Re} \Lambda_i$. In Hinsicht auf die Ungleichung $|\lambda_i| \leqq |\lambda_j|$, es gilt $|\lambda_i|^2 \leqq |\lambda_j|^2$ und falls man setzt $\lambda_i = \Lambda_i + 1$, $\lambda_j = \Lambda_j + 1$, bekommt man die Ungleichung $|\Lambda_i|^2 \leqq |\Lambda_j|^2$. Da $k > 0$ ist, es gilt ferner

$$\frac{|\Lambda_i|^2}{k^2} + \frac{2 \operatorname{Re} \Lambda_i}{k} + 1 \leqq \frac{|\Lambda_j|^2}{k^2} + \frac{2 \operatorname{Re} \Lambda_j}{k} + 1$$

oder $g_i(k) \leqq g_j(k)$.

b) Sei $k_{ij} = (|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2)/2 \operatorname{Re}(\Lambda_j - \lambda_i) \leqq 0$. Dann ist entweder $|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2 \leqq 0$ und $\operatorname{Re}(\Lambda_j - \Lambda_i) > 0$ oder $|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2 \geqq 0$ und $\operatorname{Re}(\Lambda_j - \Lambda_i) < 0$. Im ersten Falle ist dann

$$|\Lambda_i|^2 \leqq |\Lambda_j|^2\,, \quad \operatorname{Re} \Lambda_i < \operatorname{Re} \Lambda_j\,,$$

woher schon nach (3) folgt, dass $g_i(k) < g_j(k)$ ist. Der zweite Fall kann nicht eintretten, denn nach den Ungleichungen

$$\operatorname{Re} \Lambda_i > \operatorname{Re} \Lambda_j\,, \quad |\lambda_i| \leqq |\lambda_j|$$

folgt sofort die Ungleichung

$$|\lambda_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_i + 1 < |\lambda_j|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_j + 1$$

oder $|\Lambda_i|^2 < |\Lambda_j|^2$. Das ist aber ein Widerspruch mit der Ungleichung $|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2 \geqq 0$.

II) Legt man $g_i(k) = g_j(k)$. Dann gilt nach (3)

$$\frac{|\Lambda_i|^2}{k^2} + \frac{2 \operatorname{Re} \Lambda_i}{k} + 1 = \frac{|\Lambda_j|^2}{k^2} + \frac{2 \operatorname{Re} \Lambda_j}{k} + 1$$

oder

$$k = \frac{|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2}{2 \operatorname{Re} (\Lambda_j - \Lambda_i)} = k_{ij} .$$

Da $k_{ij} > 0$ nach der Voraussetzung ist, schneiden sich die graphische Darstellungen der Funktionen g_i, g_j im einen einzigen Punkte $k = k_{ij} > 0$. Dadurch ist der Hilfsatz 2.5 beweisen.

Befasst sich man jetzt mit der Frage der Bestimmung des optimalen Parameters $k > 0$, für welchen die Zahl $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ minimal ist. Es ist klar, dass die Zahl $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ ihren Minimalwert annimmt (in der Abhängigkeit von dem Parameters k), wenn die Zahl $\max_i \sqrt{g_i(k)}$ minimal ist; es ist also

$$\min_k \varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) = \min_k \max_i \sqrt{g_i(k)} . \tag{4}$$

Bezeichnet man gleich wie im Hilfsatze 2.2

$$k_i = \frac{|\Lambda_i|^2}{|\operatorname{Re} \Lambda_i|} .$$

Dann gilt folgender Satz:

2.6. *Sei L die Menge aller Zahlen k_i, k_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$. Dann gilt*

$$\min_k \varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) = \min_{k \in L} \max_{i=1,\dots,n} \sqrt{g_i(k)} . \tag{5}$$

Sei jetzt $k_0 \in L$ ein solcher Parameter, für welchen der Ausdruck $\max_{i=1,\dots,n} \sqrt{g_i(k)}$ seinen Minimalwert annimmt und sei $k_0 = k_p = k_{qr}$, wo p, q, r gewisse Indexe aus der Menge $\{1, \dots, n\}$ sind. Dann ist

$$\min_k \varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) = \varrho(\mathbf{P}_{k_0}^{-1}\mathbf{Q}_{k_0}) = \max_{p,q,r} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{Re}^2 \Lambda_p}{|\Lambda_p|^2}\right)}, \left| \frac{2\Lambda_q \operatorname{Re} (\Lambda_r - \Lambda_q)}{|\Lambda_q|^2 - |\Lambda_r|^2} \right| \right] . \tag{6}$$

Beweis. Nach dem Hilfsatze 2.2 und der Beziehung (4) folgt sofort, dass es genügt nur solche Werte der Parameters k nehmen, für welche irgendeine von Funktionen g_i ihren Minimalwert annimmt, oder solche Werte, für welche die graphische Darstellungen irgendwelcher zwei Funktionen g_i, g_j sich schneiden. Es genügt also nur die Werte $k \in L$ nehmen. Falls nun der Ausdruck $\max_{i=1,\dots,n} \sqrt{g_i(k)}$ seinen Maximalwert für eine gewisse Zahl $k_0 \in L$ erlangt und $k_0 = k_p = k_{qr}$, wo p, q, r gewisse Indexe aus der Menge $\{1, \dots, n\}$ sind, gleicht die Zahl $\varrho(\mathbf{P}_{k_0}^{-1}\mathbf{Q}_{k_0})$ dem zweiten Wurzel von der Wert jener Funktion g_p bzw. g_q, welche im Punkte $k_0 = k_p$ ihren Minimalwert annimmt bzw. deren graphische Darstellung im Punkte $k_0 = k_{qr}$ mit der graphischen Darstellung der Funktion g_r sich schneidet und deren Wert im Punkte k_0 von allen diesen Werte maximal ist. Da

$$\left|\frac{\Lambda_p}{k_p} + 1\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{Re}^2\,\Lambda_p}{|\Lambda_p|^2}\right)} \quad \text{und} \quad \left|\frac{\Lambda_q}{k_{qr}} + 1\right| = \left|\frac{2\Lambda_q\,\mathrm{Re}\,(\Lambda_r - \Lambda_q)}{|\Lambda_q|^2 - |\Lambda_r|^2}\right|$$

gilt, ist der Satz 2.6 bewiesen.

Im Falle, dass die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ im Einheitskreise in gewisser spezieller Art ausgebreitet sind, kann man leicht den optimalen Parameter k nach dem folgender Satze feststellen.

2.7. *Sei $|\lambda_i| \leqq |\lambda_n|$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und es gelte für jede $i = 1, \ldots, n$ eine von folgenden Möglichkeiten*:

$$k_{in} \leqq 0 \tag{7}$$

oder der Ausdruck k_{in} hat keinen Sinn;

$$0 < k_{in} \leqq k_n\,, \quad |\Lambda_n|^2 < |\Lambda_i|^2\,, \tag{8}$$

$$k_n \leqq k_{in}\,, \quad |\Lambda_n|^2 > |\Lambda_i|^2\,. \tag{9}$$

Dann ist

$$\min_k \varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) = \varrho(\mathbf{P}_{k_n}^{-1}\mathbf{Q}_{k_n}) = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{Re}^2\,\Lambda_n}{|\Lambda_n|^2}\right)} \quad \text{\textit{für}} \quad k_n = \frac{|\Lambda_n|^2}{|\mathrm{Re}\,\Lambda_n|}\,. \tag{10}$$

Beweis. I) Bezeichnet man N_1 die Menge aller $i \in \{1, \ldots, n\}$ für welche die Ungleichung (7) gilt. Es folgt dann nach dem Hilfsatze 2.5, dass für $k > 0$ die Ungleichungen $g_i(k) \leqq g_n(k)$ für alle $i \in N_1$ gelten. Es ist also nach 2.6

$$\min_k \max_{i \in N_1 \cup \{n\}} \sqrt{g_i(k)} = g_n(k_n) = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{Re}^2\,\Lambda_n}{|\Lambda_n|^2}\right)}, \quad k_n = \frac{|\Lambda_n|^2}{|\mathrm{Re}\,\Lambda_n|}\,.$$

II) Bezeichnet man N_2 die Menge aller i, für welche die Bedingung (8) erfüllt ist. Dann folgt für jede $i \in N_2$ nach der Ungleichung (8) die Ungleichung

$$|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_j|^2 \leqq k_n \,.\, 2\,\mathrm{Re}\,(\Lambda_n - \Lambda_i)\,,$$

da $|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_n|^2 > 0$ und also auch $\mathrm{Re}\,(\Lambda_n - \Lambda_i) > 0$ ist. Nach dieser Ungleichung folgt aber sofort die Ungleichung $g_i(k_n) \leqq g_n(k_n)$. In Hinsicht auf das Faktum, dass die Funktion g_n im Punkte k_n ihren absoluten Minimalwert annimmt und in Hinsicht auf die vorhergehende Ungleichung, es gilt ähnlicherweise wie im Teile I) des Beweises die Beziehung

$$\min_k \max_{i \in N_2 \cup \{n\}} \sqrt{g_i(k)} = g_n(k_n)\,.$$

III) Bezeichnet man N_3 die Menge aller i, für welche die Bedingung (9) gilt. Es gilt dann für jede $i \in N_3$ die Ungleichung

$$|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_n|^2 \leqq k_n \,.\, 2 \operatorname{Re} (\Lambda_n - \Lambda_i) \,,$$

da $|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_n|^2 < 0$ und also $\operatorname{Re}(\Lambda_n - \Lambda_i) < 0$ ist. Durch die einfache Zurichtung bekommt man wieder die Ungleichung $g_n(k_n) \geqq g_i(k_n)$. Ähnlicherweise, wie im Teile II), es gilt jetzt nach der vorhergehenden Ungleichung

$$\min_k \max_{i \in N_3 \cup \{n\}} \sqrt{g_i(k)} = g_n(k_n) \,.$$

Da $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup \{n\} = \{1, \ldots, n\}$ gilt, ist der Satz 2.7 bewiesen.

Bemerkung. Die Ungleichungen $|\Lambda_n|^2 < |\Lambda_i|^2$ bzw. $|\Lambda_n|^2 > |\Lambda_i|^2$ im Satze 2.7 (sehe (8) und (9)) kann man durch die Ungleichungen $\operatorname{Re} \Lambda_n > \operatorname{Re} \Lambda_i$ bzw. $\operatorname{Re} \Lambda_n <$ $< \operatorname{Re} \Lambda_i$ ersetzen.

2.8. *Die Zahle k_0, für welche der Spektralradius $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ seinem Minimalwert erlangt, liegt im Intervalle*

$$0 < k_0 < 2 \,.$$

Beweis. Man kann leicht feststellen, dass für den optimalen Parameter k_0 die Ungleichung

$$k_0 \leqq \max_i \frac{|\Lambda_i|^2}{|\operatorname{Re} \Lambda_i|}$$

gilt. Wenn nämlich die Ungleichung

$$k_0 > \max_i \frac{|\Lambda_i|^2}{|\operatorname{Re} \Lambda_i|}$$

gelte, würden nach dem Satze 2.2 alle Funktionen g_i, $i = 1, \ldots, n$ im Punkte k_0 wachsend sein und es würde also eine solche Zahl $k_1 < k_0$ (genügend nähe zur k_0) existieren, dass es die Ungleichung

$$\max_i \sqrt{g_i(h)} < \max_i \sqrt{g_i(k_0)}$$

gelten würde. Das ist aber ein Widerspruch mit der Voraussetzung, dass

$$\min_k \max_i \sqrt{g_i(k)} = \max_i \sqrt{g_i(k_0)}$$

gilt.

Für jede i es gilt nun die Ungleichung $|\Lambda_i|^2/|\operatorname{Re} \Lambda_i| < 2$. Wäre nämlich $|\Lambda_i|^2/|\operatorname{Re} \Lambda_i| \geqq 2$, es würde sukzessiv

$$|\Lambda_i|^2 \geqq 2|\operatorname{Re} \Lambda_i| \,, \quad |\Lambda_i|^2 + 2 \operatorname{Re} \Lambda_i + 1 > 1 \,, \quad |\Lambda_i + 1|^2 > 1$$

gelten und also $|\lambda_i|^2 > 1$. Das ist aber ein Widerspruch. Dadurch ist der Satz 2.8 bewiesen.

Im speziellen Falle, wenn die Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ das reelle Spektrum hat, es gelten die Sätze 2.2 und 2.3 aus dem Artikel [2].

3. Den Satz 2.7 kann man leicht geometrich veranschaulichen, wie man in Folgendem sehen wird. In Hinsicht darauf, dass die Zahlen λ_i im Kreise liegen, dessen Mittelpunkt mit dem Punkte [0; 0] der Gaussebene verschmelzt und dessen Radius der Zahl $|\lambda_n|$ gleicht, liegen die Zahlen Λ_i im Kreise K, dessen Mittelpunkt der Punkt [-1; 0] ist und dessen Radius der Zahl $|\lambda_n|$ gleicht (siehe Bild 2). Nach der Bedingung (7) des Satzes 2.7 nun folgt, dass es zugleich $|\Lambda_n| > |\Lambda_i|$ und $\operatorname{Re} \Lambda_i < \operatorname{Re} \Lambda_n$ gelten muss; das bedeutet aber, dass Λ_i im Gebiete A an dem Bilde 2 liegt.

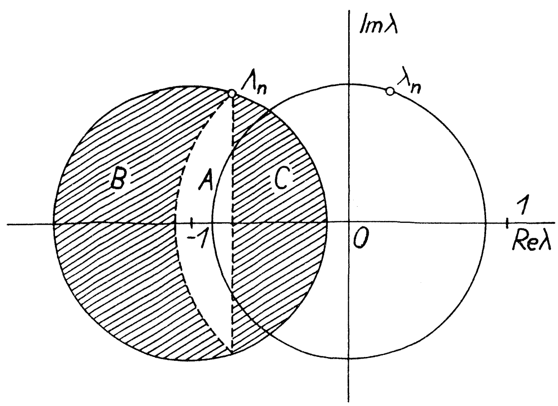

Bild 2.

Nach der Bedingung (8) folgt sofort, dass $|\Lambda_n| < |\Lambda_i|$ und $\operatorname{Re} \Lambda_i < \operatorname{Re} \Lambda_n$ gilt, sodass Λ_i im Gebiete B liegen muss. Nach der Bedingung (9) bekommt man endlich, dass $|\Lambda_n| > |\Lambda_i|$ und $\operatorname{Re} \Lambda_i > \operatorname{Re} \Lambda_n$, sodass Λ_i im Gebiete C liegt. (Die Gebiete B und C sind an dem Bilde 2 ausschrafiert.)

Man kann nun leicht beweisen, dass nach den Ungleichungen (8) und (9) ferner folgt, dass Λ_i im Innern oder am Umfange des mit der Kreislinie von der Gleichung

$$\operatorname{Re}^2 \Lambda + \operatorname{Im}^2 \Lambda - 2\frac{|\Lambda_n|^2}{\operatorname{Re} \Lambda_n} \operatorname{Re} \Lambda + |\Lambda_n|^2 = 0 \tag{11}$$

beschrankten Kreises K_1 liegen muss. Nach der Ungleichung (8) folgt nämlich (in Hinsicht auf $\operatorname{Re}(\Lambda_n - \Lambda_i) > 0$) die Ungleichung

$$|\Lambda_i|^2 - |\Lambda_n|^2 \leqq 2 \operatorname{Re}(\Lambda_n - \Lambda_i)\frac{|\Lambda_n|^2}{|\operatorname{Re} \Lambda_n|}$$

oder

$$\mathrm{Re}^2\,\Lambda_i + \mathrm{Im}^2\,\Lambda_i - 2\,\frac{|\Lambda_n|^2}{\mathrm{Re}\,\Lambda_n}\,\mathrm{Re}\,\Lambda_i + |\Lambda_n|^2 \leqq 0\,.$$

Diesselbe Ungleichung folgt auch nach der Ungleichung (9), da hier $\mathrm{Re}\,(\Lambda_n - \Lambda_i) < 0$ ist. Falls man die Gleichung (11) in der Form

$$\left(\mathrm{Re}\,\Lambda - \frac{|\Lambda_n|^2}{\mathrm{Re}\,\Lambda_n}\right)^2 + \mathrm{Im}^2\,\Lambda = |\Lambda_n|^2 \left(\frac{|\Lambda_n|^2}{\mathrm{Re}^2\,\Lambda_n} - 1\right)$$

schreibt, sieht man gleich, dass der Mittelpunkt des Kreises K_1 an der Reellachse liegt, die Koordinaten

$$S \equiv \left[\frac{|\Lambda_n|^2}{\mathrm{Re}\,\Lambda_n}\,;\,0\right]$$

hat und der Radius des Kreises K_1 gleicht der Zahl

$$r = |\Lambda_n|\,\sqrt{\left(\frac{|\Lambda_n|^2}{\mathrm{Re}^2\,\Lambda_n} - 1\right)}\,.$$

Durch die Ersetzung $\Lambda = \Lambda_n$ in die Gleichung (11) man stellt sofort fest, dass die Grenzkreislinie des Kreises K_1 durch die Zahl Λ_n geht.

Es ist nun klar, dass im Falle, wenn alle Zahlen Λ_i im gemeinsamen Teile der Kreise K und K_1 liegen, die Voraussetzungen des Satzes 2.7 erfüllt sind und der optimale Parameter k der Zahl $k_n = |\Lambda_n|^2/|\mathrm{Re}\,\Lambda_n|$ dann gleich ist.

Die Kreise K und K_1 können im Grenzfalle verschmelzen. Das tritt damals ein, wenn der Mittelpunkt des Kreises K_1 mit dem Mittelpunkte des Kreises K identisch ist, d.h. wenn

$$\frac{|\Lambda_n|^2}{\mathrm{Re}\,\Lambda_n} = -1$$

ist. Diese Gleichung tritt aber dann und nur dann ein, wenn der Punkt Λ_n an der Kreislinie mit der Gleichung

$$(\mathrm{Re}\,\Lambda + \tfrac{1}{2})^2 + \mathrm{Im}^2\,\Lambda = \tfrac{1}{4}$$

liegt. (Das ist die Kreislinie mit dem Mittelpunkt im Punkte $[-\frac{1}{2}; 0]$ und mit dem Radius $\frac{1}{2}$.) In diesem Falle wurden die Voraussetzungen des Satzes 2.7 automatisch bei jedem Ausgebreitung der Zahlen Λ_i im Kreise K erfüllt. Da der optimale Parameter in diesem Falle $k_n = |\Lambda_n|^2/|\mathrm{Re}\,\Lambda_n| = 1$ ist, hat schon die ursprüngliche Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ den minimalen Spektralradius, welcher mit Hilfe der unseren Methode nicht verkleinert werden kann.

Weitere besondere Situation tritt ein, wenn der im Absolutbetrage grösster Eigenwert λ_n der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ reell ist. Dann ist auch die Zahl Λ_n reell und es ist $|\Lambda_n| =$

$= -\operatorname{Re} \Lambda_n$, $|\Lambda_n|^2/\operatorname{Re} \Lambda_n = \Lambda_n$ und $|\Lambda_n| \sqrt{(|\Lambda_n|^2 \operatorname{Re}^2 \Lambda_n - 1)} = 0$. Der Kreis K_1 hat dann den Mittelpunkt im Punkte $[\Lambda_n; 0]$ und den Radius 0; die Voraussetzungen des Satzes 2.7 sind also nur im Falle, dass die Zahl λ_n der n-fache Eigenwert der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ist. Im Falle des reellen Spektrum der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ kann man allerdings die Sätze 2.2 und 2.3 aus dem Artikel [2] benutzen.

Bemerkt man noch, dass bei der praktischen Beglaubigung der Voraussetzungen des Satzes 2.7, genügt nur den Maximalen Eigenwert der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ zu kennen, wogegen für die übrige Eigenwerte reicht man nur mit sehr groben Abschätzungen ihren Lage aus.

4. Zeigt man nun die Situation an dem konkreten Beispiele. Setzt man voraus, dass die im Absolutbetrage grösste Eigenwert der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ die Zahl

$$\lambda_n = 0{,}6 + 0{,}7i$$

ist. Der Spektralradius ist dann $|\lambda_n| = 0{,}92$, was nur die sehr schlechte Konvergenz der ursprünglichen Methode bezeichnet. Nun ist

$$\Lambda_n = -0{,}4 + 0{,}7i\,,$$
$$|\Lambda_n|^2 = 0{,}16 + 0{,}49 = 0{,}65\,, \quad |\Lambda_n| = 0{,}81\,.$$

Ferner ist

$$\frac{|\Lambda_n|^2}{\operatorname{Re} \Lambda_n} = \frac{0{,}65}{-0{,}4} = -1{,}62\,,$$

und

$$|\Lambda_n| \sqrt{\left(\frac{|\Lambda_n|^2}{\operatorname{Re}^2 \Lambda_n} - 1\right)} = 0{,}81 \sqrt{\left(\frac{0{,}65}{0{,}16} - 1\right)} = 1{,}41\,.$$

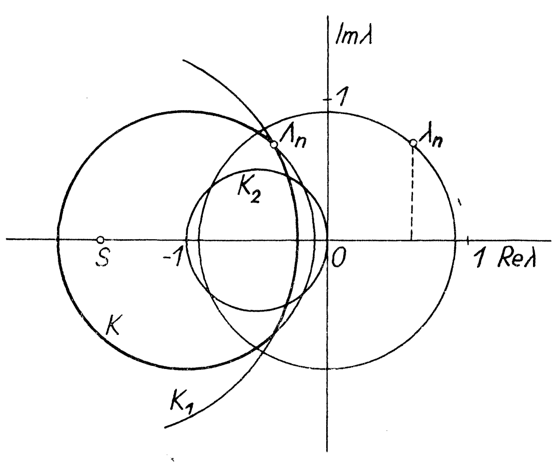

Bild 3.

Der Kreis K_1 hat also der Mittelpunkt im Punkte $S \equiv \equiv [-1{,}62; 0]$ und seiner Radius ist $r_1 = 1{,}41$.

Falls jetzt die übrige Zahlen Λ_i im Gebiete liegen, der an dem Bilde 3 mit der starken Linie beschränkte ist, d.h. falls die Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ im gleichen, um die Zahl 1 in der Richtung der Reellachsen nach rechts verschiebten Gebiete liegen, dann erlangt der Spektralradius $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ nach dem Satz 2.7 seinen Minimalwert für den

Parameter

$$k = k_n = \frac{|\Lambda_n|^2}{|\mathrm{Re}\,\Lambda_n|} = \frac{0{,}65}{0{,}4} = 1{,}62$$

und es ist

$$\varrho(\mathbf{P}_{k_n}^{-1}\mathbf{Q}_{k_n}) = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{Re}^2\,\Lambda_n}{|\Lambda_n|^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{0{,}16}{0{,}65}\right)} = 0{,}87\,.$$

5. Bei den numerischen Anwendungen, wenn die Lage der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ überall nicht bekannt ist, kann man zur Wahl des optimalen Parameters die approximative Formeln für den Fehler benutzen, die im Artikel [3] abgeleitet wurden und die die Konvergenzgeschwindigkeit während der Berechnung in der Abhändigkeit von der Zahl k verfolgen ermöglichen.

Literatur

[1] *R. S. Varga:* Matrix Iterative Analysis, 1962, Prentice-Hall, INC.

[2] *M. Šisler:* Über die Konvergenzbeschleunigung verschiedener Iterationsverfahren. Apl. Mat. *12* (1967), 255–267.

[3] *M. Šisler:* Approximative Formeln für den Fehler bei Iterationsverfahren. Apl. Mat. *11* (1966), 341–351.

Souhrn

O JEDNÉ RELAXAČNÍ METODĚ

MIROSLAV ŠISLER

Článek rozšiřuje výsledky článku [2]. Jedná se o iterační metodu pro řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ definovanou iteračním předpisem

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{b}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $\mathbf{P}_k = k\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_k = (k-1)\,\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1$, $k > 0$. Přitom $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$ je jistý rozklad matice $\mathbf{A}$ takový, že spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$ matice $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ je menší než 1. Práce se zabývá volbou optimálního parametru k, tj. takového parametru, pro nějž je spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ minimální. Zatím co v článku [2] byla otázka optimalisace úplně řešena jen v případě reálného spektra matice $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$, je v tomto článku otázka zcela vyřešena i pro obecný případ komplexního spektra matice $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$. Jsou udány vzorce pro výpočet optimálního parametru k a jemu odpovídajícího minimálního spektrálního poloměru $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ (věta 2.6). V případě, že spektrum matice $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ je rozloženo v jednotkovém kruhu jistým speciálním způsobem,

jsou vzorce pro optimální parametr k a optimální spektrální poloměr velmi jednoduché (věta 2.7). Je ukázáno, že optimální parametr vždy leží v intervalu $0 < k < 2$. Výsledky práce jsou velmi názorně geometricky interpretovány a diskutovány. Je uveden jeden numerický příklad. Vyšetřovaná metoda není totožná s tzv. metodou superrelaxací a má v porovnání s touto metodou některé výhody (jednoduchost a možnost explicitního výpočtu optimálního parametru při znalosti některých údajů o spektru původní matice $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$).

Резюме

ОБ ОДНОМ РЕЛАКСАЦИОННОМ МЕТОДЕ

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (MIROSLAV ŠISLER)

Работа расширяет результаты работы [2]. Речь идет об одном итерационном методе для решения системы линейных уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, определенном при помощи соотношения

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{b}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbf{P}_k = k\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_k = (k-1)\,\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1$, $k > 0$. Здесь $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$ какое-нибудь разложение матрицы $\mathbf{A}$ такое, что спектральный радиус $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$ матрицы $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ меньше единицы. Работа занимается выбором оптимального параметра k, т. е. такого параметра, для него спектральный радиус $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ принимает минимальное значение. Тогда как в работе [2] вполне решался вопрос оптимализации только в случае действительного спектра матрицы $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$, в этой работе совершенно решается этот вопрос для общего случая комплексного спектра матрицы $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$. Показаны формулы для исчисления оптимального параметра k и ему отвечающего минимального спектрального радиуса $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$ (теорема 2.6). В случае, когда спектр матрицы $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ разложен в единичном круге специальным способом, формулы для оптимального параметра очень простые (теорема 2.7). Показано, что оптимальный параметр всегда в промежутке $0 < k < 2$. Результаты работы очень наглядно геометрически интерпретированы и дискутированы. Показан тоже один численный пример. Исследованный метод отличается от метода суперрелаксации и у него некоторые преимущества (простота и возможность явного исчисления оптимального параметра при знании некоторых показаний о спектру первоначальной матрицы $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$).

Anschrift des Verfassers: Dr. *Miroslav Šisler* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.