Ján Chrapan

Transformácia Jacobiho dzeta-funkcií na tvar s reálným modulom

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 5, 417–420

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103188

TRANSFORMÁCIA JACOBIHO DZÉTAFUNKCIÍ NA TVAR S REÁLNYM MODULOM

JÁN CHRAPAN

(Došlo dňa 28. júna 1967)

Z transformačných vzťahov Jacobiho thétafunkcií [1; str. 140]

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(u; \tau + 1) &= \vartheta_3(u; \tau) ; \\
\vartheta_1(u; \tau + 1) &= e^{i(\pi/4)} . \vartheta_1(u; \tau) ; \\
\vartheta_2(u; \tau + 1) &= e^{i(\pi/4)} . \vartheta_2(u; \tau) ; \\
\vartheta_3(u; \tau + 1) &= \vartheta_0(u; \tau)
\end{aligned} \tag{1}$$

vyplývajú relácie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{w}{2K} ; \frac{K + iK'}{K}\right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_3 \left(\frac{w}{2K} ; i\frac{K'}{K}\right) ; \\
\frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{w}{2K} ; \frac{K + iK'}{K}\right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{w}{2K} ; i\frac{K'}{K}\right) ; \\
\frac{d}{dw} \ln \vartheta_2 \left(\frac{w}{2K} ; \frac{K + iK'}{K}\right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_2 \left(\frac{w}{2K} ; i\frac{K'}{K}\right) ; \\
\frac{d}{dw} \ln \vartheta_3 \left(\frac{w}{2K} ; \frac{K + iK'}{K}\right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{w}{2K} ; i\frac{K'}{K}\right) ,
\end{aligned}$$

kde

$$\frac{w}{2K} = u ; \quad i\frac{K'}{K} = \tau ,$$

ktoré možno prepísať pomocou Jacobiho dzétafunkcií [2; (1) a (2)] do tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{w}{2K} ; \frac{K + iK'}{K}\right) &= Z_3(w; k) ; \\
\frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{w}{2K} ; \frac{K + iK'}{K}\right) &= Z_1(w; k) ,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\ln\vartheta_2\left(\frac{w}{2K};\frac{K+iK'}{K}\right)=Z_2(w;k);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\ln\vartheta_3\left(\frac{w}{2K};\frac{K+iK'}{K}\right)=Z_0(w;k).$$

Na základe substitúcií [1; str. 143]

$$k=\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2};\quad k'=\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2};$$

$$K=\tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2;\quad K'=-i\tau K$$

pre transformované hodnoty

$$\bar{k}=\frac{\bar{\vartheta}_2^2}{\bar{\vartheta}_3^2};\quad \overline{k'}=\frac{\bar{\vartheta}_0^2}{\bar{\vartheta}_3^2};$$

$$\bar{K}=\tfrac{1}{2}\pi\bar{\vartheta}_3^2;\quad \overline{K'}=-i(\tau+1)\bar{K},$$

vzhľadom na (1) máme

$$\bar{k}=i\frac{k}{k'};\quad \overline{k'}=\frac{1}{k'};$$

$$\bar{K}=k'K;\quad \overline{K'}=-ik'(K+iK').$$

Vložením týchto hodnôt do ľavých strán relácií (2) vychádza

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\ln\vartheta_0\left(\frac{wk'}{2\bar{K}};i\frac{\overline{K'}}{\bar{K}}\right)=Z_3(w;k);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\ln\vartheta_1\left(\frac{wk'}{2\bar{K}};i\frac{\overline{K'}}{\bar{K}}\right)=Z_1(w;k);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\ln\vartheta_2\left(\frac{wk'}{2\bar{K}};i\frac{\overline{K'}}{\bar{K}}\right)=Z_2(w;k);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\ln\vartheta_3\left(\frac{wk'}{2\bar{K}};i\frac{\overline{K'}}{\bar{K}}\right)=Z_0(w;k)$$

a po substitúcii

$$wk'=v,$$

$$k'.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\ln\vartheta_0\left(\frac{v}{2\bar{K}};i\frac{\overline{K'}}{\bar{K}}\right)=Z_3\left(\frac{v}{k'};k\right);$$

$$k'.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\ln\vartheta_1\left(\frac{v}{2\bar{K}};i\frac{\overline{K'}}{\bar{K}}\right)=Z_1\left(\frac{v}{k'};k\right);$$

$$k' \cdot \frac{d}{dv} \ln \vartheta_2\left(\frac{v}{2\overline{K}}; i\frac{\overline{K'}}{\overline{K}}\right) = Z_2\left(\frac{v}{k'}; K\right);$$

$$k' \cdot \frac{d}{dv} \ln \vartheta_3\left(\frac{v}{2\overline{K}}; i\frac{\overline{K'}}{\overline{K}}\right) = Z_0\left(\frac{v}{k'}; k\right),$$

resp. podľa [2; (1) a (2)]

(3)
$$k' \cdot Z_0(v; \bar{k}) = Z_3\left(\frac{v}{k'}; k\right);$$

$$k' \cdot Z_1(v; \bar{k}) = Z_1\left(\frac{v}{k'}; k\right);$$

$$k' \cdot Z_2(v; \bar{k}) = Z_2\left(\frac{v}{k'}; k\right);$$

$$k' \cdot Z_3(v; \bar{k}) = Z_0\left(\frac{v}{k'}; k\right).$$

Pri hodnote modulu

$$0 < k < 1$$

transformovaný modul

$$\bar{k} = i\frac{k}{k'}$$

je imaginárny. Keď zavedieme označenie

$$\bar{k} = i\varkappa,$$

z relácií (3) dostaneme transformačné vzťahy Jacobihy dzétafunkcií na tvar s reálnym modulom

(4)
$$Z_0(v; i\varkappa) = \sqrt{(1 + \varkappa^2)} \cdot Z_3\left(v \cdot \sqrt{(1 + \varkappa^2)}; \frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right);$$

$$Z_1(v; i\varkappa) = \sqrt{(1 + \varkappa^2)} \cdot Z_1\left(v \cdot \sqrt{(1 + \varkappa^2)}; \frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right);$$

$$Z_2(v; i\varkappa) = \sqrt{(1 + \varkappa^2)} \cdot Z_2\left(v \cdot \sqrt{(1 + \varkappa^2)}; \frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right);$$

$$Z_3(v; i\varkappa) = \sqrt{(1 + \varkappa^2)} \cdot Z_0\left(v \cdot \sqrt{(1 + \varkappa^2)}; \frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right).$$

Literatúra

[1] *Magnus W., Oberhettinger F.*: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2. Auflage. Berlin — Göttingen — Heidelberg 1948.

[2] *Chrapan J.*: Transformácia Jacobiho transcendent druhého druhu na tvar s reálnym argumentom. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 11, 4, 1961; str. 243 až 249.

Резюме

ТРАНСФОРМАЦИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ ЯКОБИ НА ФОРМУ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ МОДУЛЕМ

Ян Храпан (JÁN CHRAPAN)

На основании соотношений (1) выводятса с помощью дзета-функций Якоби [2; (1) и (2)] отношения (2). Из них субституциями [1; стр. 143] получаются уравнения (3), или трансформационные отношения дзета-функций Якоби на форму с вещественным модулем (4).

Summary

TRANSFORMATION OF JACOBI ZETA FUNCTIONS TO THE FORM WITH REAL MODULUS

JÁN CHRAPAN

On the basis of relations (1), the relations (2) by means of Jacobi zeta functions [2; (1) and (2)] are derived. By means of the substitutions [1; page 143] the equations (3), or the transformative relations of Jacobi zeta functions, to the form with real modulus (4), are worked out.

Adresa autora: Prof. RNDr. *Ján Chrapan*, Katedra teoretickej fyziky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, Bratislava, Šmeralova 2b.