Aplikace matematiky

Ján Chrapan

Výpočet úplných eliptických integrálov prvého a druhého druhu s imaginárnym modulom

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 5, 413–416

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103187`

VÝPOČET ÚPLNÝCH ELIPTICKÝCH INTEGRÁLOV PRVÉHO A DRUHÉHO DRUHU S IMAGINÁRNYM MODULOM

JÁN CHRAPAN

(Došlo dňa 28. júna 1967)

Aby sme mohli vyčísliť úplné eliptické integrály [1; str. 96] prvého druhu

$$(1) \qquad K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi$$

a druhého druhu

$$(2) \qquad E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$$

pomocou ich tabuliek [1; str. 117 a 118], modul týchto integrálov (k) musí spĺňať podmienku

$$0 \leqq k^2 \leqq 1\,.$$

Keď je modul (k) imaginárny, takže

$$k = i\varkappa\,,$$

možno použiť pre výpočet integrálu prvého druhu (1) reláciu [1; str. 116; riadok 6 zdola, posledný vzťah]

$$(3) \qquad K(i\varkappa) = \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\,K\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right),$$

ktorú prepíšme pomocou doplnkového modulu k' do tvaru

$$(3') \qquad K(i\varkappa) = \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\,K'\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right).$$

Pre komplementárnu hodnotu úplného eliptického integrálu prvého druhu K' sa môže v tomto prípade použiť relácia [1; str. 116; riadok 4 zdola; prvý vzťah]

$$K'(i\varkappa) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\left[K'\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right) - \mathrm{i}K\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right)\right], \tag{4}$$

alebo po použití doplnkového modulu

$$K'(i\varkappa) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\left[K\left(\frac{1}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right) - iK'\left(\frac{1}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right)\right]. \tag{4'}$$

(Poznámka: V citovanom diele [1; str. 116; riadok 4 zdola] je tlačová chyba; ľavá strana relácie má byť $K'[i(k/k')]$.)

Aby sme mohli odvodiť transformačné vzťahy na vyčíslenie úplného eliptického integrálu druhého druhu (2) s imaginárnym modulom $E(i\varkappa)$ a jeho komplementárnej hodnoty $E'(i\varkappa)$, pretvorme výraz (2)

$$E(k) = E(i\varkappa) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1 + \varkappa^2 x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\,\mathrm{d}x$$

substitúciou

$$\sqrt{(1 - x^2)} = z\,.$$

Tak dostaneme

$$E(i\varkappa) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1 + \varkappa^2(1 - z^2))}}{\sqrt{(1 - z^2)}}\,\mathrm{d}z = \sqrt{(1 + \varkappa^2)}\,.\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\varkappa^2}{1 + \varkappa^2}z^2\right)}}{\sqrt{(1 - z^2)}}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \sqrt{(1 + \varkappa^2)}\,.\,E\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right),$$

t.j. úplný eliptický integrál druhého druhu (2) s imaginárnym modulom

$$E(i\varkappa) = \sqrt{(1 + \varkappa^2)}\,.\,E\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right), \tag{5}$$

resp. pomocou doplnkového modulu

$$E(\mathrm{i}\varkappa) = \sqrt{(1 + \varkappa^2)}\,.\,E'\left(\frac{1}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)}}\right). \tag{5'}$$

Pre komplementárnu hodnotu tohto integrálu s imaginárnym modulom $E'(\mathrm{i}\varkappa)$ z Legendreovho vzťahu [1; str. 116; riadok 8 zdola]

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2},$$

po dosadení hodnôt (3), (4) a (5), vyplýva

$$(6) \qquad E'(i\varkappa) = \sqrt{(1+\varkappa^2)}\left[E'\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right) + iE\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)\right] -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\left[\varkappa^2 K'\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right) + iK\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)\right] =$$
$$= \sqrt{(1+\varkappa^2)}\,.\left[E\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right) + iE'\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)\right] -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\left[\varkappa^2 K\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right) + iK'\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)\right].$$

Ak je napr. $\varkappa = 1$, z relácií (3) (4), (5) a (6) podľa tabuliek [1; str. 118]

$$K(i) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,K(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,K'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 1{,}3110\ldots;$$
$$K'(i) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,[K'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - iK(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,[K(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - iK'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] =$$
$$= (1-i)\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,K(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = (1-i)\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,K'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) =$$
$$= (1-i)\,.\,1{,}3110\ldots;$$
$$E(i) = \sqrt{2}\,.\,E(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) =$$
$$= \sqrt{2}\,.\,E'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 1{,}9100\ldots;$$
$$E'(i) =$$
$$= \sqrt{2}\,.\,[E'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + iE(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,[K'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + iK(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] =$$
$$= \sqrt{2}\,.\,[E(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + iE'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,[K(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + iK'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] =$$
$$= (1+i)\,.\sqrt{2}\,.\,[E(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - \tfrac{1}{2}K(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] =$$
$$= (1+i)\,.\sqrt{2}\,.\,[E'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - \tfrac{1}{2}K'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})] = (1+i)\,.\,0{,}5990\ldots,$$

t.j.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+x^2)]}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+\sin^2\varphi)}} = 1{,}3110\ldots;$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-2x^2)]}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-2\sin^2\varphi)}} = (1-i)\,.\,1{,}3110\ldots;$$
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1+\sin^2\varphi)}\,d\varphi = 1{,}9100\ldots;$$
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-2\sin^2\varphi)}\,d\varphi = (1+i)\,.\,0{,}5990\ldots.$$

Literatúra

[1] *Jahnke E., Emde F., Lösch F.:* Специальные функции; перевод с немецкого; Moskva 1964.

Резюме

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ТИПА С МНИМЫМ МОДУЛЕМ

Ян Храпан (Ján Chrapan)

Полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого типа (1) и второго типа (2) с мнимым модулем выражаются отношениями (3), (4), (5) и (6). Применение этих отношений иллюстрируется конкретным примером.

Summary

COMPUTATION OF THE COMPLETE ELLIPTIC INTEGRALS OF THE FIRST AND THE SECOND KIND WITH AN IMAGINARY MODULUS

Ján Chrapan

The complete Legendre's normal elliptic integrals of the first kind (1) and the second one (2), with imaginary modulus, are expressed by the relations (3), (4), (5) and (6). The use of these relations is illustrated by the concrete example.

Adresa autora: Prof. RNDr. *Ján Chrapan*, Katedra teoretickej fyziky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, Bratislava, Šmeralova 2b.