Pavel Bureš; Jaroslav Král

Algoritmy. 13. ATKR. Autokorelace a spektrální analýza

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 3, 287–290

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103172`

ALGORITMY

13. ATKR

AUTOKORELACE A SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

PAVEL BUREŠ, prom. mat., Ústav výpočtové techniky ČSAV a ČVUT, Praha 2, Horská 3.

Počítání korelací a použití Fourierovy analýzy pro výpočet spektra

```
procedure atkr(n, m, ar);
value n, m; integer n, m; real array ar;
comment n je počet naměřených veličin v souboru, m je počet korelačních koeficientů
a má být maximálně 15%n, ar je identifikátor jednorozměrného pole, které obsahuje
jako složky jednotlivé naměřené veličiny indexované 1, 2, ..., n;
begin array w[0 : m];
    real mi, sigma, fp, gp, tp, sp, cp, rp, lp, lp1, lp2, up, pi;
    integer i, j, np, p;
    boolean q;
comment zde je možno tisknout vstupní hodnoty;
mi := sigma := 0;
for i := 1 step 1 until n do
    begin mi := mi + ar[i]; sigma := sigma + ar[i]↑2 end;
mi := mi/n; sigma := sqrt(sigma/n − mi↑2);
comment spočetl se průměr a odchylka pro normalisování vstupní posloupnosti;
for i := 1 step 1 until n do ar [i] := (ar[i] − mi)/sigma;
fp := gp := 0;
for i := 1 step 1 until n do begin
    fp := fp + ar[i]; gp := gp + ar[i]↑2 end;
tp := fp; sp := gp;
comment následuje cyklus pro výpočet autokorelace;
for p := 0 step 1 until m do
begin np := n − p; cp := 0;
    for i := 1 step 1 until np do cp := cp + ar[i] × ar[i + p];
    rp := (np × cp − fp × tp)/sqrt((np × gp − fp↑2) × (np × sp − tp↑2));
    comment na tomto místě můžeme tisknout koeficienty autokorelace rp;
    w[p] := cp/np;
```

```
    tp := tp - ar[p + 1]; fp := fp - ar[np]; sp := sp - ar[p + 1]↑2;
    gp := gp - ar[np]↑2
end p;
pi := 3·14159265; q := false;
    for p := 0 step 1 until m do
begin lp := 0;
    for i := 1 step 1 until m - 1 do
    lp := lp + w[i] × cos (i × p × pi/m);
    lp := w[0] + 2 × lp + w[m] × cos(p × pi); j := p - 1;
    if p = 0 then begin lp1 := lp; goto ob end;
    if p = 1 then lp2 := lp;
    op: up := 0.23 × (lp2 + lp) + 0.54 × lp1;
    comment zde se tiskne pořadí j, spektrum lp1 a vyhlazené spektrum up;
    lp2 := lp1; lp1 := lp; if q then goto uk;
    if p = m then begin q := true ; j := m; lp := lp2;
    goto op end;
ob: end p;
uk: end atkr
```

Algoritmus je určen pro zjišťování závislosti náhodné veličiny na čase. Je možno porovnávat navzájem spektra jednotlivých náhodných veličin, odkrývat některé vnitřní závislosti např. trendy apod.

Přesnost výsledků závisí na velikosti zpracovávané posloupnosti a přesnosti zobrazení čísla v počítači.

Počítá se posloupnost autokorelačních koeficientů

$$r_p = \frac{(n-p)\,c_p - f_p t_p}{\sqrt{((n-p)\,g_p - f_p^2)\,((n-p)\,s_p - t_p^2)}}$$

spektrum

$$l_p = w_0 + 2\sum_{q=1}^{m-1} w_q \cos\frac{qp\pi}{m} + w_m \cos p\pi$$

a vyhlazené spektrum

$$u_p = 0{,}23(l_{p-1} + l_{p+1}) + 0{,}54 l_p\,,$$

při čemž

$$l_{-1} = l_1\,,\quad l_{m-1} = l_{m+1}$$

a kde

$$p = 0, 1, 2, \ldots, m\,,\quad c_p = \sum_{i=1}^{n-p} x_i x_{i+p}\,;\quad f_p = \sum_{i=1}^{n-p} x_i\,;\quad t_p = \sum_{i=1}^{n-p} x_{i+p}\,;$$

$$g_p = \sum_{i=1}^{n-p} x_i^2\,;\quad s_p = \sum_{i=1}^{n-p} x_{i+p}^2\,;\quad w_p = \frac{c_p}{n-p}$$

kde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ odpovídají identifikátoru *ar*.

Kontrolní příklad:

$n = 18$
$m = 5$
$ar = 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3$
průměr $= 2,0$
odchylka $= 0,8165$

pořadí p	koeficienty autokorelace	spektrum	vyhlazené spektrum
0	1,0	−0,441419	0,0334246
1	−0,4516129	0,59085	0,0283927
2	−0,5428571	−0,822347	0,637793
3	1,0	4,11289	2,51499
4	−0,44	2,10075	1,73011
5	−0,5517241	−1,52287	0,143996

Algoritmus byl naprogramován v kódu jazyka Ural 2 v několika variantách a je používán jako standartní program; rovněž byl naprogramován v jazyku Uralgol.

[1] *Ralston-Wilf:* Numerical Methods for Digital Computers, kap. 19.

14. LGAM

VÝPOČET FUNKCE $\ln \Gamma(z + 1)$ PRO z REÁLNÉ

JAROSLAV KRÁL, prom. mat., Ústav výpočtové techniky ČSAV a ČVUT, Praha 2, Horská 3

real procedure *LGAM* (z); **value** z; **real** z;
begin comment program počítá přirozený logaritmus funkce $\Gamma(z + 1)$ pro reálné z s použitím asymptotické formule (viz např.: *H. Bateman*; Higher Transcendental Functions, vol. 1, McGraw - Hill, 1953):

$$\ln \Gamma(z + 1) = (z + 0{,}5) \ln (z) - z + 0{,}5 \ln (2\pi) + \sum_{n=1}^{4} \frac{B_n z^{-(2n-i)}}{2n(2n - 1)} + O(|z|^{-9})$$

kde B_i jsou Bernoulliho čísla tj. $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = -\frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$;

real v;
$v := 1/(z \times z)$;
$LGAM := (((-0{\cdot}000595238095 \times v + 0{\cdot}0007936508) \times v - 0{\cdot}002777777778) \times$
$\times\, v + 0{\cdot}08333333333)/z + (z + 0{\cdot}5) \times ln\,(z) - z + 0{\cdot}9189385332047$
end;

Program byl naprogramován pro počítač Ural 2 a testován. Pro $z \geqq 4$ byla zjištěna přesnost lepší než 10^{-9} což je přesnost stroje. Ještě pro $z = 2$ byla relativní chyba téměř 10^{-6}. Program je vhodný pro výpočet $n!$ pro velká n. S využitím vztahu

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \dots$$

tj.

$$\ln \Gamma(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln(x) = \ln \Gamma(x+2) - \ln(x+1) - \ln(x) = \dots$$

je možné použít podprogram LGAM pro výpočet hodnot přirozeného logaritmu gama funkce pro $x > -1$ a po odlogaritmování pro výpočet hodnot gamma funkce pro všechna reálná x, která nejsou rovna záporným celým číslům. Pro x blízká záporným celým číslům je však navržený postup numericky nestabilní.

Příklad použití:

$$exp(\mathrm{LGAM}(4)) = 1{,}20000000 \times 10^2\,,$$
$$exp(\mathrm{LGAM}(5)) = 7{,}20000000 \times 10^2\,.$$

Poznamenejme, že použitý rozvoj je platný i pro z komplexní s $\arg z \neq \pm\pi$

Kontrolní hodnoty funkce LGAM $(x) = \ln(\Gamma(x+1))$
(spočteno na počítači Ural 2)

x	LGAM (x)	relativní chyba	Přesné hodnoty $\ln(\Gamma(x+1))$
2·0	0·693146076	$4 \,.\, 10^{-6}$	0·6931471805994
2·5	1·20097344	$5 \,.\, 10^{-8}$	1·200973602347
3·0	1·79175943	$3 \,.\, 10^{-9}$	1·791759469228
3·5	2·45373656	$1 \,.\, 10^{-9}$	2·453736570842
4·0	3·17805382	$1 \,.\, 10^{-9}$	3·178053830348
4·5	3·95781396	$< 10^{-9}$	3·957813967619

Od hodnoty $x = 4{,}5$ je hodnota $\ln(\Gamma(x+1))$ spočtena s přesností stroje Ural 2 (cca $0{,}2 \,.\, 10^{-9}$).