

Aplikace matematiky

Nikolai Sergeevich Bachvalov

Об оптимальных методах решения задач

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 1, 27–38

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103136>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Н. С. БАХВАЛОВ (N. S. Bachvalov)

Поскольку мой доклад по теме близок к аналогичному докладу С. Л. Соболева и Иво Бабушки на предшествующей конференции в Либлицах („Оптимизация численных методов“, Aplikace mat., 1965, 10, 96–129) то он, естественно, повторяет многие моменты их доклада.

1. Так называемая „чистая“ математика создала и создает большое число приближенных методов решения задач. Достаточно вспомнить способы вычисления функций при помощи разложения в ряды, метод Пикара решения обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Ньютона решения нелинейных задач и т. д. Часто при исследовании проблем „чистой“ математики приближенный метод не указывается в явном виде, но производятся различные преобразования задачи, облегчающие применение численных методов. Например, метод потенциала сводит решение уравнения Лапласа к решению интегрального уравнения. Эти методы важны для прикладной науки хотя бы тем, что указывают принципиальную возможность решения задачи. Однако, как правило, при их создании ограничиваются лишь указанием к возможности применения для решения задач широкого класса. При этом не исследуется эффективность этих методов и не обращается внимание на устойчивость к округлениям при вычислениях. Поэтому многие из этих методов оказываются не применимыми при реальном решении задач.

2. Другим поставщиком методов решения задач является прикладная наука. Здесь, как правило, создаются методы, позволяющие реально решить задачу. Однако, поскольку усилия направлены на скорейшее получение результата в виде числа, то эти методы часто очень сильно используют специфику решаемой задачи. Это приводит к более быстрому решению конкретных задач, однако, если говорить о решении большого числа сходных между собой задач, то они могут оказываться не оптимальными в смысле затрат человеческого труда.

3. Вычислительная математика в значительной степени занимается созданием и исследованием устойчивых методов решения целых классов задач. При этом часто исходной основой для исследования являются методы, создаваемые „чистой“ математикой и прикладной наукой.

В своем докладе мы не будем касаться всех проблем, стоящих перед вычислительной математикой.

Если мы ограничимся некоторым классом задач и некоторым классом методов их решения, то возникает естественное стремление создать оптимальный на этом классе задач метод решения. Само понятие оптимальности может толковаться в смысле универсальности метода, простоты применения, объема используемой памяти ЭВМ, количества вычислений и т. д. Часто подход к этому понятию определяется в зависимости от мощности класса реально решаемых задач.

Решения многих задач являются функционалами или операторами от некоторых функций. Например, решение уравнения в частных производных является оператором от коэффициентов, функций, входящих в граничные условия, функций, задающих границу области.

Если мы зафиксируем какие-либо классы таких функций, то будет определен некоторый класс решаемых задач. Мы будем рассматривать классы функций, задаваемые их дифференциальными свойствами. Такой подход к классам функций и классам решаемых задач не является единственно возможным, однако мы и не претендуем на всесторонний охват проблемы оптимальности методов. Во всяком случае он полезен.

При отыскании метода решения задачи часто дело обстоит следующим образом. Исследователь не определяет формально класс задач, а просто при выборе алгоритма пытается учесть некоторые качественные характеристики задачи. Совокупность этих характеристик неявно определяет класс решаемых задач, с которым он работает.

В точности оптимальный метод в настоящее время удалось найти для небольшого числа задач; некоторые примеры таких задач имеются в [1].

В других случаях удастся построить методы, оптимальные по порядку той или иной характеристики метода. Часто при этом дело обстоит следующим образом. Строится некоторый метод, при использовании которого любая задача из рассматриваемого класса решается с некоторой точностью ε за N арифметических действий. Независимо производится оценка снизу погрешности методов на рассматриваемом классе. А именно, показывается существование такой постоянной $c > 0$, что для любого метода, требующего cN действий и принадлежащего рассматриваемому классу методов погрешность решения некоторой задачи из рассматриваемого класса не меньше ε .

Получение оценок снизу погрешности методов имеет самостоятельное значение. Например, встречается следующая ситуация. Решается какая-то новая задача. Мы относим ее к некоторому классу задач. На основании оценок снизу мы получаем, что для решения задач из этого класса с заданной точностью требуется слишком большое число действий. Отсюда мы делаем вывод, что для решения задачи с приемлемой точностью необходимо изменить класс задач, к которому мы относим исходную задачу.

Перейдем к характеристике состояния положения об оптимальных методах решения в различных разделах вычислительной математики.

4. Традиционной задачей численного анализа является задача решения системы линейных уравнений. Даже, если мы хотим найти значение только одной компоненты, повидимому, оптимальным по числу арифметических методов является метод Гаусса. В настоящее время показана [2] его оптимальность среди методов определенного класса (оперирующих одновременно с целыми строками или столбцами матрицы). Однако, принципиальное значение для вычислительной математики имело бы доказательство его оптимальности среди всех методов.

В случае, когда матрица линейной системы с N неизвестными содержит M ненулевых элементов, метод сопряженных градиентов требует затраты $O(MN)$ арифметических действий. Было бы интересно рассмотреть вопрос об оптимальности этого метода по порядку числа действий на классе линейных систем N -го порядка с матрицей содержащей M ненулевых элементов. Интересна также задача об оптимальном методе обращения матриц, см. также [3].

Совершенно не изучен вопрос об оптимальности приближенных методов решения задач линейной алгебры. Например, трудно высказать суждение об оптимальном методе решения такой задачи.

Фиксированы числа $b_0, a_1, a_2, N, 0 < a_1 \leq a_2$. Рассматривается класс систем N -го порядка: $A\vec{x} = \vec{b}$, где $\|\vec{b}\| \leq b_0$ и все собственные числа λ_i матрицы A удовлетворяют условию $a_1 \leq |\lambda_i| \leq a_2$; требуется найти решение этой задачи с точностью ϵ .

Конечно, эти задачи нельзя рассматривать как самые актуальные, стоящие перед специалистами в области линейной алгебры. В этой области еще не совсем четко определились классы задач, представляющих интерес для решения; для некоторых задач (плохо обусловленные системы общая проблема собственных значений) достаточно универсальные алгоритмы появились только в последнее время.

5. В области наилучшего представления и приближения функций из классов дифференцируемых и аналитических функций достигнуты большие успехи специалистами по теории функций.

В частности, А. Н. Колмогоровым [4], А. Г. Витушкиным [5] и их последователями для таких классов получены оптимальные по порядку или асимптотически оптимальные оценки минимального объема информации, необходимого для задания функций из этих классов. Однако, для классов функций большого числа переменных этот объем информации оказывается очень большим. Как и в случае рассматриваемой далее задачи численного интегрирования это говорит об актуальности следующей проблемы. Как формально описать классы функций большого числа переменных, действительно встречающихся в приложениях. Может быть, следует изменить саму постановку задачи о при-

ближении с заданной точностью? Среди простейших задач, характеризующих сложность проблемы наилучшего вычисления функций, можно упомянуть такую: как вычислять наилучшим образом с заданной точностью значения какой-либо конкретной функции, например, e^x .

6. Для задачи определения нулей и экстремумов функций большого числа переменных в настоящее время, пожалуй, нельзя указать работ, где был бы четко и разумно определен круг рассматриваемых задач и в соответствие с этим имела бы смысл задача построения оптимального метода.

7. Многие постановки задач об оптимальных методах имеют происхождением задачу численного интегрирования. Посмотрим, как здесь может ставиться эта задача. Пусть нам дан некоторый класс подынтегральных функций F и некоторое многообразие способов интегрирования. Для каждого способа интегрирования на этом классе существует некоторая погрешность r . Можно рассмотреть все способы интегрирования, требующие для своей реализации не более чем M арифметических действий и среди них отыскивать способ с наименьшей величиной r . Такая задача естественна, однако она очень сложна для решения, поскольку ее решение должно в каком-то смысле опираться на решение сложной задачи отыскания оптимального способа вычисления значений функции из заданного класса. Поэтому более распространенной является следующая постановка проблемы. Рассматривают всевозможные способы интегрирования, использующие информацию о значениях подынтегральной функции в N точках, и среди них отыскивают оптимальный. Повидимому, решения упомянутых постановок для разумных классов F должны быть примерно одинаковыми, однако вторая постановка несравненно проще.

Какой класс методов имеет смысл рассматривать? Во-первых, можно рассмотреть класс линейных способов интегрирования, т. е. способов, при которых интеграл $\int_{\Omega} f(P) dP$ заменяется квадратурной суммой $\sum_{j=1}^N c_j f(P_j)$ с коэффициентами, не зависящими от подынтегральной функции. Во-вторых, можно рассмотреть класс произвольных методов интегрирования, использующих информацию о значениях подынтегральной функции в N точках; такой произвольный способ интегрирования укладывается в следующую схему: задаются функции

$$\varphi_2(Q_1; y_1), \dots, \varphi_N(Q_1, \dots, Q_{N-1}; y_1, \dots, y_{N-1}),$$

$$S_N(Q_1, \dots, Q_N; y_1, \dots, y_N)$$

и точка P_1 , общие для всех функций f рассматриваемого класса. Последовательно определяют величины и точки

$$f(P_1), P_2 = \varphi_2(P_1; f(P_1)), f(P_2), \dots,$$

$$P_N = \varphi_N(P_1, \dots, P_{N-1}; f(P_1), \dots, f(P_{N-1})), f(P_N)$$

и приближенное значение интеграла заменяется величиной

$$S_N(P_1, \dots, P_N; f(P_1), \dots, f(P_N)).$$

В настоящее время имеется большое число результатов, относящихся к оптимальным методам интегрирования функций различных классов. Мы хотим указать на один факт, показывающий, что постановка проблемы оптимизации даже в одномерном случае, еще нуждается в уточнении. Поскольку второй класс методов шире, то нижняя грань погрешности методов этого класса на рассматриваемом классе функций должна быть не больше, чем для класса линейных методов. Из результатов [6] вытекает, что в случае выпуклого класса F подынтегральных функций эти нижние грани совпадают.

Традиционно рассматриваемые классы дифференцируемых и аналитических функций являются выпуклыми. Поэтому, на первый взгляд, может показаться, что рассмотрение второго, более широкого, класса методов не имеет смысла.

Однако, методы второго типа, например, методы интегрирования с автоматическим выбором шага, хорошо себя зарекомендовали в вычислительной практике. Это указывает на недостаточность рассмотрения только традиционных, выпуклых, классов подынтегральных функций. Повидимому, для реальных вычислений более типичны классы кусочно-аналитических функций, не являющиеся выпуклыми. Однако для правильной постановки проблемы оптимизации эти классы нуждаются в формальном описании.

Из высказанного видно, что наши дальнейшие рассуждения носят часто лишь модельный характер. Однако это не уменьшает роли этого направления, поскольку отыскание оптимальных методов приводит к расширению круга используемых методов, и, что существенно важно, позволяет увидеть перспективы развития методов вычислений.

Упомянем наиболее общие результаты в области оптимизации численного интегрирования. Через $H_{s,p}^{(r_1, \dots, r_s)}(A)$ будем обозначать класс функций $f(x_1, \dots, x_s)$ периодических с периодом p по каждой из переменных, у которых $\|f^{(r_1, \dots, r_s)}\|_{L_p} \leq A$ и то же неравенство выполняется для всех производных, подчиненных $f^{(r_1, \dots, r_s)}$; r_1, \dots, r_s не обязательно целые. Через $R(A)$ будем обозначать пересечение некоторого конечного числа классов типа $H_{s,p}^{r_1, \dots, r_s}(A)$. Для почти всех классов $R(A)$ получены [7] точные с точностью до множителей порядка $\ln^2 N$ оценки оптимальной скорости сходимости. В большинстве случаев оценки сверху реализовывались при использовании теоретико-числовых способов интегрирования [8]. В работах С. Л. Соболева и примыкающих к ним для классов функций инвариантных относительно ортогональных преобразований независимых переменных, изучен ряд вопросов, относящихся к построению квадратур, оптимальных не только по порядку, но и в смысле главного члена оценки. Укажем грубо, как производятся оценки снизу погрешности на классе. Применим формально какой-либо способ интегрирования для вычисления

интеграла от функции $f_0 \equiv 0$. В результате мы получим информацию, что в каких-то точках подынтегральная функция f_0 обращается в нуль. Затем построим две функции из рассматриваемого класса, совпадающие с f_0 в этих точках, но по возможности с достаточно далекими значениями интегралов от этих функций. При вычислении интегралов от этих функций мы получим ту же информацию о подынтегральной функции, что и в случае f_0 , а, следовательно, одно и то же приближенное значение интеграла; поскольку точные значения интегралов от этих функций достаточно различаются, то погрешность в случае одной из функций будет достаточно велика. В первоначальной форме [7], [23] этот метод был усовершенствован методом, предложенного А. Н. Колмогоровым [4] для оценки снизу ε -энтропии классов функций. В дальнейшем было предложено уточнение этого метода [9], позволившее получить новые оценки снизу для классов функций, задаваемых скоростью убывания коэффициентов Фурье.

Первая из оценок снизу для случая $s > 1$ [23] гласит, что на классе $C_s^m(A)$ функций s переменных, у которых все производные порядка m ограничены по модулю постоянной A , нельзя получить оценки сходимости по порядку лучшей $O(AN^{-m/s})$. Таким образом, при $m/s < \frac{1}{2}$ сходимость оптимального по гарантированной оценке метода в каком-то смысле хуже, чем сходимость метода Монте-Карло. Этот факт, осознанный на нестрогом уровне еще ранее, привел к исследованию недетерминированных способов интегрирования, т. е. таких способов, где получаемое приближенное значение интеграла зависит от некоторых случайных величин. Произвольный недетерминированный способ интегрирования определяется аналогично определенному выше произвольному способу интегрирования. Отличие состоит лишь в том, что функции φ_i и S_N предполагаются зависящими от некоторого случайного события и измеримыми по соответствующей мере. Были построены недетерминированные методы со сходимостью на $C_s^m(A)$ порядка $O(AN^{-m/s})$ и со сходимостью по вероятности порядка $O(AN^{-m/s-1/2})$, т. е. лучшей чем у метода Монте-Карло. Эти оценки неулучшаемы попо рядку. Для всех классов $R(A)$ также [7] были построены методы со сходимостью по вероятности, отличающейся от оптимальной лишь множителями порядка $\ln^{\gamma} N$. При этом имело место следующее обстоятельство. Для класса функций L_2 оптимальная сходимость по вероятности достигается, например, при употреблении классического метода Монте-Карло. В случае классов более гладких функций для достижения скорости сходимости по вероятности близкой к оптимальной следует брать узлы интегрирования зависимыми между собой. В ряде случаев оптимальная скорость сходимости по вероятности достигается, если мы будем рассматривать как случайные параметры каких-либо квадратур (так называемая рандомизация). Оптимальные скорости сходимости гарантированной и по вероятности для различных классов $R(A)$ отличаются множителями порядка $N^a \ln^{\gamma} N$, где a может меняться в пределах $0 \leq a \leq 1$.

Заметим, что из указанных оценок для классов $R(A)$ вытекают неуплощаемые с точностью до множителей $\ln^2 N$ оценки сверху и снизу оптимальной скорости сходимости для любых классов периодических функций конечной гладкости; это следует из того, что любой такой класс связан с некоторым классом R соотношением $R(B) \supset F \supset R(A)$.

8. Оценки снизу объема вычислений при квадратурах позволяют получить оценки снизу объема вычислений необходимого при решении других задач математической физики. Пусть, например, значение решения в некоторой точке записывается в виде

$$u(P) = \int_G \Gamma(P, Q) f(Q) dQ$$

и функция $f(Q)$ рассматривается как функция из некоторого класса F . Всякий способ нахождения значения $u(P)$ можно рассматривать как способ вычисления интеграла в правой части. Поэтому оценка снизу объема вычислений этого интеграла на классе F является одновременно оценкой снизу объема вычислений при любом способе отыскания значения $u(P)$. Может случиться, что значение $u(P)$ является нелинейным функционалом от некоторой функции f из заданного пространства F . В этом случае для каждого числа узлов N выделяют достаточно мощное подпространство $F_N \subset F$ такое, что при $f \in F_N$ решение представляется в виде

$$u(P) = \int_G \Gamma_N(P, Q) f(Q) dQ + \varepsilon(f),$$

где $\varepsilon(f)$ — величина высшего порядка. Далее оценку снизу получают, пользуясь оценками для квадратур на классе F_N .

Пусть $h_\varepsilon(F)$ — минимальное число значений функции f , задание которых достаточно при любой $f \in F$ для восстановления решения с точностью ε ; оценки снизу объема вычислений, вытекающие только из необходимости использования информации о таком числе значений функций f , естественно называть информационными. Порядок величины $h_\varepsilon(F)$ может быть различным в зависимости от нормы, в которой оценивается погрешность приближенного решения; часто порядок $h_\varepsilon(F)$ не совпадает с порядком $H_\varepsilon(F)$ — ε -энтропии класса функций F .

Если решение зависит от функций f_1, \dots, f_j , относимых к классам F_1, \dots, F_j , соответственно, то мы таким же образом определяем величины $h_\varepsilon(F_1), \dots, h_\varepsilon(F_j)$; пусть $h_\varepsilon = \sum_{i=1}^j h_\varepsilon(F_i)$. Нам представляется правдоподобной следующая гипотеза. В случае разумных классов функций F_1, \dots, F_j всегда можно указать способ решения со следующими характеристиками: используется информация о значениях каждой из функций f_i в $O(h_\varepsilon(F_i))$ точках, дополнительно произво-

дится $O(h_\varepsilon \ln^7(1/\varepsilon))$ арифметических действий, погрешность приближенного решения не больше ε .

В дальнейшей части доклада мы будем иллюстрировать на примерах правдоподобность этой гипотезы. В цитируемых ниже работах оценка снизу минимального количества учитываемых значений функций $f \in F$ проводится по описанной выше методике. Оценки сверху минимального объема вычислений проводятся путем построения некоторых конкретных методов, оценок количества используемой информации, объема вычислений и погрешности этих методов. Из этих оценок вытекают оценки порядков величин $h_\varepsilon(F)$ и справедливость утверждения гипотезы в рассматриваемых примерах. Нам кажется, что на пути проверки этой гипотезы для различных случаев можно получить большое число новых методов решения задач.

9. Задача численного интегрирования уравнения $y' = f(x, y)$ на $[0, 1]$ в классе правых частей $C_2^r(A)$ содержит как частный случай задачу вычисления интеграла $\int_0^1 f(x) dx$ при $f \in C_1^r(A)$. Отсюда следует, что, используя информацию о значениях функции f в N точках, нельзя получить значение решения $y(1)$ с погрешностью по порядку лучшей $O(AN^{-r})$. Эта оценка достигается сверху по порядку при использовании метода Адамса. Можно показать [10], что среди методов интегрирования на сетке с постоянным шагом методы типа Адамса являются оптимальными и по главному члену погрешности.

10. Отметим последний интересный результат, относящийся к оптимальным методам решения интегральных уравнений.

В случае решения интегрального уравнения

$$u(P) = \lambda \int_G K(P, Q) u(Q) dQ + f(P)$$

при

$$K \in C_{2s}^r(A), \quad f \in C_s^r(A)$$

для оптимального метода [11] погрешность оказывается величиной $O(N^{-r/s})$ при $O(N^2)$ арифметических действиях и $O(N^2)$ используемых значениях ядра K и $O(N)$ значениях f .

11. В случае дифференциальных уравнений в частных производных правильные оценки порядка скорости сходимости оптимальных методов в настоящее время удалось получить лишь для простейших модельных задач.

Пусть в двумерной области G с границей Γ решается уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ при граничном условии $u|_\Gamma = \varphi$. Пусть

$$\Gamma \in A(K, A, \mu), \quad \varphi \in H(p, A, \lambda)$$

$$3 \geq q = K + \mu \geq r = p + \lambda.$$

Построен [12] способ решения этой задачи со следующими характеристиками. Используется информация о значениях граничной функции в N точках, производится $O(N \ln^2 N)$ арифметических действий, объем используемой памяти $O(N)$, погрешность получаемых значений решения на некоторой сетке порядка $O(1/N^r)$, причем значение решения в любой точке может быть получено интерполяцией с этой сетки за конечное число действий и с погрешностью $O(1/N^r)$. В этих оценках возможно может быть лишь устранен множитель $\ln^2 N$ в оценке числа арифметических действий. Если $q > r$ и речь идет о вычислении значений решения лишь в некоторой строго внутренней подобласти, то этот множитель может быть устранен. При этом порядок одновременно используемой оперативной памяти уменьшается. Конечно, эти способы настолько сложны, что их построение в настоящее время можно рассматривать лишь как теоремы о существовании методов с данными оптимальными характеристиками.

Было бы интересно рассмотреть такую задачу. Пусть отыскивается значение решения уравнения Лапласа только в одной точке. До какой величины можно уменьшить при этом порядок одновременно используемой оперативной памяти. Из других работ, относящихся к построению оптимальных сеток для решения уравнений Лапласа и Пуассона, упомянем работу [13], где подробно рассмотрен случай кусочно-гладкой границы и кусочно-гладких граничных условий.

В работах [14–16] рассмотрен ряд асимптотически эффективных методов решения сеточных эллиптических уравнений на квадратных и прямоугольных сетках. Это направление очень близко примыкает к направлению построения оптимальных на классах способов решения задач, но не совпадает с ним. В частности, в [14] сеточное четырехточечное уравнение Лапласа на сетке с шагом h в случае произвольной конечной двумерной области решается за $O(h^{-2} \ln^2(h^{-1}))$ действий с погрешностью $O(h^a)$ при любом $a > 0$. В [16] сеточное уравнение в квадрате, соответствующее эллиптическому дифференциальному уравнению с непрерывными коэффициентами, решается за $O(h^{-2} \ln(\varepsilon^{-1}))$ действий с точностью ε . В [15] сеточные уравнения в прямоугольниках решаются для общих эллиптических систем с погрешностью ε за $O(h^{-2} \ln(h^{-1}) \ln(\varepsilon^{-1}))$ действий. Упомянем один результат из [14]: пусть в квадрате решается уравнение Пуассона $\Delta u = f$ при $u|_G = 0$ и $f \in \bar{W}_2^{(2)}(A)$, где $\bar{W}_2^{(2)}(A)$ — подкласс функций из $W_2^{(2)}(A)$, обращающихся в нуль на границе квадрата. Для такой задачи построен оптимальный по порядку числа действий на этом классе метод решения. Решение на сетке с шагом h получается с погрешностью $O(h^2)$ за $O(h^{-2})$ действий. Это число действий не может быть уменьшено по порядку даже при нахождении значений решения только в одной точке. Существенное значение для получения этой оценки имело использование релаксационного метода, предложенного в [17].

12. Перейдем к случаю задач со временем. Часто высказывается мнение, что при решении задач с малой гладкостью применение схем высокого порядка является бессмысленным. Мы приведем один пример, ставящий под сомнение эту точку зрения [18].

Пусть решается задача Коши для уравнения $u_t + u_x = 0$ при $u(0, x) \in W_2^{(1)}(A)$. С одной стороны, поскольку решение не имеет производных порядка выше первого, то нельзя говорить о наличии формальной аппроксимации. Тем более, на первый взгляд, нет смысла в применении схем высокого порядка аппроксимации. Однако, оказывается, что при использовании схем r -го порядка аппроксимации погрешность решения оказывается величиной порядка $O(h^{r/(r+1)})$, а при $r \sim \ln(h^{-1})$ погрешность оказывается величиной порядка $O(h)$. Эта оценка не может быть улучшена при решении задачи на сетке с шагом h . Принципиальную возможность построения схем, позволяющих решать эту задачу с погрешностью порядка $O(h)$ можно было бы заранее предвидеть из информационных сообщений.

13. Интересный пример оптимального на классе метода решения задачи разобран в [19]. Здесь построена оптимальная сетка для решения однородного уравнения теплопроводности при граничных условиях периодичности и заданном классе начальных условий. Оптимальная сетка содержит по порядку такое же количество узлов, которое необходимо для запоминания начальной функции с соответствующей точностью и общее число действий оказывается таким же по порядку.

14. В последнее время достигнуты значительные успехи в развитии так называемых методов переменных направлений решения многомерных задач со временем (см., в частности, [20, 21]). Эти методы в каком-то смысле являются близкими к оптимальным.

Пусть, например, решается уравнение

$$u_t = \sum_{j=1}^s u_{x_j x_j} + f(t, x_1, \dots, x_s)$$

в области

$$0 \leq x_1, \dots, x_s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T$$

при граничных и начальных условиях $u|_r = 0$. Рассмотрим класс правых частей $C_{r_0, \dots, r_s}(A)$, т. е. класс функций, удовлетворяющих условиям:

$$|f_{t^{(m_0)}}^{(m_0)}| \leq A, \quad |f_{x_i^{(m_i)}}^{(m_i)}| \leq A; \quad 0 \leq m_i \leq r_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

Из оценок снизу погрешности интегрирования [7] следует: при использовании информации о правой части в N точках нельзя гарантировать сходимости на этом классе по порядку лучшей $O(AN^{-r})$, где $r^{-1} = \sum_{j=0}^s r_j^{-1}$. Если мы используем

сетку с шагами τ, h_1, \dots, h_s , то нельзя гарантировать сходимости по порядку лучшей $O(A(\tau^{r_0} + \sum_{j=1}^s h_j^{r_j}))$. С другой стороны, из информационных соображений вытекает, что информации о значениях решения в узлах такой сетки достаточно для восстановления решения с погрешностью того же порядка. Исходя из этого, естественно, попытаться отыскивать метод решения на сетке с шагами, связанными соотношениями $\tau^{r_0} \asymp h_1^{r_1} \asymp \dots \asymp h_s^{r_s}$, требующий малого числа арифметических действий. Эти соображения апостериорно оправдывают внимание, проявляемое к методам переменных направлений. Для некоторых модельных классов задач удастся показать неулучшаемость методов с точностью до множителей более низкого порядка [22].

Конечно, в докладе не охвачены все работы по существу относящиеся к теме оптимизации методов решения. В значительной мере обзор ограничен рассмотрением тех работ, где авторы явно выделяют классы рассматриваемых функций и говорят об оптимальности методов, причем и эти работы не отражены в достаточной мере.

Цитированная литература

- [1] С. М. Никольский: Квадратурные формулы. М., Физматгиз, 1958.
- [2] В. В. Клюев, Н. И. Коковкин-Щербак: О минимизации числа арифметических операций при решении линейных алгебраических систем уравнений. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1965, 5, № 1, 21—33.
- [3] В. В. Клюев, Н. И. Коковкин-Щербак: О минимизации вычислительных алгоритмов при некоторых преобразованиях матриц. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 1, 3—13.
- [4] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров: ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах. Успехи матем. наук, 1959, 14, вып. 2 (86), 3—80.
- [5] А. Г. Витушкин: Оценка сложности задачи табулирования. М., Физматгиз, 1959.
- [6] С. А. Смоляк: Кандидатская диссертация. МГУ, 1966.
- [7] Н. С. Бахвалов: Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций. В сб. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., Наука, 1964, 5—63.
- [8] Н. М. Коробов: Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., Физматгиз, 1963.
- [9] И. Ф. Шарыгин: Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 370—376.
- [10] Н. С. Бахвалов: Оптимальные свойства формул численного интегрирования Адамса и Грегори. В сб. Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. Машгиз, 1963, 5—22.
- [11] К. В. Емельянов, А. М. Ильин: О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 1967, 7, № 4, 905—910.

- [12] *Н. С. Бахвалов*: О численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Вестн. МГУ, 1959, № 5, 171—195.
- [13] *Е. А. Волков*: Развитие метода сеток для уравнения Лапласа на конечных и бесконечных областях с кусочно-гладкой границей. Доктoрская диссертация. МИАН, 1967.
- [14] *Н. С. Бахвалов*: Об одном способе приближенного решения уравнения Лапласа. ДАН СССР, 1957, 114, № 3, 455—458.
- [15] *Е. Г. Дьяконов*: О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 1, 12—34.
- [16] *Н. С. Бахвалов*: О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 5, 861 до 883.
- [17] *Р. П. Федоренко*: О скорости сходимости одного итерационного процесса. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 3, 559—564.
- [18] *Цинь-Мэн-Чжао*: О максимальном порядке погрешности интегрирования уравнения $u_t + u_x = 0$ методом конечных разностей. Ж. Вычисл. мат. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 1118—1121.
- [19] *Чжан-Гуан-Цзюань*: О минимальном числе узлов при численном интегрировании уравнения теплопроводности. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 1, 80—88.
- [20] *А. А. Самарский*: О регуляризации разностных схем. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 1, 62—93.
- [21] *Е. Г. Дьяконов*: Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами. В сб. Вычисл. методы и программирование. М., Изд-во МГУ, 1965, вып. 3, 163—190.
- [22] *Н. С. Бахвалов*: Об оценках объема вычислительной работы при решении задач. Доклад на ИСМ, Москва, 1966.
- [23] *Н. С. Бахвалов*: О приближенном вычислении кратных интегралов. Вест. МГУ. сер. матем., физ., астрон., химии, 1959, № 4, 3—18.

Проф. *Н. С. Бахвалов*, Московский государственный университет, мех.-мат. факультет, Москва В-234, СССР.