Ján Pidany

O možnosti úpravy sústavy dvoch rovníc s ôsmimi neznámými na tvar $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$, ktorý môžeme zostrojiť pomocou nomogramov s priesvitkou o dvoch stupňoch voľnosti

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 2, 136–142

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103080`

O MOŽNOSTI ÚPRAVY SÚSTAVY DVOCH ROVNÍC S ÔSMIMI NEZNÁMYMI NA TVAR $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$, KTORÝ MÔŽEME ZOSTROJIŤ POMOCOU NOMOGRAMOV S PRIESVITKOU O DVOCH STUPŇOCH VOĽNOSTI

JÁN PIDANY

(Došlo dňa 12. júla 1966.)

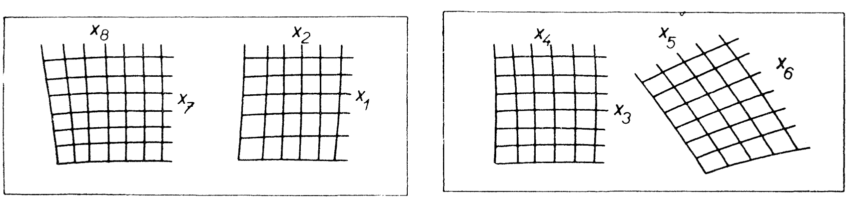
Uvažujme sústavu dvoch rovníc s ôsmimi neznámymi

$$(1) \qquad x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,$$
$$x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,.$$

Skúmajme podmienky, pri ktorých sa sústava (1) dá upraviť na tvar

$$(2) \qquad A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}\,,$$
$$B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5\,,$$

kde $A_{i,k} = A(x_i, x_k)$, $B_{i,k} = B(x_i, x_k)$,
ktorý môžeme zobraziť nomogramom s priesvitkou s dvoma stupňamí voľnosti (obr. 1).



Kľúč: $(x_7, x_8) \models\!\dashv (x_3, x_4)$, $(x_1, x_2) \models\!\dashv (x_5, x_6)$.
Obr. 1.

Nech f a g v oblasti G sú dostatočne hladké, pri čom v $G_1 \subset G$

$$f'_{x_i} \neq 0\,, \quad g'_{x_i} \neq 0\,, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,,$$

kde

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,, \quad g'_{x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\,.$$

Hľadajme takú sústavu (2), pre ktorú v oblasti rozsahu x_i platí

$$A_{7,8}(f, g) \equiv A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}\,, \tag{3}$$
$$B_{7,8}(f, g) \equiv B_{1,2} + B_3 + B_5\,,$$

pri čom $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ sú dostatočne hladké a

$$\frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0\,, \quad i = 1,7. \tag{4}$$

Poznámka 1. Elementy binárneho poľa (x_7, x_8) môžu byť v kontakte s prvkami ľubovoľného z binárnych polí (x_1, x_2), (x_3, x_4) a (x_5, x_6).

Veta. *Aby sústava dvoch rovníc s ôsmimi neznámymi sa dala upraviť na tvar* (3), *je nutné a postačujúce, aby*

$$\frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} = Q(f, g)\,, \quad i = 4,6\,, \tag{5}$$

$$\frac{f'_{x_4}}{f'_{x_6}} = T(x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{f'_{x_4}}{f'_{x_6}}\right) = P(x_3, x_4)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} : \frac{\partial f}{\partial x_4} = R(f, g)\,, \tag{8}$$

$$\frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \neq 0\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 B_{7,8}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 A_{7,8}}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0\,, \quad i = 1, 2;\ \ j = 3,5\,. \tag{10}$$

Dôkaz. a) Podmienka nutná. Predpokladajme, že sústava (3) existuje. Derivujme druhú identitu (3) podľa x_4 a x_6

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv 0\,, \quad i = 4,6\,, \tag{11}$$

odkiaľ

$$\frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} = -\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} : \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g}\,, \quad i = 4,6\,. \tag{12}$$

Ak označíme pravú stranu (12) ako $Q(f, g)$, dostaneme podmienku (5).

Derivujme prvú identitu (3) podľa x_4 a x_6

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} f'_{x_4} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} g'_{x_4} \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} f'_{x_6} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} g'_{x_6} \equiv \frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_6}. \tag{14}$$

Po úprave z (13) a (14) dostaneme podmienku (6), tj.

$$\frac{f'_{x_4}}{f'_{x_6}} = \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} : \frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_6} = T(x_3, x_4, x_5, x_6)\,. \tag{15}$$

Logaritmujme (15), potom derivujme podľa x_4

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{f'_{x_4}}{f'_{x_6}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4}\right). \tag{16}$$

Ak označíme pravú stranu (16) ako $P(x_3, x_4)$, dostaneme podmienku (7), odkiaľ

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} = \varphi(x_3)\, e^{\int P(x_3, x_4) \mathrm{d} x_4}, \tag{17}$$

kde $\varphi(x_3)$ je ľubovoľná funkcia.

Po úprave z (5) a (13) dostaneme

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g)\, \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \frac{1}{f'_{x_4}}\,. \tag{18}$$

Aby sme mohli (18) považovať za parciálnu diferenciálnu rovnicu vzhľadom na $A_{7,8}(f, g)$, musí platiť (8).

Z identity (3) dostaneme

$$\frac{D(A_{1,2}, B_{1,2})}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(A_{7,8}, B_{7,8})}{D(x_7, x_8)} \cdot \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)}\,. \tag{19}$$

Podmienka (9) vyplýva priamo z (4) a (19).

Ak derivujeme (3) podľa x_i, x_j, $i = 1,2$; $j = 3,5$, dostaneme podmienku (10). Tým sme nutnú podmienku dokázali.

b) Podmienka postačujúca. Predpokladajme, že pre f a g platia podmienky (5) až (10), dokážeme, že existuje sústava rovníc (3) vyhovujúca podmienke (4).

Funkcie f a g sú dané; z (5) určíme $Q(f, g)$ a z (6), (7) a (17) určíme $R(f, g)$.

Ak poznáme $Q(f, g)$ a $R(f, g)$ môžeme zostaviť parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} = R(f, g)\,. \tag{20}$$

Nech táto rovnica má riešenie

$$A_{7,8}(f, g) = A(f, g) + F[B(f, g)]\,, \tag{21}$$

pri čom $A(f, g)$ je partikulárne riešenie (20) a $F[B(f, g)]$ obecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice prislúchajúcej k (20). Pomocou (8) upravme riešenie (21) na tvar (18). Z (6), (7) a (17) vyplýva, že

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4}\cdot\frac{1}{T}\right) = 0\,, \tag{22}$$

odkiaľ

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} = T\frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_6}\,. \tag{23}$$

Z (18) a (23) dostaneme

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} \equiv \frac{\partial A_{7,8}}{\partial x_6}\cdot\frac{1}{f'_{x_6}}\,. \tag{24}$$

Pomocou (5) upravíme (18) a (24) na tvar (13) a (14), ktoré môžeme písať aj takto;

$$\frac{\partial}{\partial x_4}[A_{7,8}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4}\,, \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_6}[A_{7,8}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_6}\,. \tag{26}$$

Integrujme (25) podľa x_4

$$A_{7,8}(f, g) = A_{3,4} + K(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6)\,. \tag{27}$$

Derivujme (27) podľa x_6

$$\frac{\partial}{\partial x_6}[A_{7,8}(f, g)] = \frac{\partial K}{\partial x_6}\,. \tag{28}$$

Z (26) a (28) dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial x_6} = \frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_6}\,, \tag{29}$$

tj.

$$K(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6) = K_1(x_1, x_2, x_3, x_5) + A_{5,6} \,. \tag{30}$$

Ak berieme do úvahy podmienku (10), potom z (27) a (30) dostaneme

$$A_{7,8}(f, g) = A_{3,4} + A_{5,6} + K_2(x_1, x_2) + K_3(x_3) + K_5(x_5) \,. \tag{31}$$

Ak označíme

$$K_2(x_1, x_2) = A_{1,2} \,, \quad A_{3,4} + K_3(x_3) = A_{3,4} \quad \text{a} \quad A_{5,6} + K_5(x_5) = A_{5,6}$$

dostaneme prvú identitu.

Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} = 0 \tag{32}$$

má obecné riešenie

$$B_{7,8}(f, g) = F_1[B(f, g)] \,, \tag{33}$$

ktoré pomocou (5) môžeme upraviť na tvar (11), alebo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [B_{7,8}(f, g)] \equiv 0 \,, \quad i = 4{,}6 \,, \tag{34}$$

odkiaľ

$$B_{7,8}(f, g) = K_4(x_1, x_2, x_3, x_5) \,. \tag{35}$$

Z podmienky (10) a vzťahu (35) dostaneme

$$B_{7,8}(f, g) = B_{1,2} + B_3 + B_5 \,, \tag{36}$$

tým sme dokázali druhú identitu (3).

Ak zoberieme do úvahy (9), ľahko sa presvedčíme, že odvodená sústava vyhovuje podmienke (4).

Tým sme vetu dokázali.

Dôsledok. Z vety priamo vyplýva metóda určenia funkcie $A_{i,k}$, $B_{i,k}$.

Pomocou (5) a (8) určíme $Q(f, g)$ a $R(f, g)$ a zostavíme parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} = R(f, g) \,. \tag{37}$$

Riešenie (37) určí

$$A_{7,8}(f, g) = A(f, g) + F[B(f, g)] \,. \tag{38}$$

Obecné riešenie homogénnej parciálnej diferenciálnej rovnice prisluchajúcej k (37) určí

$$B_{7,8}(f, g) = F_1[B(f, g)]\,. \tag{39}$$

Ak do (38) a (39) namiesto f a g dosadíme dané funkcie, potom

$$A_{7,8}(x_7, x_8) = A(f, g) + F[B(f, g)]\,, \tag{40}$$

$$B_{7,8}(x_7, x_8) = F_1[B(f, g)]\,. \tag{41}$$

Z vety vyplýva, že pravé strany (40) a (41) sa dajú upraviť na tvar (2).

Poznámka 2. F a F_1 sú ľubovoľné funkcie, ktoré nám vhodnou voľbou umožňujú dosiahnuť lepšiu čitateľnosť na nomograme.

Príklad. Zistite, či sústava

$$\begin{aligned} x_7 &= \sqrt{(x_1 + x_3 + x_4^2 + x_5 x_6 + x_6^2)}\,, \\ x_8 &= \lg(x_1 x_2 + x_4^2 + x_5 x_6 + x_6^2)\,, \end{aligned} \tag{42}$$

sa dá zobraziť pomocou nomogramov s priesvitkou s dvoma stupňami voľnosti.

Ľahko sa presvedčíme, že predpoklady vety sú splnené, pri čom

$$Q(f, g) = \frac{2f}{e^g}\,, \quad R(f, g) = f\,.$$

Zostavme rovnicu

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + \frac{2f}{e^g} \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} = f\,,$$

ktorá má riešenie

$$A_{7,8}(f, g) = \tfrac{3}{2} f^2 - e^g\,,$$

tj.

$$\tfrac{3}{2} x_7^2 - e^{x_8} = x_1 \left(\tfrac{3}{2} - x_2\right) + \tfrac{3}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4^2 + \tfrac{1}{2} x_6 (x_5 + x_6)\,. \tag{43}$$

Podobne rovnica

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} + \frac{2f}{e^g} \cdot \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} = 0$$

má riešenie

$$B_{7,8}(f, g) = f^2 - e^g\,,$$

tj.

$$x_7 - e^{x_8} = x_1(1 - x_2) + x_3\,. \tag{44}$$

Z (43) a (44) vyplýva, že sústava (42) sa dá zobraziť pomocou nomogramu s priesvitkou s dvoma stupňami voľnosti.

Literatúra

[1] *Богольюбов Ю. И.:* О представимости системы двух уравнений с шестью переменными в виде, допускающем построение номограммы с ориентированным транспарантом в виде линейки. Номографический сборник № 3. ВЦ АН СССР 1965.

[2] *Хованский Г. С.:* Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарентом. Вычислительная математика № 7. АН СССР, 1961.

[3] *Pleskot V.*: Nomografie, SNTL, Praha 1963.

Резюме

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ВОСМЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ В ВИДЕ $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$, ДОПУСКАЮЩЕМ ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММЫ С ПРОЗРАЧНЫМ ОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПАРАНТОМ

ЯН ПИДАНЫ (JÁN PIDANY)

В статье выведены необходимые и достаточные условия представимости системы $x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ в виде $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$, допускающем построение номограммы с прозрачным ориентированным транспарантом.

Summary

ABOUT THE POSSIBILITY OF TRANSFORMATION OF A SYSTEM OF TWO EQUATIONS WITH EIGHT VARIABLES INTO THE FORM $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$ WITH THE AID OF NOMOGRAPH

JÁN PIDANY

This paper derives the necessary and sufficient conditions under which the system of equations $x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ can be transformed into the form $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$; this can be done with the help of nomograph with a oriented transparent.

Adresa autora: *Ján Pidany*, Katedra matematiky SF VŠT, Nám. Februárového víťazstva 9, Košice.