Aplikace matematiky

Ján Pidany

O možnosti úpravy sústavy dvoch rovníc o siedmich premenných na tvar $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$, ktorý môžeme zostrojiť pomocou nomogramov s priesvitkou o dvoch stupňoch voľnosti

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 5, 410–416

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103046`

O MOŽNOSTI ÚPRAVY SÚSTAVY DVOCH ROVNÍC O SIEDMICH PREMENNÝCH NA TVAR $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$, KTORÝ MÔŽEME ZOSTROJIŤ POMOCOU NOMOGRAMOV S PRIESVITKOU O DVOCH STUPŇOCH VOĽNOSTI

JÁN PIDANY

(Došlo dňa 7. februára 1966.)

Uvažujme sústavu rovníc

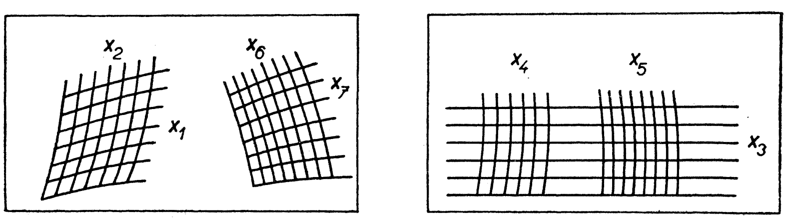
(1)
$$x_6 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$
$$x_7 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Hľadajme podmienky, pri ktorých (1) môžeme prepísať na tvar

(2)
$$A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5},$$
$$B_{6,7} = B_{1,2},$$

kde $A_{i,k} = A(x_i, x_k)$, $B_{i,k} = B(x_i, x_k)$.

Sústavu (2) môžeme zobraziť nomogramom s transparentom o dvoch stupňoch voľnosti (obr. 1) [2].



Podklad. Transparent.

Kľúč: $(x_1, x_2) \boxminus (x_3, x_4)$; $(x_6, x_7) \boxminus (x_3, x_5)$.

Obr. 1.

Nech f a g v oblasti G sú dostatočne hladké, pričom v oblasti $G_1 \subset G$ platí

$$f'_{x_i} \not\equiv 0\,, \quad g'_{x_i} \not\equiv 0\,, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5\,,$$

kde

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = g'_{x_i}\,.$$

Potrebujeme nájsť takú sústavu (2), pre ktorú v oblasti rozsahu x_i platí

$$\begin{aligned} &A_{6,7}(f, g) \equiv A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}\,, \\ &B_{6,7}(f, g) \equiv B_{1,2}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Nech $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ sú dostatočne hladké, pričom

$$\frac{D(A_{1,2}, B_{1,2})}{D(x_1, x_2)} \neq 0\,, \quad \frac{D(A_{6,7}, B_{6,7})}{D(x_6, x_7)} \neq 0\,. \tag{4}$$

Veta. *Nutnou a postačujúcou podmienkou, aby existovala sústava* (3) *splňujúca podmienku* (4) *je, aby*

$$\frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} = Q(f, g)\,, \quad i = 3, 4, 5\,, \tag{5}$$

$$\frac{f'_{x_4}}{f'_{x_5}} = T(x_3, x_4, x_5)\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{f'_{x_4}}{f'_{x_5}}\right) = P(x_4, x_5)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} : \frac{\partial f}{\partial x_4} = R(f, g)\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 A_{6,7}}{\partial x_i\, \partial x_3} = 0\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{9}$$

$$\frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \neq 0\,. \tag{10}$$

Dôkaz: a) Podmienka je nutná.

Predpokladajme, že sústava (3) existuje a vyhovuje (4). Derivujme druhú identitu (3) podľa x_3, x_4, x_5

$$\frac{\partial B_{6,7}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial B_{6,7}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv 0\,, \quad i = 3, 4, 5\,. \tag{11}$$

Z (11) dostaneme

$$\frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} = -\frac{\partial B_{6,7}}{\partial f} : \frac{\partial B_{6,7}}{\partial g}, \quad i = 3, 4, 5. \tag{12}$$

Ak označíme pravú stranu (11) $Q(f, g)$, dostaneme podmienku (5). Derivujme prvú identitu (4) podľa x_4 a x_5

$$\frac{\partial A_{6,7}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial A_{6,7}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv \frac{\partial A_{3,i}}{\partial x_i}, \quad i = 4,5. \tag{13}$$

Z (6) a (13) dostaneme

$$\left[\frac{\partial A_{6,7}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{6,7}}{\partial g}\right] f'_{x_i} \equiv \frac{\partial A_{3,i}}{\partial x_i}, \quad i = 4, 5, \tag{14}$$

odkiaľ

$$\frac{f'_{x_4}}{f'_{x_5}} \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} : \frac{\partial A_{3,5}}{\partial x_5}. \tag{15}$$

Ak označíme pravú stranu (15) $T(x_3, x_4, x_5)$, dostaneme podmienku (6).

Logaritmujme (15) a derivujme podľa x_4

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{f'_{x_4}}{f'_{x_5}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4}\right). \tag{16}$$

Označme pravú stranu (16) $P(x_3, x_4)$. Dostaneme podmienku (7), pričom z (16) vypočítame

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} = \varphi(x_3)\, e^{\int P(x_3, x_4) \mathrm{d} x_4}, \tag{17}$$

kde $\varphi(x_3)$ je ľubovoľná funkcia.

Pre $i = 4$ z (14) dostaneme

$$\frac{\partial A_{6,7}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{6,7}}{\partial g} = \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \frac{1}{f'_{x_4}}. \tag{18}$$

Aby rovnica (18) bola parciálnou diferenciálnou rovnicou pre $A_{6,7}(f, g)$, musí platiť (8).

Podmienka (9) plynie priamo z prvej identity (3).

Z identity (3) dostaneme

$$\frac{D(A_{1,2}, B_{1,2})}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(A_{6,7}, B_{6,7})}{D(x_6, x_7)} \cdot \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} . \tag{19}$$

Z (19) a (4) dostaneme podmienku (10).

b) Podmienka je postačujúca.

Predpokladajme, že pre f a g platia podmienky (5)–(10). Dokážeme, že potom existuje sústava (3), ktorá splňuje podmienku (4). Pretože funkcie f a g sú dané, určíme z (5) $Q(f, g)$ a podľa (6), (7), (8) a (17) určíme $R(f, g)$.

Ak poznáme $Q(f, g)$ a $R(f, g)$ zostavme parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial A_{6,7}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{6,7}}{\partial g} = R(f, g) , \tag{20}$$

ktorej riešenie nech je

$$A_{6,7}(f, g) = A(f, g) + \Phi[B(f, g)] , \tag{21}$$

kde $A(f, g)$ je partikulárne riešenie (20) a $\Phi[B(f, g)]$ obecné riešenie homogénnej rovnice prisluchajúcej k (20).

Berme do úvahy podmienku (5) pre riešenie (21), potom (20) môžeme písať v tvare (18).

Z podmienky (6), (7) a (17) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} \cdot \frac{1}{T} \right) = 0 ,$$

odkiaľ

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} = T \frac{\partial A_{3,5}}{\partial x_5} . \tag{22}$$

Z (6), (18) a (22) dostaneme

$$\frac{\partial A_{6,7}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{6,7}}{\partial g} \equiv \frac{\partial A_{3,5}}{\partial x_5} \frac{1}{f'_{x_5}} . \tag{23}$$

Prepíšme (18) a (23) na tvar (14) a pomocou (5) na tvar (13), alebo

$$\frac{\partial}{\partial x_4} [A_{6,7}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} , \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_5} [A_{6,7}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{3,5}}{\partial x_5} . \tag{25}$$

Integrujme (24) podľa x_4

(26) $$A_{6,7} = A_{3,4} + K(x_1, x_2, x_3, x_5)\,.$$

Derivujme (26) podľa x_5

(27) $$\frac{\partial}{\partial x_5}[A_{6,7}(f, g)] = \frac{\partial K}{\partial x_5}\,.$$

Z (25) a (27) dostaneme

(28) $$\frac{\partial A_{3,5}}{\partial x_5} = \frac{\partial K}{\partial x_5}\,.$$

Ak berieme do úvahy (9), (27) a (28), potom $K = A_{1,2} + A_{3,5}$ preto

$$A_{6,7}(f, g) = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}\,.$$

Tým sme dostali prvú identitu (3).

Nech

(29) $$\frac{\partial B_{6,7}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial B_{6,7}}{\partial g} = 0$$

má riešenie

(30) $$B_{6,7}(f, g) = \Phi_1[B(f, g)]\,.$$

Ak pre riešenie (30) berieme do úvahy (5), môžeme (29) prepísať na tvar (11), alebo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[B_{6,7}(f, g)] \equiv 0\,, \quad i = 3, 4, 5\,,$$

odkiaľ

$$B_{6,7}(f, g) = B_{1,2}\,.$$

Z predpokladu (10) dostaneme, že sústava (3) vyhovuje podmienke (4).

Príklad: Majme sústavu

$$u = \sqrt{(x + z^2n^2 + zm^2)}\,,$$
$$v = (xy^2 - z^2n^2 - zm^2)^2\,.$$

Ľahko sa presvedčíme, že predpoklady vety sú splnené, pričom $Q(f, g) = -4f\sqrt{g}$, $R(f, g) = f$.

Zostavme parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial A_{6,7}}{\partial f} - 4f\sqrt{g}\,\frac{\partial A_{6,7}}{\partial g} = f\,,$$

ktorá má riešenie

$$A_{6,7}(f, g) = \tfrac{3}{2}f^2 + \sqrt{g}\,,$$

tj.

$$A_{6,7}(f, g) = x(\tfrac{3}{2} + y^2) + \tfrac{1}{2}z^2n^2 + \tfrac{1}{2}zm^2\,.$$

Podobne parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial B_{6,7}}{\partial f} - 4f\sqrt{g}\,\frac{\partial B_{6,7}}{\partial g} = 0$$

má riešenie

$$B_{6,7}(f, g) = f^2 + \sqrt{g}\,,$$

tj.

$$B_{6,7}(f, g) = x(1 + y^2)\,.$$

Literatúra

[1] Боголюбов Ю. И.: О представимости системы двух уравнений с шестью переменными в виде, допускаюшем построение номограммы с ориетированным транспарантом в виде линейки. Номографический сборник №. 3. АН СССР 1965.

[2] *Хованский Г. С.:* Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом. Вычислительная математика №. 7. АН СССР 1961.

[3] *Pleskot V.:* Nomografie. SNTL, Praha 1963.

Резюме

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С СЕМЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ В ВИДЕ $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$, ДОПУСКАЮЩЕМ ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММЫ С ПРОЗРАЧНЫМ ОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПЛАРАНТОМ

ЯН ПИДАНИ (JÁN PIDANY)

В статье выведены необходимые и достаточные условия представимости системы $x_6 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $x_7 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ в виде $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$, допускающем построение номограммы с прозрачным ориентированным транспарантом.

Summary

ABOUT THE POSSIBILITY OF TRANSFORMATION OF A SYSTEM OF TWO EQUATIONS WITH SEVEN VARIABLES INTO THE FORM $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$ WHICH CAN BE CONSTRUCTED BY HELP OF NOMOGRAM WITH A TRANSPARENT WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

JÁN PIDANY

This paper derives the necessary and sufficient conditions under which the system of equations $x_6 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $x_7 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ can de transformed into the form $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$. $B_{6,7} = B_{1,2}$ which can be constructed by help of nomogram with a transparent with two degrees of freedom.

Adresa autora: Ján Pidany, Katedra matematiky SF VŠT, Náměstí Februárového víťazstva 9, Košice.