

Aplikace matematiky

Klaus Lommatzsch

Ein Gradienten- und Schwerpunktverfahren der linearen und nichtlinearen Optimierung

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 4, 303–313

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103033>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EIN GRADIENTEN- UND SCHWERPUNKTVERFAHREN DER LINEAREN UND NICHTLINEAREN OPTIMIERUNG

KLAUS LOMMATZSCH

(Eingereicht am 22. März 1965.)

Die Aufgabe der linearen und nichtlinearen Optimierung besteht darin, über einer gewissen wohldefinierten nichtleeren Punktmenge K des euklidischen Raumes E_n solche Punkte $\hat{\mathbf{x}}$ (die sogenannten Lösungspunkte) zu bestimmen, die einer vorgegebenen reellen Funktion $F(\mathbf{x})$ einen maximalen bzw. minimalen Wert bezüglich aller Punkte aus K zuordnen.

Mit \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{x}}$ bezeichnen wir Vektoren mit den Komponenten x_1, x_2, \dots, x_n bzw. $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$. Es sei $F(\mathbf{x})$ eine im ganzen Raum oder in einem Teilraum des E_n , der K umfasst, definierte, über K nicht konstante Funktion der n Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$F(\mathbf{x})$ heisst Zielfunktion, K nennen wir den Restriktionsbereich. Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ heisst Lösungspunkt, wenn für ihn gilt:

$$F(\mathbf{x}) \leq F(\hat{\mathbf{x}}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in K, \text{ wenn es sich um eine Maximumaufgabe handelt} \\ \text{(D 1a);}^1)$$

$$F(\mathbf{x}) \geq F(\hat{\mathbf{x}}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in K, \text{ wenn es sich um eine Minimumaufgabe handelt} \\ \text{(D 1b).}$$

Die Gesamtheit der Lösungspunkte $\hat{\mathbf{x}}$ einer Aufgabe bezeichnen wir mit L (D 2).

Im weiteren beschränken wir uns auf Maximumaufgaben; alle folgenden Überlegungen lassen sich leicht auf die entsprechenden Minimumaufgaben übertragen.

Die in diesem Artikel angegebenen Gradienten- und Schwerpunktmethoden beziehen sich auf einen speziellen Typ der Aufgaben der linearen und nichtlinearen Optimierung, den wir durch die folgenden drei Festlegungen definieren:

a) K ist eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge des E_n (V 1);

¹⁾ Wir werden Definitionen mit D, Eigenschaften mit E und Voraussetzungen mit V bezeichnen.

b) $F(\mathbf{x}) = C$ ist eine Gleichung, die für wachsendes (bzw. fallendes) C eine Schar kongruenter, schlichter Hyperflächen über K beschreibt (V 2);

c) L ist eine nichtleere, konvexe Punktmenge auf dem Rande von K (evtl. eine Einermenge), sie fällt mit allen lokalen Maxima der Aufgabe zusammen (V 3).

Diese Bedingungen V 1, 2, 3 sind z. B. für Aufgaben erfüllt, bei denen die Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ linear und K ein konvexes Polyeder bzw. eine andere abgeschlossene und konvexe Punktmenge ist, oder bei denen $F(\mathbf{x})$ eine konkave Funktion über K und K eine abgeschlossene und konvexe Punktmenge ist und die Lösungsmenge L keine inneren Punkte von K enthält (vergl. dazu z. B. [1]).

Entsprechend dem Charakter der vorgeschlagenen Verfahren verwenden wir in diesem Artikel eine von der klassischen Definition der linearen Optimierung abweichende Klassifizierung. Unter dem Begriff der linearen Optimierung fassen wir alle die Aufgaben zusammen, in denen $F(\mathbf{x})$ eine lineare Funktion ist

$$F(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

und K der Bedingung V 1 genügt (die Forderungen V 2, 3 sind dann automatisch erfüllt). Unter die nichtlinearen Probleme werden wir nur solche Aufgaben einordnen, die den Bedingungen V 1, 2, 3 genügen und deren Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ dabei nichtlinear ist.

Die hier vorgeschlagenen Lösungsmethoden sind unendliche Iterationsverfahren. Gegenüber allen bekannten Gradientenverfahren verläuft der Iterationsweg ganz im Innern von K (vergl. etwa das Verfahren der projizierten Gradienten von ROSEN, das Multiplexverfahren von R. FRISCH, die Methode von BULAWSKI u.a. — übersichtliche Darstellungen dieser Methoden und Bibliographien findet man z. B. in [1], [2] und in vielen Einzeldarstellungen). Wenn Ph. WOLFE in [3] die bekannten Lösungsverfahren mit dem Aufstieg auf einen Berg vergleicht, so kann man die hier beschriebenen Methoden als Verfahren des „inneren Aufstiegs“ charakterisieren. Wir setzen voraus, dass uns in jedem Fall ein innerer Punkt \mathbf{x}_0 bekannt ist (V 4). Von diesem ausgehend, werden abwechselnd Bewegungen in Richtung des Gradienten von $F(\mathbf{x})$ und Schwerpunktberechnungen in entsprechenden konvexen Punktmenge ausgeführt, bzw. nur Schwerpunktberechnungen. Soweit mit dem Gradienten der Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ gearbeitet wird, müssen wir natürlich auch noch seine Existenz fordern (V 5). Zum Schluss dieses Artikels werden noch Möglichkeiten angegeben, wie die Berechnung der Schwerpunkte durch recht einfache Rechnungen umgangen werden kann; dieser Absatz hat allerdings nur empirischen Charakter, da die dort angegebenen Methoden bisher noch nicht allgemein abgeleitet wurden.

§ 1. EIN GRADIENTEN- UND SCHWERPUNKTVERFAHREN
DER LINEAREN OPTIMIERUNG

Die Aufgabe lautet:

zu maximieren ist die lineare Form

$$(1) \quad F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

über der n -dimensionalen, die Bedingung V 1 erfüllenden Punktmenge K . \mathbf{x}_k sei irgendein Punkt des E_n . Wir definieren die Hyperebene F_k und den Halbraum H_k

$$(D 3) \quad F_k = \{\mathbf{x}; F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_k)\},$$

$$(D 4) \quad H_k = \{\mathbf{x}; F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}_k)\}.$$

Für das weitere setzen wir noch voraus, dass ein innerer Punkt \mathbf{x}_0 (der Ausgangspunkt) aus K bekannt sei (V 4) und dass $K_0 = K \cap H_0$ endlich ist (V 6), d. h. dass die konvexe Punktmenge K_0 keinen Halbstrahl enthält. Dadurch ist gesichert, dass auch L nur endliche Punkte enthält.

Wir definieren die Schnittebenen T_k und die Schwerpunkte \mathbf{s}_k :

$T_k = K \cap F_k$ für irgendeinen inneren Punkt \mathbf{x}_k aus K (D 5), die T_k sind nicht leer, denn $\mathbf{x}_k \in T_k$, und wieder konvexe Punktmenge, sie haben die Dimension $n - 1$ (E 1);

$$(D 6) \quad \mathbf{s}_k = \frac{\int_{\mathbf{x} \in T_k} \mathbf{x} dT_k}{\int_{T_k} dT_k},$$

\mathbf{s}_k ist ein innerer Punkt von T_k , falls T_k innere Punkte besitzt (E 2).

Wir sagen, dass eine Schnittfläche T_k oberhalb einer Schnittfläche T_l liegt – in Zeichen $T_k > T_l$ –, falls $F(\mathbf{x}_k) > F(\mathbf{x}_l)$ (D 7).

\mathbf{x}_k sei ein innerer Punkt aus K . Das Gradienten- und Schwerpunktverfahren besteht aus 2 Phasen, die miteinander abwechseln:

- (2) 1. Auf der durch \mathbf{x}_k bestimmten Schnittfläche T_k wird der Schwerpunkt \mathbf{s}_k gemäß D 6 berechnet.
- (3) 2. Bewegung in Richtung des Gradienten \mathbf{c} von $F(\mathbf{x})$, wobei \mathbf{s}_k als Ausgangspunkt genommen wird

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k + g u^{(k)} \mathbf{c},$$

dabei ist $u^{(k)}$ die Länge der Strecke von \mathbf{s}_k längs des Gradienten \mathbf{c} bis zum Rand von K und g eine reelle Zahl mit $0 < g < 1$. \mathbf{x}_{k+1} ist also ein innerer Punkt von K . Man geht wieder zu Phase 1 über.

Wir bemerken noch, dass $F(\mathbf{x}_k) = F(\mathbf{s}_k)$ (E 3) und dass die Bewegungsrichtung in Phase 2 so gewählt wird, dass $F(\mathbf{s}_k) < F(\mathbf{x}_{k+1})$ (V 7).

Beginnt man nun mit einem beliebigen inneren Ausgangspunkt $\mathbf{x}_0 \in K$, so lässt sich – wie man leicht sieht – eine unendliche in K liegende Punktfolge $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots$ nach dem obigen Verfahren konstruieren, der die ebenfalls unendliche Folge von Schnittflächen $T_0, T_1, T_2, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots$ eindeutig zugeordnet ist. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen (V 7) gilt

$$(E 4) \quad T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k < T_{k+1} < \dots$$

Für jeden Lösungspunkt $\hat{\mathbf{x}}$ gilt wegen D 1a und V 3

$$(E 5) \quad F(\mathbf{x}_v) < F(\hat{\mathbf{x}}), v = 0, 1, 2, \dots$$

In dem folgenden Satz wird nun gezeigt, dass die Folge $\{T_k\}$ gegen die Lösungsmenge L konvergiert, d. h. auch die Folge der Punkte $\{\mathbf{x}_k\}$ bzw. $\{\mathbf{s}_k\}$ nähert sich mit beliebiger Genauigkeit einem Lösungspunkt $\hat{\mathbf{x}}$ der Aufgabe. Der Beweis beruht auf dem Auswahlssatz von BLASCHKE, der hier nach [4] (wo auch die hier benutzten geometrischen Begriffe und Eigenschaften konvexer Punktfolgen zu finden sind) zitiert wird:

Ist eine nicht endliche Menge von Eikörpern gleichmässig beschränkt, so dass sie alle in der gleichen ausreichend grossen Kugel liegen, so lässt sich eine Eikörperfolge herausgreifen, die gegen einen Eikörper konvergiert.

Satz 1. Eine Teilfolge, der nach dem obigen Verfahren ((2), (3)) konstruierten Folge $\{T_k\}$, konvergiert unter den gemachten Voraussetzungen V1 und V4 gegen eine Punktmenge T_G , für die gilt $T_G = L$.

Beweis. Die Folge $\{T_k\}$ liegt in K , sie ist also gleichmässig beschränkt. Da nach Voraussetzung die Folge $\{T_k\}$ nicht endlich ist und die T_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) konvex sind, kann man auf Grund des Blaschkeschen Auswahlssatzes eine unendliche Teilfolge $\{T'_k\}$ aus $\{T_k\}$ herausgreifen, die gegen einen konvexen Teilkörper konvergiert. Diesen nennen wir T_G . Für T_G gilt $T_k < T_G$ für alle k (E 6). Wir werden nun zwei Fälle unterscheiden:

1. T_G hat mit K innere Punkte gemeinsam. Dann hat T_G aber einen Schwerpunkt, der auch innerer Punkt ist. Auf Grund der Konvexität von K kann das Verfahren dann fortgesetzt werden, d.h. oberhalb von T_G liegen unendlich viele weitere T_l mit $T_l > T_G$. Dieser Fall steht im Widerspruch zu E 6 und kann nicht eintreten.

2. T_G hat mit K nur Randpunkte gemeinsam. Auf Grund der Beziehung D 5 ist T_G eine Hyperebene $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_T)$ zugeordnet, wobei \mathbf{x}_T ein Punkt der Menge T_G ist. Es gilt: $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_T)$ ist, da T_G nur Randpunkte von K besitzt, eine Stützebene von K und enthält T_G . Auf Grund von E 6 gilt für alle \mathbf{x}_T aus T_G , dass $F(\mathbf{x}_T) \geq F(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in K$, d. h. $T_G = L$.

Zum Schluss des Beweises sei noch bemerkt, dass T_G auch eindeutig bestimmt ist. Gäbe es eine andere unendliche Teilfolge $\{T_k''\}$ der Folge $\{T_k\}$, die gegen den konvexen Körper \bar{T}_G konvergiert, so wären die beiden Hyperebenen $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_T)$ und $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_T)$, $\mathbf{x}_T \in T_G$, $\mathbf{x}_T \in \bar{T}_G$, parallele Stützebenen von K , d. h. sie fielen zusammen.

Anmerkung. Der Beweis ist auch für $g = 1$ richtig. Die numerische Berechnung würde jedoch erschwert werden, da in jeder zweiten Phase (2) eine erneute Entscheidung erforderlich wäre, welche Punkte im Innern von K liegen (vergl. § 4).

§ 2. EIN GRADIENTEN- UND SCHWERPUNKTVERFAHREN DER NICHTLINEAREN OPTIMIERUNG

Die Aufgabe lautet:

zu maximieren ist die reelle Funktion

$$(4) \quad F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

über der n -dimensionalen, die Bedingungen V 1 erfüllenden Punktmenge K . Es wird weiter vorausgesetzt, dass die Bedingungen V 2 und V 3 erfüllt sind.

Es sei $\mathbf{x}_k \in K$. Wir definieren nun die konvexe Punktmenge H_k , die Hyperfläche F_k , den konvexen Körper K_k und die Schwerpunkte \mathbf{s}_k folgendermassen:

$$(D\ 8) \quad H_k = \{\mathbf{x}; F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}_k)\},$$

$$(D\ 9) \quad F_k = \{\mathbf{x}; F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_k)\},$$

$$(D\ 10) \quad K_k = H_k \cap K,$$

$$(D\ 11) \quad \mathbf{s}_k = \frac{\int \mathbf{x} \, dK_k}{\int dK_k}.$$

Ein innerer Punkt \mathbf{x}_0 aus K wird als bekannt vorausgesetzt, V 4. Weiter fordern wir, dass K_0 endlich ist (V 8), d. h. K_0 enthalte keinen Halbstrahl.

Das Verfahren besteht dann wieder aus den folgenden beiden Schritten:

- (5) 1. Ist \mathbf{x}_k ein innerer Punkt von K , so bestimmen wir in K_k den Schwerpunkt \mathbf{s}_k gemäss D 11.
- (6) 2. In dem Punkt \mathbf{s}_k bestimmen wir den Gradienten \mathbf{c}_k der Funktion $F(\mathbf{x})$ und bewegen uns in Richtung von \mathbf{c}_k zu einem Punkt \mathbf{x}_{k+1} gemäss der Formel

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k + g u^{(k)} \mathbf{c}_k,$$

wobei $u^{(k)}$ die Länge der Strecke von \mathbf{s}_k längs \mathbf{c}_k bis zum Rande von K und g eine reelle Zahl mit $0 < g < 1$ ist.

Es gilt offensichtlich $K_k \supset K_{k+1}$ (E 7) (das folgt sowohl aus D 1a, D 10 und D 11 wie auch aus der Bedingung $0 < g < 1$).

Mit dem Ausgangspunkt $\mathbf{x}_0 \in K$ beginnend, können wir nach diesem Verfahren wieder eine unendliche Punktfolge

$$(7) \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots$$

konstruieren, der die unendliche Kette konvexer Punktfolgen

$$(8) \quad K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_k \supset K_{k+1} \supset \dots$$

eindeutig zugeordnet ist.

Satz 2.. Die nach dem obigen Verfahren ((5), (6)) konstruierte Folge $\{K_v\}$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) konvergiert unter den gemachten Voraussetzungen V 1, V 2, V 3, V 4, V 5 und V 8 gegen eine Punktmenge K_G , für die gilt $K_G = L$.

Beweis. Die unendliche Folge $\{K_v\}$ genügt den Bedingungen des Blaschkeschen Auswahlssatzes (vergl. § 1). Es existiert also eine Teilfolge konvexer Körper $\{K'_v\}$, die gegen einen konvexen Körper K_G aus K konvergiert. Es gilt $K'_v \supset K_G$ für $v = 0, 1, 2, \dots$ (E 8). Enthält K_G innere Punkte von K , so besitzt K_G einen Schwerpunkt \mathbf{s}_G , der innerer Punkt von K ist, folglich gibt es ein k^* mit $K_G \supset K_{k^*}$, das widerspricht jedoch der Eigenschaft E 8.

Enthält K_G nur Randpunkte von K , so ist $K_G = L$, denn nach D 9 und D 10 ist K_G ein F_G zugeordnet, das dann von K zur Randpunkte enthält und deshalb eine Stützfläche von K ist. K_G ist wegen der an $F(\mathbf{x})$ gestellten Forderungen auch eindeutig bestimmt.

Bezüglich $g = 1$ vergleiche die Anmerkung im Paragraphen 1. Die Überlegungen dieses Paragraphen sind ohne weiteres auch auf lineare Zielfunktionen übertragbar.

Das hier angegebene Gradienten- und Schwerpunktverfahren bedeutet in gewissem Sinne eine Linearisierung der Zielfunktion. Wir führen eine weitere Veränderliche z ein

$$(9) \quad F(\mathbf{x}) = z.$$

Für jedes \mathbf{x}_k der Folge (7) nimmt z einen bestimmten Wert an; ordnen wir \mathbf{x}_v die Zahl z_v durch die Vorschrift $F(\mathbf{x}_v) = z_v$ zu ($v = 0, 1, \dots, k, k + 1, \dots$), so erhalten wir gemäss (7) und (8) eine aufsteigende Zahlenfolge

$$(10) \quad z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k < z_{k+1} < \dots$$

Die Aufgabe lautet dann, ein maximales z über K zu bestimmen. Im v . Schritt wird jeweils zu den K bestimmenden Restriktionen die weitere Restriktion $F(\mathbf{x}) \geq z_v$ hinzugenommen, deren rechte Seite sich offensichtlich von Schritt zu Schritt ändert.

§ 3. EIN REINES SCHWERPUNKTVERFAHREN

Das im 2. Paragraphen vorgeschlagene Verfahren für die Lösung der dort angegebenen Aufgabe (4) kann folgenderweise abgeändert werden:

Beginnend mit einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in K$, berechnet man den Schwerpunkt \mathbf{s}_0 von K_0 , wir setzen $\mathbf{x}_1 = \mathbf{s}_0$ und bestimmen in K_1 , das durch \mathbf{x}_1 festgelegt ist, den Schwerpunkt \mathbf{s}_1 , setzen wieder $\mathbf{x}_2 = \mathbf{s}_1$ etc. Wir erhalten so wieder eine unendliche Punktfolge $\{\mathbf{x}_v\}$ und eine unendliche Folge konvexer Körper $\{K_v\}$, $v = 0, 1, 2, \dots, k, k+1, \dots$. Da \mathbf{s}_k immer ein innerer Punkt von K_k ist, gilt wieder $K_k \supset K_{k+1}$ (E 9). Die unendliche Folge $\{K_v\}$, $v = 0, 1, 2, \dots$ konvergiert unter den gemachten Voraussetzungen V 1, V 2, V 3, V 4 und V 8 gegen die Lösungsmenge L der entsprechenden Aufgabe. Der Beweis verläuft wie der im Paragraphen 2.

Dieses Verfahren gestattet die Lösung der im Paragraphen 2 formulierten Aufgaben auch in den Fällen, in denen der Gradient von $F(\mathbf{x})$ nicht bekannt ist oder überhaupt nicht existiert.

§ 4. EINIGE VORSCHLÄGE DER ERSETZUNG DES SCHWERPUNKTES DURCH ANDERE INNERE PUNKTE

Der Restriktionsbereich K wird in der Praxis meistens durch eine Reihe von Ungleichungen beschrieben. Aus der gegebenen Aufgabe kann oft nicht ohne grössere Schwierigkeiten festgestellt werden, welche der gegebenen Ungleichungen wesentlich zur Bestimmung von K beitragen. Die konvexen Punktmenge T_k und K_k sind auch nur indirekt bekannt. Die Bestimmung ihrer Schwerpunkte ist also eine sehr schwierige Aufgabe. In diesem Paragraphen möchten wir einige Vorschläge machen, die Schwerpunktberechnung durch einige einfachere Rechnungen zu ersetzen, und zwar durch die Berechnung sog. Ersatzpunkte.

Für die Ableitungen der Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen waren insbesondere folgende Eigenschaften des Schwerpunktes ausschlaggebend:

1. die Grösse $F(\mathbf{s}_k)$ ist nicht kleiner als die Grösse $F(\mathbf{x}_k)$ – bzw. grösser als $F(\mathbf{s}_{k-1})$;
2. \mathbf{s}_k ist ein innerer Punkt von T_k bzw. K_k ;
3. \mathbf{s}_k liegt zentral in T_k bzw. K_k (die gesamte Gestalt von T_k bzw. K_k wird bei der Bestimmung von \mathbf{s}_k berücksichtigt).

Bei der Wahl von Ersatzpunkten bereitet offensichtlich die Erfüllung der dritten Eigenschaft grössere Schwierigkeiten. Für die Beurteilung der Güte eines Ersatzpunktes wäre eine schärfere Kennzeichnung der Eigenschaft, „zentrale Lage“ erforderlich.

Für einige praktische Rechnungen wurden vom Verfasser drei Verfahren angewendet, die mit **Form A**, **Form B** und **Form C** bezeichnet werden sollen. Die Ersatzpunkte werden wir wieder mit \mathbf{s}_k bezeichnen. Desweiteren werden wir, anstatt uns speziell auf die T_k bzw. K_k zu beziehen, unsere Verfahren in einer allgemeinen konvexen, beschränkten und abgeschlossenen n -dimensionalen Punktmenge K beschreiben.

In K wählen wir n senkrecht zueinander stehende Richtungen beliebig aus, die wir mit I_1, I_2, \dots, I_n bezeichnen (im Falle der Mengen K_k können es z. B. die Einheitsvektoren sein, im Falle der T_k Vektoren, die senkrecht zum Gradienten von $F(\mathbf{x})$ sind). \mathbf{x}_k sei ein innerer Punkt aus K , der uns als Ausgangspunkt dient.

Form A. Es werden $2n$ Randpunkte P_i und Q_i berechnet ($i = 1, 2, \dots, n$). Die Punkte P_i sind die Schnittpunkte der Halbstrahlen $\mathbf{x}_k + tI_i$ und die Punkte Q_i die Schnittpunkte von $\mathbf{x}_k - tI_i$ mit dem Rand von K ($t > 0$). Wir setzen nun

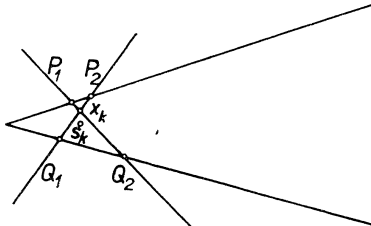


Abb. 1.

$$(11) \quad \mathbf{s}_k = \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i + \mathbf{Q}_i)}{2n}.$$

Die Lage des Punktes \mathbf{s}_k hängt von der Wahl der Vektoren I_1, I_2, \dots, I_n sowie von der Lage des Ausgangspunktes \mathbf{x}_k innerhalb von K ab. Es lassen sich leicht Beispiele angeben, wo der Punkt \mathbf{s}_k nur eine um wenig „bessere“ Lage

als der Punkt \mathbf{x}_k hat, und zwar gerade in den Fällen, wo \mathbf{x}_k in der Nähe des Randes von K liegt (vergl. Abb. 1).

Da es im Interesse eines möglichst einfachen Algorithmus der Aufgaben der Paragraphen 1, 2 und 3 liegt, mit einem während der gesamten Rechnung fest vorgegebenen System von Vektoren I_1, I_2, \dots, I_n zu arbeiten, darf g nicht zu gross gewählt werden. In den gerechneten Beispielen musste g in der Grössenordnung $0,05 < g < 0,3$ genommen werden. Rein anschaulich gesprochen, muss man der Punktfolge $\{\mathbf{x}_v\}$ Zeit lassen, „sich in eine zentrale Lage einzuspielen“. Beispiele zeigten, dass sich dieses „Einspielen“ viel besser in der Form B vollzog (d. h. g konnte grösser gewählt werden).

Die **Form B** besteht darin, dass jeweils nur der Mittelpunkt \mathbf{m}_i einer Strecke P_iQ_i berechnet wird (d. h. für ein bestimmtes i), woran sich eine Bewegung in Richtung des Gradienten von $F(\mathbf{x})$ anschliesst, dann wird wieder der Mittelpunkt einer Strecke P_iQ_i für ein anderes i bestimmt, etc. Es ist nur darauf zu achten, dass alle Richtungen I_i gleichmässig berücksichtigt werden.

Die Problematik der Wahl der Grösse g bleibt allerdings prinzipiell bestehen. Präzise Aussagen scheinen nur möglich zu sein, wenn wir die Gestalt von K kennen.

Form C. Zur Beschreibung benutzen wir dieselben Bezeichnungen wie oben.

Für $i = 1, 2, \dots, n$ führen wir nacheinander die folgenden Rechnungen durch

$$(12) \quad \mathbf{m}_i = \frac{\mathbf{P}_i + \mathbf{Q}_i}{2},$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{m}_i,$$

Dann setzen wir $\mathbf{s}_k^{(1)} := \mathbf{x}_k$ und beginnen wieder von vorn. Die Rechnung wird abgebrochen, wenn keine grösseren Änderungen mehr eintreten, d.h. wenn sich z. B. $\mathbf{s}_k^{(v)}$ nur wenig von $\mathbf{s}_k^{(v-1)}$ unterscheidet, wir setzen dann $\mathbf{s}_k := \mathbf{s}_k^{(v)}$ ($v > 1$, natürliche Zahl).

Allerdings ist bisher noch nicht allgemein nachgewiesen, ob in einer konvexen Punktmenge K der eben beschriebene Prozess zu einem festen Punkt \mathbf{r}_k aus K konvergiert. Die gerechneten Beispiele lieferten jedoch ausgezeichnete Ergebnisse. Bereits nach ein bis zwei Umläufen des Prozesses (12) änderte sich der Punkt $\mathbf{s}_k^{(v)}$ kaum noch. In den Gradientenverfahren konnte $g = 0,9$ bzw. sogar $g = 0,999$ entsprechend den Möglichkeiten der verwendeten Maschine gewählt werden, so dass die Form C sich als sehr effektiv erwies. Desgleichen konnte sie erfolgreich für die reine Schwerpunktmethod angewendet werden (etwas abgewandelt als **Form N**).

Diese Resultate legen es nahe, die durch (12) erzeugte Punktfolge näher zu untersuchen. Sie hängt offenbar nicht mehr wesentlich vom Ausgangspunkt ab. In einfachen Fällen (wenn K z. B. ein Kreis, ein Rechteck oder Dreieck ist) existiert der Punkt \mathbf{r}_k sicher. Seine Lage ist allerdings im allgemeinen nicht invariant gegenüber der Wahl der Vektoren I_1, I_2, \dots, I_n .

In einem unter dem gleichen Titel erscheinenden Artikel in der Zeitschrift „Ekonomico-matematický obzor“ [5] werden für die hier geschilderten Verfahren Algorithmen, ALGOL-Programme und Beispiele angegeben. Es sei aber darauf hingewiesen, dass diese Methoden nur Vorschläge sein können und ihre effektive Anwendung sowohl von theoretischer Seite weiterer Untersuchungen (insbesondere der Form C bzw. anderer Formen zur Berechnung von Ersatzpunkten) als von praktischer Seite einer geschickten Programmierung bedarf, um voll die Vorteile auszunutzen, dass der gesamte Lösungsprozess auf eine Reihe von Schnittpunktberechnungen zurückgeführt worden ist.

Literatur

- [1] G. Zoutendijk: Methods of feasible Directions. A study in linear and nonlinear programming. Elsevier Publishing Company, Amsterdam—London—New York—Princeton 1960.
- [2] H. P. Künzi, W. Krelle: Nichtlineare Programmierung. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.
- [3] P. Wolfe: Methods of Nonlinear Programming, in “Recent Advances in Mathematical Programming”, Proc. of the 1962 Symposium in Mathematical Programming, edited by R. L. Graves and P. Wolfe, McGraw-Hill, June 1963.
- [4] H. Hadwiger: Altes und Neues über konvexe Körper. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1955.
- [5] K. Lommatzsch: Ein Gradienten- und Schwerpunktverfahren der linearen und nichtlinearen Optimierung. Ekonomicko-matematický obzor, No. 1, 1966.

Der Artikel enthält Ergebnisse aus der gleichnamigen Kandidatenarbeit, die unter Anleitung von Professor Dr. FR. NOŽIČKA am Centrum numerické matematiky MFF UK 1964 entstand.

Výtah

GRADIENTNÍ METODA A METODA TĚŽIŠŤ PRO LINEÁRNÍ A NELINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

KLAUS LOMMATZSCH

Dosud známé metody řešení úloh hlavně nelineárního programování jsou po stránce numerické velmi těžkopádné a časově náročné. V článku je navržen pro řešení určité třídy úloh toho druhu nekonečný iterační postup. (Předpoklady: účelová funkce je taková, že $F(\mathbf{x}) = C$ značí systém kongruentních nadploch (V 2), bodová množina K přípustných řešení je konvexní (V 1) a soustava L řešení \mathbf{x} je konvexní bodová množina na kraji množiny K (V 3)). Posloupnost bodů \mathbf{x}_k získaných iterační metodou leží přitom celá uvnitř množiny K . Jsou prováděny střídavě dva pohyby:

1. v podmnožině T_k (D 5) resp. K_k (D 10) množiny K , které jsou určeny bodem \mathbf{x}_k , je vypočteno těžiště \mathbf{s}_k bodů z T_k resp. K_k (pohyb uvnitř K);

2. pohyb ve směru gradientu funkce $F(\mathbf{x})$ směrem od \mathbf{s}_k k „lepšímu“ vnitřnímu bodu \mathbf{x}_{k+1} v množině K (3), (6),

Pomocí Blaschkeho věty o výběru se dokazuje, že takto konstruovaná posloupnost pro lineární (§ 1) a pro určité nelineární účelové funkce (§ 2) konverguje k bodu, který je řešením úlohy. V § 3 je popsána ryzí metoda těžišť, která používá jenom prvního pohybu. Aby se odstranil obtížný výpočet těžiště, jsou v § 4 navrženy tři metody (A, B, C) pro určení jiných vnitřních bodů v T_k resp. K_k (tak zvaný náhradní bod, který má podobné vlastnosti jako těžiště — 1. až 3. v § 4). Tak byl celý postup v podstatě převeden na řadu výpočtů průsečíků. Důkaz konvergence pro varianty A, B a C nebyl dosud podán. První numerické výsledky a algoritmy jsou uvedeny v článku, který vychází téměř současně v časopise „Ekonomicko-matematický obzor“.

Резюме

МЕТОД ГРАДИЕНТА И ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

КЛАУС ЛОМАЧ (KLAUS LOMMATZSCH)

Известные до сих пор методы решения задач прежде всего нелинейного программирования с точки зрения численных вычислений слишком громоздки и длительны. В статье предложен для решения определенного класса задач этого типа бесконечный итерационный процесс. (Предположения: целевая функция является такой, что $F(\mathbf{x}) = C$ означает систему конгруэнтных гипер-

поверхностей (V 2), точечное множество K допустимых решений является выпуклым (V 1) и система L решений $\hat{\mathbf{x}}$ является выпуклым точечным множеством с края множества K (V 3)). При этом последовательность точек \mathbf{x}_k , полученных итерационным методом, находится целиком внутри множества K . В процессе чередуются два движения:

1. В подмножестве T_k (D 5) или же K_k (D 10) множества K , определенных точкой \mathbf{x}_k , найден центр тяжести \mathbf{s}_k точек из T_k или же K_k (движение внутри K);
2. движение в направлении градиента функции $F(\mathbf{x})$ от \mathbf{s}_k к „лучшей“ внутренней точке \mathbf{x}_{k+1} в множестве K (3), (6).

При помощи теоремы выбора Блашке доказано, что построенная таким образом последовательность сходится для линейных (§ 1) и для определенных нелинейных целевых функций (§ 2) к точке, которая является решением задачи. В § 3 описан чистый метод центра тяжести, который использует только первое движение. Чтобы устранить трудное вычисление центра тяжести предложены в § 4 три метода (А, В, С) для определения других внутренних точек в T_k или же K_k (так наз. запасная точка, обладающая аналогичными свойствами, как центр тяжести — 1.—3. в § 4). Таким образом, весь процесс, по существу, сводится к вычислению ряда точек пересечения. Доказательство сходимости для вариантов А, В и С пока не произведено. Первые численные результаты и алгоритмы приведены в статье, которая почти одновременно выходит из печати в журнале „*Ekonomicko-matematický obzor*“.

Anschrift des Autors: Klaus Lommatzsch, Borsigstr. 29, 104 Berlin, DDR.