Arend Heyting
Zprávy o postavení matematiky

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 3, 242–250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103022

ZPRÁVY

O POSTAVENÍ MATEMATIKY*)

Předkládáme čtenáři překlad první kapitoly Heytingovy knihy o intuicionismu**), důležitém směru v současné matematice, vzniklém začátkem tohoto století z prací Brouwerových a Weylových. Význam intuicionismu nelze vidět jenom v jeho snaze po zdůvodnění základů matematiky, nýbrž i v tom, že mnohými intuicionistickými názory (speciálně kritickým pohledem na princip vyloučeného třetího) byli ovlivněni i matematikové konstruktivního směru, usilovně rozvíjeného v posledních letech zvláště v SSSR.

První kapitola knihy se týká filosofie matematiky. Intuicionistická aritmetika, algebra i další speciální partie jsou vyloženy v dalších kapitolách. Celá Heytingova kniha je psána formou živého rozhovoru mezi zastánci různých názorů na základy matematiky. V minulém roce byla přeložena do ruštiny***). Redaktor překladu, významný představitel konstruktivního směru v matematice, A. A. MARKOV, přidal k diskutujícím ještě jednu osobu, Kona, který v debatě vysvětluje názory konstruktivistů. Poznámky A. A. Markova, přeložené z ruského vydání, jsou uvedeny pod čarou pod čísly 1)—4).

Heytingova kniha obsahuje bohatou bibliografii o intuicionismu, z níž byly do překladu I. kapitoly zahrnuty jen práce v ní citované.

INTUICIONISMUS
ÚVOD

A. HEYTING

Účastníci rozmluvy: KLAS, FORM, INT, LETTER, PRAGM, SIGN[1]).

KLAS. Buďte zdráv, pane Int! Cožpak vy jste se nevydal na výlet v takový krásný letní den?

INT. Napadlo mne několik myšlenek a promýšlel jsem je v knihovně.

---

*) Redakce uveřejňuje následující práci v rámci serie článků o postavení matematiky, aby si čtenáři mohli udělat obraz o problematice, která souvisí s pojmem přesnosti matematických úvah.

**) A. HEYTING, *Intuitionism, An Introduction*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956; přeloženo a uveřejněno s laskavým svolením autora a vydavatelství.

***) А. Гейтинг, *Интуиционизм, Введение*, под редакцией А. А. Маркова, Москва 1965.

[1]) „FORM", „INT", „PRAGM" a „SIGN" označují zastánce formalismu, intuicionismu, pragmatismu a significismu. „KLAS" je reprezentantem „klasické" matematiky. Redakci (ruského překladu, *pozn. redakce Apl. mat.*) působí nesnáze objasnění jména „LETTER". V dalších našich poznámkách vystupuje často ještě jeden účastník diskuse — „KON" — představitel konstruktivního směru v matematice.

KLAS. Inu, pilná včela! Jak se vám daří?

INT. Ujde to. Napijeme se něčeho?

KLAS. Děkuji. Sázím se, že jste se zabýval opět tím svým koníčkem, odmítáním zákona vyloučeného třetího a podobnými věcmi. Nikdy jsem nepochopil, proč by to s logikou mělo být v pořádku všude jinde, jen ne v matematice.

INT. Na toto téma jsme již mluvili. Myšlenka, že pro popis některých druhů objektů může být vhodnější ne obyčejná, ale nějaká jiná logika, se čas od času objevovala ještě před vznikem intuicionismu. Avšak teprve Brouwer první objevil objekt, který skutečně vyžaduje odlišnou formu logiky. Tímto objektem je myšlenková matematická konstrukce [L. E. J. BROUWER 1908]. Příčinou toho je, že v matematice se od samého začátku zabýváme nekonečnem, zatímco obyčejná logika je vytvořena pro uvažování o konečných souborech[2]).

KLAS. Já vím, avšak mně se zdá, že logika je univerzální a že se hodí stejně dobře k nekonečnu jako ke konečnu.

INT. Měl byste uvážit, co představoval Brouwerův program [L. E. J. BROUWER 1907]. Spočíval ve zkoumání myšlenkové matematické konstrukce jako takové, bez ohledu na otázky, týkající se povahy konstruovaných objektů, jako např. zda tyto objekty existují nezávisle na našich znalostech o nich. To, že toto hledisko vede bezprostředně k odmítnutí principu vyloučeného třetího, mohu nejlépe ukázat následujícím příkladem.

Srovnejme dvě níže uvedené definice přirozených čísel, řekněme čísla k a čísla l.

I. k je největší prvočíslo takové, že $k - 1$ je také prvočíslem; jestliže takové číslo neexistuje, pak $k = 1$.

II. l je největší prvočíslo takové, že $l - 2$ je také prvočíslem; jestliže takové číslo neexistuje, pak $l = 1$.

Klasická matematika vůbec nebere v úvahu zřejmý rozdíl v charakteru těchto dvou definic. k může být vypočteno ($k = 3$), zatímco pro výpočet l nemáme žádnou metodu, protože není známo, zda posloupnost tzv. provočíselných „dvojčat", tj. prvočísel tvaru p a $p + 2$, je konečná či nikoliv. Proto pro intuicionisty II není definicí přirozeného čísla; oni pokládají číslo za korektně definované jedině tehdy, jestliže je udán způsob jeho výpočtu. Rozvíjejíce tuto myšlenku, přicházíme k odmítnutí principu vyloučeného třetího, neboť kdyby posloupnost prvočíselných „dvojčat" byla buď konečná nebo nekonečná, definovalo by II přirozené číslo.

KLAS. Je možné však namítnout, že stav našich znalostí o existenci nebo neexistenci posledních „dvojčat" je čistě náhodný a zcela nedůležitý pro otázky matematické správnosti. Buď existuje nekonečně mnoho „dvojčat" a pak $l = 1$, nebo je jejich počet konečný a pak je l rovno největšímu prvočíslu takovému, že $l - 2$ je také prvočíslem. V každém myslitelném případě je l definováno; co záleží na tom, zda ho můžeme nebo nemůžeme skutečně vypočítat?

INT. Váš argument je ve své podstatě metafyzický. Jestliže slovo „existovat" neznamená „být sestrojen", pak musí mít nějaký metafyzický význam. Úlohou matematiky není zkoumat tento význam, nebo rozhodovat, zda je vhodný. Nemáme žádné námitky proti matematikovi, který osobně uznává jakoukoliv vyhovující mu metafyzickou teorii, ale Brouwerův program vyžaduje,

[2]) KON. Buďte zdrávi, milí kolegové. Vidím, že pan Int zde vykládá své „credo". Má stoprocentně pravdu v tom, že matematické konstrukce vyžadují zvláštní logiku. Nemohu ale souhlasit s tím, že matematika se od samého začátku zabývá „nekonečnem". „Nekonečno" zavádíme do matematiky pomocí abstrakcí. Používá se abstrakce potenciální uskutečnitelnosti a abstrakce aktuálního nekonečna. Té druhé já nerozumím. První záleží v abstrahování od praktických hranic našich konstruktivních možností, podmíněných omezeností prostoru, času a materiálu, který je nám k dispozici. Myšlenkové konstrukce, o kterých právě mluvil pan Int, jsou potenciálně uskutečnitelné. Jejich předobrazem jsou prakticky uskutečnitelné reálné konstrukce. Zkoumání potenciálně uskutečnitelných konstrukcí vyžaduje zvláštní logiku — konstruktivní matematickou logiku.

abychom studovali matematiku jako něco jednoduššího a bezprostřednějšího než je metafyzika. Při studiu myšlenkových matematických konstrukcí „existovat" musí být synonymem pro „být sestrojen".

KLAS. Tedy pokud nevíme, existují-li poslední prvočíselná „dvojčata", II není definicí přirozeného čísla, avšak jakmile bude tento problém rozřešen, II se náhle definicí stane. Předpokládejme, že 1. ledna 1970 bude dokázána nekonečnost množiny „dvojčat"; od tohoto okamžiku bude $l = 1$. Bylo $l = 1$ před tímto dnem nebo ne? [MENGER 1930].

INT. Matematický výrok tvrdí, že byla provedena jistá matematická konstrukce. Je zřejmé, že do okamžiku provedení konstrukce tato konstrukce ještě provedena nebyla. Jestliže aplikujeme tuto poznámku na váš příklad, vidíme, že před 1. lednem 1970 rovnost $l = 1$ ještě nebyla dokázána. Ale to není to, co vy myslíte. Zdá se mi, že pro vyjasnění smyslu vaší otázky se musíte opět vrátit k metafyzickým pojmům, tedy k jakémusi světu matematických věcí, existujících nezávisle na našem poznání, kde $l = 1$ platí v jakémsi absolutním smyslu. Opakuji ale, že matematika by neměla záviset na podobných pojmech. Ve skutečnosti jsou všichni matematikové a dokonce i intuicionisté přesvědčeni, že matematika se v jakémsi smyslu vztahuje k věčným pravdám, ale jakmile jen se pokusíme vyjasnit, v jakém přesně smyslu, rázem se ocitáme v bludišti metafyzických těžkostí. Jediný způsob, jak se jim vyhnout, je vyloučit je z matematiky. Přesně toto mám na mysli, když říkám, že studujeme matematické konstrukce jako takové, a že klasická logika se pro toto studium nehodí[3]).

KLAS. Přicházejí naši přátelé Form a Letter. Kolegové, máme tady velmi zajímavou diskusi o intuicionismu.

LETTER. Copak se dá mluvit o něčem jiném se starým dobrým Intem? Ten je tímto tématem úplně posedlý.

INT. Jakmile vás uchvátila krása předmětu, věnujte mu celý život!

FORM. Velmi správně. Já se jen divím, jaká krása může být v tak neurčité věci, kterou je intuicionismus. Žádný váš termín není korektně definován, nemáte ani přesná pravidla dedukce. Proto je vůbec nemožné někdy rozhodnout, které z vašich úsudků jsou správné a které ne [R. CARNAP 1934, str. 41; 1937, str. 46] [W. DUBISLAV 1932, str. 57, 75].

V běžné řeči žádné slovo nemá zcela pevný význam, vždy zůstává jistá libovůle, tím větší, čím abstraktnější je vyjádřený pojem. Proto si lidé ne zcela úplně rozumějí, a totéž nastává i v neformalizovaných matematických úvahách. Jediný způsob jak dosáhnout absolutní přesnosti spočívá v tom, že se z matematických výroků odstraní veškerý význam a že se budou zkoumat samy o sobě, jako posloupnosti znaků, bez ohledu na smysl, který mohou mít. Potom je možné zformulovat přesná pravidla pro odvozování nových výroků z výroků již známých a vyloučit neurčitost vyplývající z mnohoznačnosti jazyka.

INT. Mně se zdá, že rozdíl mezi zastánci formalismu a intuicionismu je hlavně záležitostí vkusu. Vy také používáte smysluplných úvah v teorii, kterou Hilbert nazývá metamatematikou, ale vaším cílem je oddělit je od čistě formální matematiky a omezit se na úvahy co možná nejjednodušší. My jsme, naproti tomu, zainteresováni nikoliv na formální stránce matematiky, ale

---

[3]) KON. Můj názor na formulaci definice II se poněkud liší od hlediska pana Inta. Zdá se mi, že naprosto ne pro každou definici musíme nutně mít objekt, spadající pod ni. Někdy může sestrojení takového objektu být problémem, a pokud tento problém nebude rozřešen, nebudeme oprávněni tvrdit, že takový objekt existuje. Právě takovýto problematický charakter má definice čísla l pomocí II. V současné době není udáno, tj. není sestrojeno číslo l, charakterizované definicí II. Bude dáno teprve rozřešením problému „dvojčat" a pouze potom budeme oprávněni říci, že číslo l existuje.

Ohledně „věčnosti" matematických pravd se domnívám, že je to otázka nejenom „metafyzická", ale vůbec marná. A existence v matematice, to je potenciální uskutečnitelnost konstrukce.

právě na tom typu úvah, který se používá v metamatematice; pokoušíme se prozkoumat je až do nejzazších důsledků. To, že dáváme přednost úvahám popsaného typu, vyplývá z našeho přesvědčení, že zde máme co dělat s jednou z nejzákladnějších schopností lidského rozumu.

FORM. Když se vy nebudete přít s formalismem, nebudu ani já mít nic proti intuicionismu. Zastánci formalismu patří k nejmírumilovnější části lidstva. Libovolná teorie může být formalizována a potom k ní mohou být použity naše metody. Toto se může stát a patrně se stane i s intuicionistickou matematikou [R. CARNAP 1934, str. 44; 1937, str. 51].

KLAS. To znamená, že intuicionistická matematika by měla být studována jako část matematiky. V matematice zkoumáme důsledky daných předpokladů; intuicionistické předpoklady mohou být zajímavé, ale nemají žádné monopolní právo.

INT. My si na ně ani nečiníme nárok; jsme spokojeni, když přiznáte oprávněnost naší koncepce. Musíme však vyvrátit tvrzení, že intuicionismus vychází z určitých více nebo méně libovolně vybraných předpokladů. Jeho předmět, konstruktivní matematické myšlení, jednoznačně určuje jeho premisy a staví jej vedle, nikoliv dovnitř klasické matematiky; ta studuje zcela jiný předmět. Z toho důvodu je nemožné také dorozumění mezi formalismem a intuicionismem pomocí formalizace intuicionistické matematiky. Je pravdou, že i v intuicionistické matematice je možné zakončenou část teorie formalizovat. Bude ale užitečné zamyslet se nad smyslem takové formalizace. Můžeme pohlížet na formální systém jako na lingvistické vyjádření matematického myšlení v jistém speciálním vyhovujícím jazyku.

Přijmeme-li toto hledisko, narazíme na překážku podstatné mnohoznačnosti jazyka. Protože význam slova nemůže být nikdy vymezen natolik přesně, aby byly vyloučeny všechny možnosti neporozumění, nemůžeme si být nikdy matematicky jisti, že formální systém správně vyjadřuje naše matematické myšlení.

Přijměme však jiné stanovisko. Můžeme považovat samotný formální systém za neobyčejně jednoduchou matematickou strukturu; její objekty (tj. znaky systému) jsou v relaci s jinými, často velmi složitými matematickými strukturami. Tímto způsobem může být formalizace provedena uvnitř samotné matematiky a stává se silným matematickým prostředkem. Samozřejmě, nemůžeme si být jisti, že formální systém plně reprezentuje nějakou oblast matematického myšlení; v libovolný okamžik nás může objevení nových myšlenkových postupů donutit k rozšíření formální soustavy.

FORM. My známe tuto situaci již několik let. Gödelova věta o neúplnosti nám ukázala, že libovolná bezesporná soustava, která formalizuje teorii přirozených čísel, může být bezesporně doplněna různými způsoby.

INT. Rozdíl je v tom, že intuicionismus se vyvíjí nezávisle na formalizaci, která může pouze následovat za matematickou konstrukcí.

KLAS. Nejvíce mne udivuje, že vy oba jakoby začínáte z ničeho. Zdá se mi, že stavíte vzdušné zámky. Odkud víte, že vaše úvahy jsou správné, když nemáte k disposici neomylná kritéria, daná logikou? Včera jsem debatoval se Signem, ten je ještě větším relativistou než kterýkoliv z vás. Vytáčí se tak obratně, že na něho neplatí žádný argument a nikdy nedojde k nějakému pevnému závěru. Bojím se, že to je osud každého, kdo se zříká logiky jako své opory, tj. obecného smyslu.

SIGN. Vy o vlku a vlk za humny. Doufám, že jste o mně neřekl nic špatného!

KLAS. Zmínil jsem se o naší včerejší diskusi. Dnes vedu bitvu s dalšími dvěma prokletými relativisty.

SIGN. S potěšením budu vaším spojencem, ale napřed snad vyslechněme, co říkají protivníci. Dovolte, abych vás seznámil se svým přítelem Pragmem. Diskuse ho bude velmi zajímat.

FORM. Buďte zdráv! Vy jste také filosofem vědy?

PRAGM. Nenávidím metafyziku.

INT. Vítejte, bratře!

FORM. Tedy nechtěl bych hájit svou posici právě nyní, kdy se naše diskuse soustředila hlavně k intuicionismu a kdy je tak lehké svést ji na nepravou cestu. Bojím se však, že se mýlíte, pokud jde o intuicionistickou logiku. Byla totiž vskutku formalizována a mnozí autoři publikovali v této oblasti cenné práce. Jak se zdá, intuicionisté hodnotí logiku výše, než si myslíte, i když se liší od té, na kterou jste zvyklí.

INT. Je mi líto, že vás zklamu. Logika není základem, na kterém stojím. Jak by jím také mohla být? Vyžadovala by zase zdůvodnění a to by obsahovalo spletitější a mnohem méně přímé principy než jsou principy samotné matematiky. Matematická konstrukce by měla být rozumově natolik bezprostřední a její výsledek natolik jasný, aby nepotřebovala vůbec žádné zdůvodňování. Aniž bychom používali logiky, je možné velmi dobře poznat, zda je úvaha správná; postačí jasné vědecké vědomí. A přesto je pravda, že intuicionistická logika byla rozvíjena. Abych ukázal její význam, dovolte mi předvést příklad. Nechť A označuje vlastnost přirozeného čísla být dělitelné 8, B — být dělitelné 4, C — být dělitelné 2. $8a$ můžeme zapsat jako $4 \times 2a$; díky této matematické konstrukci P vidíme, že vlastnost A implikuje vlastnost B, neboli $A \to B$. Podobná konstrukce Q ukazuje, že $B \to C$. Aplikujíce nejprve P a potom Q (superpozice P a Q), dostáváme $8a = 2 \times (2 \times 2a)$, čímž je dokázáno $A \to C$. Popsaný proces zůstane platným i tehdy, dosadíme-li za A, B, C libovolné vlastnosti; tedy, jestliže konstrukce P ukazuje, že $A \to B$ a konstrukce Q ukazuje, že $B \to C$, pak superpozice P a Q ukazuje, že $A \to C$. Dostali jsme tak větu logiky. Proces, pomocí kterého jsme ji odvodili, nám ukazuje, že se logická věta v podstatě neliší od matematických vět; je jenom obecnější, např. v témže smyslu jako výrok „sčítání celých čísel je komutativní" je obecnější než „$2 + 3 = 3 + 2$". Tak je tomu s každou větou logiky: není ničím jiným než matematickým teorémem nejvyšší možné obecnosti; jinými slovy, logika je částí matematiky a nemůže nikterak sloužit jako prostředek pro její zdůvodnění. Při nejmenším, taková je koncepce logiky, ke které jsem veden přirozeným způsobem; je možné a potřebné rozvíjet jiné formy logiky pro jiné účely.

Právě ta matematická logika, kterou jsem popsal, byla zformalizována. Bylo zjištěno, že vzniklá formální soustava má svérázné vlastnosti, velmi zajímavé vzhledem k vlastnostem jiných soustav formální logiky. Tato skutečnost dala vzniknout zkoumáním, o kterých se zmiňoval pan Form; avšak jakkoli jsou tato zkoumání zajímavá, jejich souvislost s intuicionistickou matematikou je velmi slabá.

LETTER. Myslím, že to všechno jsou vymyšlené a falešné těžkosti. Matematika je zcela jednoduchá věc. Definuji jakési znaky a určuji pravidla, jak je kombinovat, toť vše.

FORM. Chcete-li však dokazovat bezespornost vaší formální soustavy, potřebujete k tomu nějaký způsob uvažování.

LETTER. A proč bych měl dokazovat bezespornost? Nezapomeňte, že naše formální soustavy jsou konstruovány pro aplikace a že se obecně ukazují užitečnými, tuto skutečnost by bylo těžké objasnit, kdyby v nich byla dokazatelná každá formule. Máme tudíž praktické ujištění o jejich bezespornosti a to stačí pro naši práci. Protestuji proti intuicionistickému názoru, že matematika nějak souvisí s nekonečnem. Mohu napsat znak, řekněme α, a prohlásit jej za kardinální číslo množiny přirozených čísel. Poté mohu udat pravidla, jak s ním zacházet v souhlase s těmi pravidly, kterých pro tento pojem používá pan Klas, ale když to dělám, operuji výhradně v konečné oblasti. Jakmile se objevuje pojem nekonečna, myšlení se stává nejasným a zmateným. Proto považuji všechna intuicionistická tvrzení o nekonečnu za v nejvyšším stupni nejasná a je vůbec problém, zda takový symbol jako $10^{10^{10}}$ lze chápat nějak jinak než jako kombinaci číslic na papíře, s níž zacházíme podle určitých pravidel [I. DIEUDONNÉ 1949].

INT. Váš extrémní finitismus poskytuje samozřejmě maximální ochranu proti nedorozumění, ale nám se zdá, že má za následek takové popření rozumu, že je lze těžko přijmout. Už děti ve škole chápou, co to jsou přirozená čísla a uznávají skutečnost, že posloupnost přirozených čísel může být prodlužována do nekonečna.

LETTER. Dětem je pouze vsugerováno, že to chápou.

INT. To není námitka; libovolná komunikace jazykovými prostředky může být interpretována jako sugesce. I Euklides věděl o čem mluví, když v 20. větě IX. knihy dokazoval, že množina všech prvočísel je nekonečná. Tento elementární pojem přirozených čísel, blízký každé myslící bytosti je základem intuicionistické matematiky. Netvrdíme o něm, že je definován a přesný v absolutním smyslu, to by bylo nepředstavitelné. Říkáme jenom, že je dostatečně jasný, aby na něm bylo možné vybudovat matematiku.

LETTER. Moje námitka spočívá v tom, že vy nepředpokládáte příliš málo, jak si myslí pan Klas, ale příliš mnoho. Vycházíte ze známých principů, které pokládáte bez jakéhokoliv vysvětlování za intuitivně jasné, současně však odmítáte jiné myšlenkové postupy, aniž byste tuto diskriminaci nějak zdůvodnili. Na příklad většině lidí se zásada vyloučeného třetího zdá alespoň tak zřejmou jako princip úplné indukce. Proč odmítáte první a souhlasíte s druhým? Takováto ničím nemotivovaná volba základních principů dává vaší soustavě silně dogmatický charakter.

INT. Intuicionistická tvrzení se jistě musí zdát dogmatickými těm, kdo je chápou jako tvrzení o faktech, mají však jiný smysl. Jak jsem již vysvětloval panu Klasovi, intuicionistická matematika spočívá v myšlenkových konstrukcích; matematický teorém vyjadřuje čistě experimentální skutečnost, totiž úspěšnost jisté konstrukce. „$2 + 2 = 3 + 1$" musí být chápáno jako zkratka výroku „Uskutečnil jsem konstrukce naznačené výrazy „$2 + 2$" a „$3 + 1$" a zjistil jsem, že obě vedou k témuž výsledku". Nyní mi řekněte, kde je zde nějaký dogmatický prvek; není ani v samotné myšlenkové konstrukci, to je vidět z toho, že její pravou podstatou je činnost, tím spíše ani ve výrocích, vyslovených o konstrukcích, protože ty vyjadřují čistě empirické výsledky.

LETTER. Vy však tvrdíte, že tyto myšlenkové konstrukce vedou k jistému druhu pravdy, že nejsou jen hračkou, nýbrž že musí lidstvu přinášet určitý užitek, jinak byste jednali špatně, obtěžujíce jimi ostatní. Právě v tomto vašem nároku vidím dogmatický element. Matematická intuice vás inspiruje objektivními a věčnými pravdami; v tomto smyslu je vaše stanovisko nejenom dogmatické ale i teologické [H. B. CURRY 1951, str. 6].

INT. Předně, moje matematické myšlení náleží mému individuálnímu intelektuálnímu životu a je omezeno mým osobním intelektem, stejně jako každý jiný druh mého myšlení. Obecně jsme přesvědčeni, že myšlení ostatních lidí je podobné našemu vlastnímu a že nám mohou rozumět, vyjadřujeme-li svoje myšlenky slovy. Víme však také, že si nikdy nejsme zcela jisti v tom, zda nám bylo rozuměno bez chyb. V tomto ohledu se matematika nijak podstatně neliší od ostatních předmětů; jestliže proto pokládáte matematiku za dogmatickou, měl byste prohlásit za dogmatickou libovolnou myšlenkovou činnost člověka. Matematické myšlení nevyjadřuje pravdy o vnějším světě, nýbrž je vždy svázáno s myšlenkovými konstrukcemi, to je pro ně charakteristické. Musíme rozlišovat mezi prostou matematickou praxí a jejím zhodnocením. Pro vytváření matematických teorií nejsou nutné žádné filosofické předpoklady, avšak cennost, kterou přičítáme takovéto činnosti, závisí na našich filosofických ideích.

SIGN. Máte zastaralé názory na jazyk. Takový kolísavý, nestálý charakter, který jste popsal, mají primitivní jazyky, a jazyk všedního života je ještě v zásadě podobného typu, avšak jakmile začíná myšlení dostávat vědecký charakter, dochází k formalizaci jazyka. V posledních desetiletích byl tento proces studován zastánci significismu. Proces ještě neskončil, protože jsou stále vytvářeny přesnější formalizované jazyky.

INT. Jestliže věda skutečně směřuje k formalizaci jazyka, pak intuicionistická matematika nepatří k vědě v tomto smyslu slova. Spíše je životním projevem, přirozenou činností člověka, která může být sama studována vědeckými metodami. Intuicionistická matematika opravdu takovými metodami studována byla a sice metodou formalizace intuicionistických myšlenkových postupů a metodami significismu. Je však zřejmé, že ani toto studium, ani jeho výsledky nelze zahrnovat do intuicionistické matematiky. Vědecké zkoumání intuicionistické matematiky nikdy neposkytne její úplný a zakončený popis, stejně jako je nedosažitelná úplná teorie jiných jevů. Metaintuicionistické úvahy nemohou být zahrnuty do samotné intuicionistické matematiky, ať jsou jakkoli zajímavé a užitečné. Tyto poznámky se pochopitelně netýkají formalizace uvnitř matematiky, jak jsem o ní mluvil dříve.

PRAGM. Dovolte mi zdůraznit to, co právě vyslovil pan Sign. Věda postupuje vpřed pomocí formalizace jazyka. Používá této metody, protože je efektivní. Tak se ukázalo, že moderní, beze zbytku formalizované jazyky jsou velmi užitečné. Ideálem pro současného vědce je vypracování zásoby formálních soustav, připravených pro použití, z nichž si může pro libovolnou teorii vybrat soustavu, správně vystihující výsledky experimentálních pokusů. Formální soustavy by měly být posuzovány pomocí tohoto kritéria užitečnosti a nikoliv pomocí nevyhraněné a libovolně zvolené interpretace, které je dávána přednost z dogmatických a metafyzických důvodů.

INT. Mně se také zdá zcela odůvodněným posuzovat matematický systém podle jeho užitečnosti. Připouštím, že z tohoto hlediska měl intuicionismus až doposud málo nadějí na úspěch, protože by bylo předčasné zdůrazňovat oněch několik slabých náznaků toho, že by mohl přinést jakýsi užitek ve fyzice [I. L. DESTOUCHES 1951]; mně se zdá, že má větší naději být užitečný ve filosofii, historii a společenských vědách. Opravdu, z intuicionistického hlediska je matematika studiem jistých funkcí lidského intelektu a jako taková je těmto vědám příbuzná. Je však užitečnost jediným měřítkem hodnoty? Lehko mohu vyjmenovat obory lidské činnosti, které ač nikterak vědě neslouží, jistě nejsou bezcenné. Je to např. umění, sport, zábava. Prohlašujeme, že význam intuicionismu je takový, že jej lze těžko popsat předem, že jej však jasně pocítíte, když se jím bezprostředně zabýváte. Vy víte, jak je pro filosofy obtížný problém určení hodnoty v umění, avšak kterýkoliv vzdělaný člověk tuto hodnotu pociťuje. Podobně je tomu i s významem intuicionistické matematiky.

FORM. Pro většinu matematiků je tento význam osudně ovlivněn tím, že vy ničíte nejcennější matematické výsledky; skutečně hodnotná metoda zdůvodnění matematiky by jich měla naopak co nejvíce zachránit [D. HILBERT 1922]. Toho může být dosaženo dokonce konstruktivními metodami, neboť jsou myslitelné definice konstruktivnosti, lišící se od definice hlásané intuicionisty. Vždyť ani ti nečetní dnes existující intuicionisté se nemohou zcela mezi sebou dohodnout o vymezení pojmu konstruktivního. Nejmarkantnějším takovým případem je Grissovo odmítání pojmu negace, který ostatní intuicionisté pokládají za zcela jasný [H. FREUDENTHAL 1936 A] [G. F. C. GRISS 1946, str. 24; 1946 A]. Na druhé straně se zdá pravděpodobným, že poněkud liberálnější chápání pojmu konstruktivního by mohlo zachránit životně důležité partie klasické matematiky.

INT. Nevelké rozdíly názorů mezi intuicionisty je možné očekávat, mluví totiž neformalizovaným jazykem. Ačkoli se projevily dříve a v ostřejších formách, než jsme mohli předvídat, není v nich nic znepokojujícího, protože se týkají jen druhořadých otázek a nikoliv základních idejí, o nichž panuje naprostá shoda názorů. Z tohoto důvodu je téměř nepravděpodobné, že by širší chápání pojmu konstruktivního mohlo získat podporu intuicionistů. Pokud jde o oklešťování matematiky, z něhož mne obviňujete, je nutno je chápat jako nevyhnutelný důsledek našich výchozích pozic. Je možné na ně pohlížet jako na odstraňování škodlivých ozdob, krásných formou ale prázdných obsahem, které je při nejmenším alespoň částečně kompensováno půvabem jemných odstínů a vtipných metod, jimiž intuicionisté obohatili matematické myšlení[4]).

---

[4]) KON. Zdá se mi, že pan Int poněkud podceňuje svůj intuicionismus. Především, cožpak je možné takto oddělovat „humanitní" vědy od „přírodních"? Což člověk se svými „myšlenkovými konstrukcemi" není částí přírody? Vždyť takové myšlenkové konstrukce, jako např. sestrojování stále větších a větších přirozených čísel, jsou obvykle kopiemi reálných konstrukcí, uskutečňovaných v obklopující nás skutečnosti. Reálnými vzory takových konstrukcí jsou konstrukce stále větších a větších domů, složitějších a složitějších strojů atd. Na druhé straně, myšlenkové konstrukce fungují často jako projekty reálných konstrukcí. Nejsložitější algoritmy se realizují nejprve ve tvaru myšlenkových konstrukcí a poté jsou, v našem kybernetickém století, uskutečněny prací elektronkových strojů, podobných v mnohém lidském mozku. Odtud vyplývá, že zkoumání myšlenkových konstrukcí není zdaleka jenom záležitostí humanitních věd.

Chci ještě říci, že se nepočítám k té „většině matematiků", o níž mluvil pan Form, pro kterou je význam intuicionistické matematiky „osudně" (jak hrozné!) ovlivněn tím, že intuicionismus ničí „nejcennější" matematické výsledky, které je třeba „zachraňovat". Co a proč zachraňovat?

FORM. Naše diskuse dostala charakter debaty o hodnotách. Z vašich slov docházím k závěru, že jste ochoten přiznat význam ostatních koncepcí matematiky, že se však nechcete vzdát významu vaší koncepce. Je tomu tak?

INT. Opravdu, jediným pozitivním výrokem ve zdůvodnění matematiky, proti kterému se stavím, je tvrzení, že klasická matematika má jasný smysl; musím se přiznat, že mu nerozumím. Avšak i ti, kdo říkají, že toto tvrzení chápou, by se mohli pokusit pochopit i naše stanovisko a ocenit naši práci.

LETTER. Paradoxy nám ukazují, že klasická matematika není zcela jasná.

FORM. Ovšem, je tomu tak, ale intuicionistická kritika zachází mnohem dále, než je zapotřebí k vyloučení paradoxů; pan Int je ani nepoužil jako argumentu pro svou koncepci; pro něho je bezespornost bezpochyby pouze vítaným vedlejším produktem intuicionismu.

SIGN. Pane Inte, vy popisujete vaši činnost jako myšlenkové konstrukce, avšak duševní pochody jsou zjistitelné jen podle akcí, ke kterým vedou, ve vašem případě prostřednictvím slov, která vyslovujete a formulí, které píšete. Neznamená to, že jediným způsobem studia intuicionismu je studium formálního systému jím konstruovaného?

INT. Když se dívám na tamhleten strom, jsem přesvědčen, že vidím strom a potřeboval bych nemalý trening, abych zaměnil toto přesvědčení vědomím, že ve skutečnosti vnikají do mého oka světelné vlny, které způsobí, že se vytvoří obraz stromu. Úplně stejně, když mluvím s vámi, jsem přesvědčen, že vám vysvětluji své názory; vy mne však poučujete, že ve skutečnosti produkuji vlnění vzduchu, které způsobí, že vy cosi vykonáte, např. vyprodukujete jiné vlnění vzduchu. V obou případech je přirozené první hledisko, zatímco druhé je teoretickou konstrukcí. Příliš často se zapomíná na to, že oprávněnost podobných konstrukcí závisí na současném stavu vědy a že slova „ve skutečnosti" je třeba přeložit jako „v souhlase se současnými názory vědců". Proto dávám raději přednost názoru, že popisuje intuicionistickou matematiku, sděluji jisté myšlenky svým posluchačům; tato slova by měla být chápána nikoli ve smyslu nějakého filosofického systému, nýbrž ve smyslu každodenního života.

SIGN. Pak ovšem intuicionismus, jako forma interakce mezi lidmi je sociálním jevem a jeho studium patří k historii civilizace.

INT. Studium ano, praxe ne. Tady souhlasím s panem Pragmem: primum vivere, deinde philosophati, a když chceme, můžeme přenechat to druhé jiným. Ať se ti, kdo přijdou po mně, diví, proč jsem budoval tyto myšlenkové konstrukce a jak mohou být interpretovány v nějaké filosofii. Vytvářeje je, spokojím se vědomím, že přispějí osvícení lidského rozumu.

PRAGM. To je obvyklý nedostatek filosofů — mluvit o věcech, které pořádně neznají a my jsme se málem dopustili stejné chyby. Nemůže nám pan Int předvést nějaké příklady intuicionistického myšlení, abychom mohli lépe ocenit jeho předmět?

INT. Samozřejmě, jsem dokonce přesvědčen, že několik lekcí vám umožní pochopit intuicionismus lépe než zdlouhavé diskuse. Prosím pány, kteří se zajímají o můj výklad, aby mne následovali do mé studovny.

Jak je vidět, určitým „drahocenným" výsledkům hrozí nebezpečí. Pohleďme, nakonec se ukáže, že nemají žádný obsah a že všechny pokusy rozumně je vysvětlit jsou odsouzeny k neúspěchu! Co je v nich ale potom drahocenného a „životně důležitého"? A už vůbec podivnou se mi zdá myšlenka pana Forma o „poněkud liberálnějším chápání pojmu konstruktivního", speciálně vymyšleném pro jejich záchranu. Nuže, nechť si pan Form vymýšlí takové chápání, vždyť od toho je to Form.

Literatura

(citovaná v I. kapitole)

BROUWER, L. E. J.

1907. Over de grondslagen der wiskunde. Thesis. Amsterdam 1907.

1908. De onbetrouwbaarheid der logische principes. Tijdschrift voor wijsbegeerte 2. (Přetištěno ([L. E. J. Brouwer 1919].)

1919. Wiskunde, waarheid, werkelijkheid. Groningen 1919.

CARNAP, R.

1934. Logische Syntax der Sprache. Wien 1934.

1937. The logical syntax of language. London 1937.

CURRY, H. B.

1951. Outlines of a formalist philosophy of mathematics. Amsterdam 1951.

DESTOUCHES, I. — L.

1951. Sur la mécanique classique et l'intuitionnisme. Proc. Akad. Amsterdam Ser. A 54, 74—79 Indagationes math. 13, 74—79.

DIEUDONNÉ, I.

1949. L'axiomatique dans les mathématiques modernes. Congrès intern. de philosophie des sciences, Paris 1949. (Actualités scientifiques et industrielles 1137, Paris 1951.)

DUBISLAV, W.

1932. Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart. Berlin 1932.

FREUDENTHAL, H.

1936 A. Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. Compositio math. 4, 112—116.

GRISS, G. F. C.

1946. Idealistische Filosofie. Een humanistische levens — en wereldbeschouwing. Arnhem 1946.

1946 A. Negationless intuitionistic mathematics I. Proc. Akad. Amsterdam 49, 1127—1133 = = Indagationes math. 8, 675 — 681.

HILBERT, D.

1922. Neubegründung der Mathematik. Abhandl. mat. Seminar Hamburg. Univers. 1, 157—177.

MENGER, K.

1930. Der Intuitionismus. Blätter deutsch. Philosophie 4, 311—325.

Přeložil Ivan Havel