Viera Chmurná

Решение систем линейных уравнений с n-диагональными матрицами

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 222–225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102953`

SVAZEK 10 (1965) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n-ДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

ВЕРА ХМУРНА (VIERA CHMURNÁ)

(к теме d)

Системы линейных уравнений, решение которых необходимо для практики, очень часто имеют диагональные матрицы. Решение этих систем по подпрограммам для решения общих систем нецелесообразно по следующим причинам:

1) нужна большая емкость памяти,
2) нужно перфорировать тоже нулевые элементы,
3) излишне продолжается время вычисления.

По этим причинам мы приспособили методы для решения систем линейных уравнений так, чтобы не надо было помнить нулевые элементы и производить вычисление с этими элементами.

Исследованию были подвергнуты следующие методы:

1) Халецкого [1],
2) факторизации [3],
3) окаймления [2],
4) стрельбы [2],
5) квадратных корней [1], [2].

Во-первых, мы вкратце объясним принцип метода факторизации и стрельбы, потому что они принадлежат к мало известным методам.

Предположим, что у нас система линейных уравнений в матричном виде

$$Ax = b .$$

Метод факторизации

Матрицу A приведем к верхней треугольной матрице с единичной диагональю следующим способом: исключим x_1 из первого уравнения и подставым во все остальные уравнения. Исключим x_2 из второго уравнения и опять подставым во все остальные уравнения. Продолжение процесса аналогично. Из верхней треугольной матрицы обратным ходом вычисляется решение системы. Этот обратный ход аналогичен обратному ходу элиминации Гаусса.

Отбросим последнее уравнение и найдем два решения $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ оставшейся системы $n-1$ уравнений, положив $x_1^{(0)} = 0$, $x_1^{(1)} = 1$. Для этого придется дважды решать систему с треугольной матрицей [2].

Решение x вычисляется по следующей формуле:

$$x = x^{(0)} + t\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right);$$

t найдем так, чтобы удовлетворялось и отброшенное раннее последнее уравнение.

$$t = \frac{r_n^{(0)}}{r_n^{(0)} - r_n^{(1)}},$$

где $r_n^{(0)}$ и $r_n^{(1)}$ – невязки последнего уравнения при постановке решений $x_1^{(0)}$ и $x_1^{(1)}$.

Для систем с трехдиагональными матрицами был выведен алгорифм для следующих методов: Халецкого, окаймления и квадратных корней. Из всех исследованных методов были подготовлены подпрограммы для машины ZRA-1. Выведенные отношения для решения систем с трехдиагональной матрицей не содержат вычисление с нулевыми элементами, и они очень просты.

Таблица 1.

метод:	емкость памяти	макс. n	под-про-граммы	число операций	время измеренное в течение вычисления			$x'_i - x_i$ *)
					$n = 60$	$n = 300$	$n = 500$	
Халецкого	$56 + 4n - 2$	1015	—	$21n + 4$	10″	55″	1′30″	$44 \cdot 10^{-8}$
факторизации	$43 + 4n - 2$	1012	—	$16n - 8$	8″	40″	1′15″	$44 \cdot 10^{-8}$
стрельбы	$74 + 4n - 2$	1003	—	$26n - 22$	14″	1′15″	2′3″	$86 \cdot 10^{-8}$
окаймления	$62 + 4n - 2$	1007	—	$6n^2 + 36n + 20$	3′40″	1h11′25″	—	—
квадратных корней	$97 + 4n - 2$	789	$\sqrt[2]{}$	$86n + 44$	48″	3′50″	—	—
Гаусс-Банахиевич	$128 + n^2 + n$	61	—	n^3	2h10′20″	—	—	—

*) x'_i — аналитическое решение
x_i — решение системы

Таблица 1 содержит основные характеристики подпрограмм. В таблице приведены также характеристики подпрограммы, построенной при помощи метода Гаусса-Банахиевича для систем с полными матрицами, с целью показать нагляднее преимущества программ, поставленых для решения систем с трехдиагональной матрицей.

Очевидно, что по объеме систем и скорости вычисления оптимальными являются:

1) метод Халецкого,

2) метод факторизации.

В течение вычисления практических задач методом стрельбы выяснилось следующее: если элементы главной диагонали по модулю значительно превышают остальные, значения $x_1^{(0)}$ быстро возрастают, и настает переполнение. Некоторые задачи дают результаты и в этом случае, но с очень малой точностью.

Таблица показывает, что метод окаймления непригоден для вычисления всех корней, потому что вычисление продолжается очень долго. Алгорифм этого метода в трехдиагональной форме можно оформить так, что можно вычислить только один любой корень решения. При этом предполагается, что элементы матрицы и свободные члены можно в течение вычисления вычислить, или что они подлежат определенным законам регулярности. В этом случае вместо емкости памятей выступает скорость машины. Конкретное вычисление произведено на примере 1000×1000. Для вычисления любого корня промежутки времени изменялись от $4'$ до $4'30''$.

Решения систем 300×300 и 500×500 были взаимно сравнены. В первом случае решения, полученные методами Халецкого, факторизации и окаймления были согласны с 8 вплоть до 9 значащих цифр. Во втором случае число согласных цифр уменьшилось с 6 вплоть до 8 цифр. Методом квадратных корней получилась согласованность только с 6 вплоть до 8 цифр в случае матрицы 300×300.

Этот метод обладает следующими недостатками:

1) матрица A должна быть симметрической,

2) требуется подпрограмм для извлечения квадратного корня, что уменьщает объем вычисления у увеличивает время вычисления.

Решенные системы возникли в результате диференциального уравнения $y'' = 1$ со следующими начальными условиями: $y(0) = y(1) = 0$. Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением этого диференциального уравнения. В последнем столбце таблицы 1 приведена максимальная разность аналитического и вычисленного решения для системы 500×500.

В случае систем с пятидиагональной матрицей был алгорифм введен для следующих методов:

1) Халецкого,

2) факторизации.

Выведенные отношения для решения тоже просты. И здесь сравнивались решения, и они были согласны в 8 цифрах. В таблице 2 мы видим основные характеристики подпрограмм. По этой таблице видно, что лучьим методом является метод факторизации. Но этот метод имеет следующий недостаток: выводить отношения для решения сисмы с n — диагональной матрицей очень трудно, потому что метод все время усложняется. Выводить эти отношения для метода Халецкого по сровнению с методом факторизации очень просто.

Таблица 2.

метод:	емкость памяти	макс. n	подпрограммы	число операций	время измеренное в течение вычисления			$x'_i - x_i$*)
					$n = 60$	$n = 300$	$n = 500$	
Халецкого	$139 + 5n - 6$	602	—	$48n - 19$	25″	2′20″	4′15″	$18912 \,.\, 10^{-5}$
Факторизации	$132 + 5n - 6$	660	—	$42n - 15$	23″	2′4″	3′30″	$19453 \,.\, 10^{-5}$

*) x'_i — аналитическое решение.
x_i — решение системы.

Литература

[1] *Демидович Б. П.* и *И. А. Марон:* Основы вычислительной математики, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1963.

[2] *Фаддеев Д. К.* и *В. Н. Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебры, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва-Ленинград 1963.

[3] *Varga S. Richard:* Matrix Iterative Analysis, Prentice — Hall Inc. Englewood Clifs, New Jeresey 1962.

Viera Chmurná, Ústav mechaniky a automatizácie SAV, Dúbravská cesta, Bratislava-Patrónka, ČSSR.