Ivo Marek

Řetězová reakce s rychlými neutrony v obohaceném uranu. II. Numerická analysa

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 4, 294–305

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102905`

ŘETĚZOVÁ REAKCE S RYCHLÝMI NEUTRONY V OBOHACENÉM URANU

II. NUMERICKÁ ANALYSA

IVO MAREK

(Došlo dne 22. srpna 1963.)

Otázky možnosti udržení řetězové reakce v daném prostředí teoreticky vyšetřované v práci [8] jsou v této práci vyšetřovány z hlediska realizace příslušných výpočtů na samočinných počítačích.

1. ÚVOD

Tento příspěvek je pokračováním práce [8]. Zatímco v [8] jsme se omezili pouze na problémy existence a jednoznačnosti řešení problému udržení řetězové reakce, pojednáme v této práci o řešeném problému z hlediska numerické analysy a z hlediska realizace výpočtů na samočinném počítači. S tím souvisí několik otázek.

1. Převedení úlohy kontinuální na úlohu diskrétní. V daném případě běží o převedení integrální rovnice se spojitým jádrem na systém lineárních algebraických rovnic.
2. Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic závislých na parametru.
3. Důkaz konvergence řešení diskrétní úlohy k řešení úlohy kontinuální.
4. Zhodnocení obdržených numerických výsledků.

Úlohy uvedené v bodech 1 a 3 byly zkoumány v práci [7]. Budeme se proto zabývati hlavně úlohami uvedenými v bodech 2 a 4.

Řešení problému udržení řetězové reakce v daném prostředí se podobně jako v případě kontinuálním i v diskrétním analogu redukuje na úlohu stanoviti hodnoty některých parametrů, na nichž závisí zmíněné algebraické rovnice, tak, aby dominantní vlastní číslo odpovídající matice bylo rovno 1.

Dominantní vlastní číslo matice, jejímiž prvky jsou kladná čísla, lze výhodně sestrojovati některou iterační metodou. Jedním z hlavních důvodů, proč jsme se rozhodli pro užití iterací je ta okolnost, že podle fyzikálních úvah očekáváme, že příslušné dominantní vlastní hodnotě vlastní vektory se nebudou od sebe příliš lišit pro hodnoty parametru z daného intervalu. Lze tak prováděti iterace s jednou eventuálně nekritickou hodnotou parametru až obdržíme „takřka" vlastní vektor. Potom teprve hledáme kritickou hodnotu parametru. Zkušenosti s výpočty nás opravňují k následujícímu závěru. Kdybychom používali k hledání dominantního vlastního čísla jiné metody, řekněme upravené Gaussovy eliminační metody, museli bychom prováděti právě tolik eliminací jako prováděných změn hodnot parametru. Další nevýhodou je, že příslušné vlastní vektory, jež takto obdržíme, pro nás nemají žádný význam, neboť obecně nepřísluší kritické hodnotě parametru. Protože však vyšetřované matice závisí na zkoumaných parametrech slabě, jest úloha hledání kritického parametru choulostivější a tedy též zdlouhavější než ostatní úlohy, jež dohromady dávají řešení problému udržení řetězové reakce. Kromě toho máme vůči metodě eliminační výhradu týkající se stability řešení při změnách hodnot parametru.

Z iteračních metod pro výpočet dominantního vlastního čísla matice jsme zvolili tak zvanou metodu iterace zdroje, která na matematickém modelu realizuje fyzikální děje, jež popisují vyšetřované rovnice. Metoda iterace zdroje je v podstatě Kelloggovým iteračním procesem a konvergence tohoto procesu byla za velmi obecných podmínek dokázána v práci [5]. Formule, podle nichž se získávají přiblížení vlastních čísel a vlastních vektorů, obsahují tři obecně různé posloupnosti funkcionálů. K realizaci výpočtu jest tedy možné klást si další požadavky na optimální výběr těchto posloupností. Teoreticky lze udati optimální trojici posloupností, jak je ukázáno v [6]. Pro výpočet na samočinných počítačích, jež jsou k disposici v ČSSR, však vede užití optimálních funkcionálů k nutnosti používati vnějších pamatovacích zařízení stroje a tudíž nevede k úspoře času. Numerické výsledky byly získány s funkcionály, jež dávají poměrně jednoduchá schémata, nevyžadují použití vnějších pamětí stroje a snadno se programují.

Uvedeme stručný obsah jednotlivých odstavců.

V odstavci 2 uvedeme konečněrozměrné aproximace výchozích integrálních rovnic a uvedeme úlohy, jež je zapotřebí řešiti. V odstavci 3 řešíme úlohy uvedené v odstavci 2 a ověřujeme konvergenci metody iterace zdroje. Je uvedeno několik možných variant výpočtu. Odstavec 4 obsahuje numerické výsledky. Celkem byla zkoumána tři prostředí s různými směsmi U^{238} a U^{235}. Výsledky výpočtů jsou uvedeny v tabulkách.

2. KONEČNĚROZMĚRNÉ APROXIMACE

Buď $\Omega = \langle E_0, E_\infty \rangle$, $0 \leqq E_0 < \ldots < E_n = E_\infty < \infty$. Položme

$$\Delta_k = E_k - E_{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \; (n \text{ přirozené})\,.$$

Buď $\mathscr{X} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ prostor reálných funkcí integrovatelných se čtvercem na Ω s normou

$$\|x\|^2 = \int_\Omega |x(E)|^2 \, \mathrm{d}E\,, \quad x \in \mathscr{L}_2(\Omega)\,.$$

Symbolem $\hat{\mathscr{X}}_n$ označujeme prostor uspořádaných n-tic $\hat{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ s normou

$$\|\hat{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 .$$

Operátor Q_n zobrazující $\mathscr{X}$ na $\hat{\mathscr{X}}_n$ definujeme vztahy

$$Q_n x = \hat{x}_n , \quad \hat{x}_n = (\xi, \ldots, \xi_n) ,$$

kde

$$\xi_k = \Delta_k^{-1} \int_{E_{k-1}}^{E_k} x(E) \, \mathrm{d}E , \quad x \in \mathscr{X} .$$

Zobrazení Q_n volíme tak, abychom vystihli strukturu předpokládaného řešení. Je-li $x(E)$ hodnota neutronového toku energie E, pak

$$\xi_j = \Delta_j^{-1} \int_{E_{j-1}}^{E_j} x(E) \, \mathrm{d}E$$

je průměrná hodnota neutronového toku v intervalu $\langle E_{j-1}, E_j \rangle$, neboli tok j-té energetické skupiny v mnohoskupinovém přiblížení.

Buď $\tilde{\mathscr{X}}_n$ prostor funkcí $\tilde{x} \in \mathscr{L}_2(\Omega)$ konstantních v intervalech $\langle E_{j-1}, E_j \rangle$, $j = 1, \ldots, n$. To značí, že $\tilde{x} \in \tilde{\mathscr{X}}_n \Leftrightarrow \tilde{x}(E) = \tilde{x}(\hat{E}_j)$ pro $E \in \langle E_{j-1}, E_j \rangle$, kde $\hat{E}_j \in \langle E_{j-1}, E_j \rangle$.

Položme

$$\hat{x}_n = S_n \tilde{x}_n ,$$

kde

$$\hat{x}_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n) , \quad \xi_j = \Delta_j^{-1} \int_{E_{j-1}}^{E_j} \tilde{x}(E) \, \mathrm{d}E = \tilde{x}(\hat{E}_j) .$$

K operátoru S_n existuje operátor inversní S_n^{-1} zobrazující $\hat{\mathscr{X}}_n$ na $\tilde{\mathscr{X}}_n$:

$$\hat{z} \in \hat{\mathscr{X}}_n , \quad \tilde{y} \in \tilde{\mathscr{X}}_n , \quad S_n^{-1} \hat{z} = \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{y}(E) = \zeta_j \quad \text{pro} \quad E \in \langle E_{j-1}, E_j \rangle ,$$

přičemž $\hat{z} = \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Nechť

$$P_n = S_n^{-1} Q_n ,$$

takže zřejmě

$$\|P_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|P_n x\| = 1 .$$

Budeme se zabývati konečněrozměrnými aproximacemi operátor-funkcí $A_1 = A_1(B)$, $A_2 = A_2(\gamma)$ definovaných v [8]

(2.1a) $$A_1(B) = (C + D) \, F(B) ,$$

(2.1b) $$A_2(\gamma) = (C + D) \, H(\gamma) ,$$

kde

$$y = Cx \equiv y(E) = \int_\Omega \Theta(E, E')\, x(E')\, \mathrm{d}E' , \tag{2.2a}$$

$$y = Dx \equiv y(E) = \frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)}\, x(E) , \tag{2.2b}$$

$$y = F(B)\, x \equiv y(E) = \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)}\, x(E) , \tag{2.2c}$$

$$y = H(\gamma)\, x \equiv y(E) = \frac{\Sigma(E)}{\Sigma(E) + \gamma/V(E)}\, x(E) . \tag{2.2d}$$

Ve výrazech (2.2) je jádro Θ spojité a kladné na čtverci $\Omega \times \Omega$ a funkce σ_e, σ, Σ, V jsou kladné a spojité na Ω.

Konečněrozměrné aproximace operátorů (2.2) definujeme takto:

$$c_{jk}^{(1)}(B) = \Delta_j^{-1} \int_{E_{j-1}}^{E_j} \Theta(E, \hat{E}_k)\, \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(\hat{E}_k)}{B/\Sigma(\hat{E}_k)}\, \mathrm{d}E , \tag{2.3a}$$

$$c_{jk}^{(2)}(\gamma) = \Delta_j^{-1} \int_{E_{j-1}}^{E_j} \Theta(E, \hat{E}_k)\, \frac{\Sigma(\hat{E}_k)}{\Sigma(\hat{E}_k) + \gamma/V(\hat{E}_k)}\, \mathrm{d}E , \tag{2.3b}$$

$$f_j(B) = \Delta_j^{-1} \int_{E_{j-1}}^{E_j} \frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)}\, \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)}\, \mathrm{d}E , \tag{2.3c}$$

$$h_j(\gamma) = \Delta_j^{-1} \int_{E_{j-1}}^{E_j} \frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)}\, \frac{\Sigma(E)}{\Sigma(E) + \gamma/V(E)}\, \mathrm{d}E , \tag{2.3d}$$

takže celkem

$$a_{jk}^{(1)}(B) = c_{jk}^{(1)}(B) + \delta_{jk} f_j(B) , \tag{2.4a}$$

$$a_{jk}^{(2)}(\gamma) = c_{jk}^{(2)}(\gamma) + \delta_{jk}\, h_j(\gamma) , \tag{2.4b}$$

kde δ_{jk} je Kroneckerovo delta, $G_B = \langle 0, B_\infty \rangle$, $G_\Gamma = \langle 0, \gamma_\infty \rangle$ a $B_\infty < \infty$, $\gamma_\infty < \infty$ jsou dané konstanty.

Poznamenejme, že většina funkcí vyskytujících se ve výrazech (2.3) vznikla měřením a jsou to funkce po částech konstantní, takže integrace v (2.3) se v podstatě redukují na sumace.

Hledejme řešení rovnic

$$A_1(B)\, x_1(B) = \mu_1(B)\, x_1(B) , \tag{2.5a}$$

$$A_2(\gamma)\, x_2(\gamma) = \mu_2(\gamma)\, x_2(\gamma) , \tag{2.5b}$$

$$A_{1n}(B)\, x_{1n}(B) = \mu_{1n}(B)\, x_{1n}(B) , \tag{2.6a}$$

$$A_{2n}(\gamma)\, x_{2n}(\gamma) = \mu_{2n}(\gamma)\, x_{2n}(\gamma) . \tag{2.6b}$$

Úloha 1. *Určiti hodnotu parametru* $B_0 \in G_B$ *a vektor* $\hat{x}_1(B_0) \in \hat{\mathscr{X}}_n$ *tak, aby příslušná vlastní hodnota* $\mu_{1n}(B_0) = 1$ *a dokázati, že* B_0 *je určeno jednoznačně.*

Úloha 1′. *Určiti hodnotu parametru* $\gamma_0 \in G_\Gamma$ *a vektor* $\hat{x}_{2n}(\gamma_0) \in \hat{\mathscr{X}}_n$ *tak, aby příslušná vlastní hodnota* $\mu_{2n}(\gamma_0) = 1$ *a dokázati, že* γ_0 *je určeno jednoznačně.*

Úloha 2. *Dokázati, že v normě prostoru* $\mathscr{X}$ *platí*

$$x_1(B) = \lim_{n\to\infty} S_n^{-1}\, \hat{x}_{1n}(B)\,, \tag{2.7a}$$

kde

$$x_1(B) = \mu_1^{-1}(B)\, A_1(B)\, x_1(B)\,, \quad \hat{x}_{1n}(B) = \mu_{1n}^{-1}(B)\, A_{1n}(B)\, \hat{x}_{1n}(B)$$

a že

$$\mu_1(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_{1n}(B) \tag{2.8a}$$

pro každé $B \in G_B$.

Úloha 2′. *Dokázati, že v normě prostoru* $\mathscr{X}$ *platí*

$$x_2(\gamma) = \lim_{n\to\infty} S_n^{-1}\, \hat{x}_{2n}(\gamma)\,, \tag{2.7a}$$

kde

$$x_2(\gamma) = \mu_2^{-1}(\gamma)\, A_2(\gamma)\, x_2(\gamma)\,, \quad \hat{x}_{2n}(\gamma) = \mu_{2n}^{-1}(\gamma)\, A_{2n}(\gamma)\, \hat{x}_{2n}(\gamma)$$

a že

$$\mu_2(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \mu_{2n}(\gamma) \tag{2.8b}$$

pro každé $\gamma \in G_\Gamma$.

Podobně jako v [8] stačí místo úloh 1,1′ vyšetřovati úlohy 3 a 3′:

Úloha 3. *Pro* $B \in G_B$, $B' \in G_B$, $B' > B$ *je*

$$\mu_{1n}(B) > \mu_{1n}(B')\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.9a}$$

Úloha 3′. *Pro* $\gamma \in G_\Gamma$, $\gamma' \in G_\Gamma$, $\gamma' > \gamma$ *je*

$$\mu_{2n}(\gamma) > \mu_{2n}(\gamma')\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.9b}$$

3. KONVERGENCE METODY ITERACE ZDROJE

V tomto odstavci se budeme zabývati řešením úloh položených v odstavci 2 a přibližnými metodami numerického řešení příslušných konečněrozměrných aproximačních soustav lineárních rovnic.

Platnost rovností (2.7a), (2.8a) respektive (2.7b), (2.8b) plyne z následujícího tvrzení dokázaného v [7].

Věta 1. *Operátor A nechť označuje jeden z operátorů $A_1(B)$, $B \in G_B$, $A_2(\gamma)$, $\gamma \in G_\Gamma$. Předpokládejme, že μ je jednoduchou dominantní vlastní hodnotou operátoru A. Operátory A_n, $n = 1, 2, \ldots$ nechť označují konečněrozměrné aproximace operátoru A definované pomocí (2.1), (2.4) a μ_n nechť označují dominantní vlastní hodnoty těchto operátorů pro $n = 1, 2, \ldots$*

Je-li x_0 ($\|x_0\| = 1$) vlastní vektor operátoru A příslušný vlastní hodnotě μ a $S_n^{-1}\hat{x}_n$ ($\|S_n^{-1}\hat{x}_n\| = 1$) vlastní vektor operátoru A_n příslušný vlastní hodnotě μ_n, pak platí v normě prostoru $\mathcal{X}$

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} S_n^{-1}\hat{x}_n$$

a

$$\mu = \lim_{n \to \infty} \mu_n .$$

Řešení úlohy 3 respektive úlohy 3′ je důsledkem toho, že prvky matic representujících operátory $A_{1n}(B)$, $A_{2n}(\gamma)$ jsou vzhledem k (2.3) a (2.4) kladné a klesající funkce proměnných B a γ. Platí totiž

Věta 2. *Předpokládejme, že prvky matice $A = A(\beta)$, $\beta \in G_\beta = \langle \beta_0, \beta_\infty \rangle$, $\beta_0 < \beta_\infty$, jsou spojité kladné klesající funkce proměnné β:*

$$a_{jk}(\beta') < a_{jk}(\beta) \quad \text{pro} \quad \beta < \beta' . \tag{3.1}$$

Potom pro každé $\beta \in G_\beta$ existuje kladné dominantní jednoduché vlastní číslo $\mu_0(\beta)$ operátoru $A(\beta)$ a funkce $\mu_0 = \mu_0(B)$ je spojitá a klesající v G_β:

$$\mu_0(\beta') < \mu_0(\beta) \tag{3.2}$$

pro $\beta' > \beta$, $\beta \in G_\beta$, $\beta' \in G_\beta$.

Platnost věty 2 vyplývá z věty **D** práce [8]. Danou matici $A(\beta)$ považujeme za operátor v konečněrozměrném prostoru $\mathcal{X}_n$. Kladnost a spojitost prvků matice $A(\beta)$ a konečná dimense prostoru $\mathcal{X}_n$ zaručují platnost požadavků 1–4 věty **D**. Požadavek 5 vyplývá z předpokladu o monotonii prvků matice $A(\beta)$.

Tím je dokázána věta 2 a tím je též podáno řešení úloh 3 a 3′, neboť pro dostatečně velká n se $\mu_{1n}(B)$ a $\mu_{2n}(\gamma)$ podle (2.8) blíží hodnotám $\mu_1(B)$, $\mu_2(\gamma)$, takže je-li $\mu_1(0) > 1$ respektive $\mu_2(0) > 1$, je též pro dostatečně velká n $\mu_{1n}(0) > 1$ a $\mu_{2n}(0) > 1$. Obdrželi jsme tedy

Řešení úlohy 3. *Je-li $\mu_1(0) > 1$, pak podle [8] existuje právě jedna hodnota $B_0 \in G_B$ taková, že $\mu_1(B_0) = 1$ a podle (2.8a) existuje index n_0 tak, že $\mu_{1n}(0) > 1$ pro $n > n_0$. Z věty 2 pak vyplývá že existuje právě jedna hodnota $B_{0n} \in G_B$ taková, že $\mu_{1n}(B_{0n}) = 1$ a platí*

$$1 = \mu_{1n}(B_{0n}) \to \mu_1(B_0) = 1 , \tag{3.3a}$$

$$B_{0n} \to B_0 . \tag{3.4a}$$

Důkaz. Stačí dokazovati platnost relace (3.4a). Ta vyplývá odtud, že z konvergence posloupnosti klesajících spojitých kladných funkcí $\{v_n\}$ ke kladné klesající funkci v plyne též konvergence posloupnosti funkcí $\{v_n^{-1}\}$ inversních k $\{v_n\}$ k inversní k v funkci v^{-1}. Důsledkem je platnost vztahů

$$B_{0n} = \mu_{1n}^{-1}(1) \to \mu_1^{-1}(1) = B_0$$

z nichž přímo vyplývá (3.4a).

Podobně obdržíme

Řešení úlohy 3'. *Je-li* $\mu_2(0) > 1$, *pak podle* [8] *existuje právě jedna hodnota* $\gamma_0 \in G_\Gamma$ *taková, že* $\mu_2(\gamma_0) = 1$ *a podle* (2.8b) *existuje index* n_0 *takový, že* $\mu_{2n}(0) > 1$ *pro* $n > n_0$. *Z věty 2 pak vyplývá, že existuje právě jedna hodnota* $\gamma_{0n} \in G_\Gamma$ *taková, že* $\mu_{2n}(\gamma_{0n}) = 1$ *a platí*

$$1 = \mu_{2n}(\gamma_{0n}) \to \mu_2(\gamma_0) = 1\,, \tag{3.3b}$$

$$\gamma_{0n} \to \gamma_0\,. \tag{3.4b}$$

Symbol A nechť označuje jeden z operátorů $A_1(B)$, $A_2(\gamma)$, $A_n(B)$, $A_{2n}(\gamma)$ v příslušném definičním oboru. Jak jsme dokázali, operátor A má kladné dominantní jednoduché vlastní číslo, označme je symbolem μ_0. Zabývejme se úlohou stanoviti přibližně hodnotu μ_0 a příslušný vlastní vektor, jejž označujeme symbolem x_0.

Nechť $\{y'_m\}$, $\{z'_m\}$ jsou posloupnosti spojitých lineárních forem slabě konvergentních k formě y' v příslušném Banachově prostoru $\mathscr{X}$, tj.

$$y'(x) = \lim_{m \to \infty} y'_m(x) = \lim_{m \to \infty} z'_m(x)$$

pro každý vektor $x \in \mathscr{X}$.

Nechť

$$y_{m+1} = \mu_m^{-1} A y_m\,,$$

přičemž y_0 je nenulový vektor z kužele nezáporných vektorů prostoru $\mathscr{X}$ a

$$\mu_m = \frac{z'_m(Ay_m)}{y'_m(y_m)}\,.$$

Podle [5] platí v normě příslušného prostoru

$$\lim_{m \to \infty} y_m = \alpha x_0\,, \quad \alpha \neq 0$$

a

$$\lim_{m \to \infty} \mu_m = \mu_0\,.$$

Uvedeme některé typy funkcionálů používaných při praktickém počítání.

Napřed se budeme zabývati případem operátorů $A_1(B)$, $A_2(\gamma)$.

As. Nechť $\mathscr{X} = \mathscr{C}(\Omega)$, $\tilde{E}_0 \in \Omega$, $x_0(\tilde{E}_0) > 0$ a

$$z'_m(x) = y'_m(x) = y'(x) = x(\tilde{E}_0)\,.$$

Bs. Nechť $\mathscr{X} = \mathscr{C}(\Omega)$, $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, $f(E) > 0$ pro $E \in \Omega$,

$$z'_m(x) = y'_m(x) = y'(x) = \int_\Omega f(E)\, x(E)\, \mathrm{d}E\,.$$

Cs. Nechť $\mathscr{X} = \mathscr{L}_2(\Omega)$, A^* je adjungovaný k A operátor a (x, y) značí hodnotu skalárního součinu v $L_2(\Omega)$ ([1], [4]):

$$y'_m(x) = z'_m(x) = (x, y^*_m)\,,$$

kde

$$y^*_{m+1} = \mu_m^{-1} A^* y^*_m\,.$$

Poznamenejme, že volba **Cs** je optimální ve smyslu popsaném v práci [6].

Případ operátorů $A_{1n}(B)$, $A_{2n}(\gamma)$ rozeběřeme podrobněji. Ve všech vyšetřovaných případech nechť $\mathscr{X}_n$ označuje n-rozměrný eukleidovský prostor se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\,,$$

kde

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\,, \quad y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

a s normou

$$\|x\|^2 = (x, x)\,.$$

Ad. Buď ξ_j souřadnice vlastního vektoru x_0 operátoru A taková, že $\xi_j > 0$. Potom klademe

$$z'_m(x) = y'_m(x) = y'(x) = \xi_j\,.$$

Obdržíme známý proces

$$\mu_m = \frac{(Ay_m)_j}{(y_m)_j}\,,$$

kde $(x)_j$ značí j-tou souřadnici vektoru $x \in \mathscr{X}_n$.

Bd. Nechť $f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $f \in X_n$, $\varphi_j > 0$ alespoň pro jednu souřadnici a

$$z'_m(x) = y'_m(x) = y'(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \xi_k\,,$$

kde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Poznamenejme, že proces **Ad** je speciálním případem procesu **Bd**, klademe-li

$$\varphi_k = \delta_{jk} .$$

Obdržený proces při $\varphi_k = 1$, $k = 1, \ldots, n$

$$\mu_m = \frac{\sum_{k=1}^{n} (Ay_m)_k}{\sum_{k=1}^{n} (y_m)_k}$$

je výhodnější než proces **Ad**, neboť zahlazuje eventuální singularity některých souřadnic.

Cd. Nechť A^* označuje adjungovaný k A operátor. Nechť

$$y^*_{m+1} = \mu_m^{-1} A^* y^*_m$$

a

$$z'_{1m}(x) = y'_{1m}(x) = (x, y^*_m) ,$$
$$z'_{2m}(x) = y'_{2m}(x) = (x, A^* y^*_m) .$$

Obdržíme procesy

$$\mu_{1m} = \frac{(Ay_m, y^*_m)}{(y_m, y^*_m)} , \quad \mu_{2m} = \frac{(Ay_m, A^* y^*_m)}{(y_m, A^* y^*_m)} ,$$

jež jsou optimální ve smyslu popsaném v práci [6].

O přednostech těchto procesů svědčí platnost vztahů

$$\mu_{1m} = \frac{(Ay_m, y^*_m)}{(y_m, y^*_m)} = \frac{(A^{2m+1} y_0, y_0)}{(A^{2m} y_0, y_0)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (A^{2m+1} y_0)_k (y_0)_k}{\sum_{k=1}^{n} (A^{2m} y_0)_k (y_0)_k} ,$$

$$\mu_{2m} = \frac{(Ay_m, A^* y_m)}{(y_m, A^* y^*_m)} = \frac{(A^{2m+2} y_0, y_0)}{(A^{2m+1} y_0, y_0)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (A^{2m+2} y_0)_k (y_0)_k}{\sum_{k=1}^{n} (A^{2m+1} y_0)_k (y_0)_k} ,$$

z nichž je patrné, že přiblížení stupně n ve variantě **Cd** je přiblížením stupně $2n$ ve variantě **Bd**. Tato výhoda však je vyvážena nutností „pamatovati" daleko větší množství informace pro vytváření prvků iteračních posloupností, což při konkrétním výpočtu vede k nutnosti použití vnějších pamětí stroje a ke ztrátě času. Na výkonných strojích je však výhodnost metody **C** nesporná, zejména v případě konečněrozměrných matic kdy ani stanovení ani pamatování adjungovaného operátoru A^* nečiní potíží. Poznamenejme, že když $A = A^*$, pak jsou posloupnosti $\{y_m\}$, $\{y^*_m\}$ totožné, takže pro případ symetrických operátorů je použití procesu **C** zvlášť výhodné.

4. NUMERICKÉ VÝSLEDKY

Možnost udržení řetězové reakce s rychlými neutrony byla zkoumána pro tři typy homogenních prostředí tvořených směsmi isotopů U^{238} a U^{235}. Složení $U^{235} : U^{238}$ bylo v rozmezí 20%–40%. Hlavním účelem výpočtu bylo ověřiti použitelnost některých numerických metod pro zkoumání problému udržení řetězové reakce v nehomogenním prostředí [10].

Výsledky výpočtů jsou obsaženy v tabulkách 1–3. V tabulkách 1–3 m označuje počet provedených iterací.

Tabulka 1.

Prostředí	m	$\mu(0)$
20%	83	1,02664904
30%	101	1,06626524
40%	81	1,09365712

Tabulka 2.

Prostředí	m	B	$\mu_1(B)$
20%	47	0,118347168	1,00000556
30%	96	0,181152342	1,00000448
40%	48	0,210327148	1,00000548

Tabulka 3.

Prostředí	m	γ	$\mu_2(\gamma)$
20%	81	$0,993999996 . 10^7$	1,00000586
30%	117	$0,274784000 . 10^8$	1,00000000
40%	82	$0,410952000 . 10^8$	1,00000034

Jak ukazuje porovnání výsledků námi dosažených s výsledky práce [3], metoda iterace zdroje, ve tvaru uvedeném v odstavci 3, se plně osvědčila a bylo jí proto použito i pro případ řetězové reakce v nehomogenních prostředích [2]. Poznamenejme, že odchylky mezi výsledky námi dosaženými a výsledky práce [3] lze přičíst na vrub odchylkám ve výchozích jaderných konstantách.

Výpočty byly prováděny na samočinném počítači Ural I v Ustavu teorie informace a automatizace ČSAV v Praze.

Počítáno bylo v pohyblivé řádové čárce. Dimense prostoru $\mathscr{X}_n$ byla zvolena $n = 16$ vzhledem k možnostem stroje. Z důvodů, o nichž jsme se již zmínili, bylo použito varianty výpočtu **Bd**.

Jak je patrné z formulace úlohy, je zapotřebí určiti tři dominantní vlastní čísla pro jeden případ obohacení prostředí isotopem U^{235}. Při výpočtu prvního z trojice hledaných vlastních čísel byl za výchozí vektor iterací volen vektor y_0 o souřadnicích

$\eta_1 = \ldots = \eta_n = 1$. Pro stanovení dalších dvou vlastních čísel bylo používáno vektorů, jež byly získány iteracemi v předchozí úloze.

V žádném z počítaných případů jsme se nesetkali s příznakem numerické nestability.

Literatura

[1] *I. A. Birger:* Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, Москва 1958.

[2] *J. Čermák, M. Grmela, I. Marek:* Výzkumná zpráva ÚJV ČSAV č. 971, 1963.

[3] *M. Feix, P. Nicourd, S. Valentin:* Comptes rendus Acad. Sci. 244 (1957), 20, 2502—2505.

[4] *J. Kolomý:* Convergence of the iterative methods. Comment. Math. Univ. Carol. 1, 3 (1960), 18—24.

[5] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. 12 (1962), 536—554.

[6] *I. Marek:* Kellogg's iterations with minimizing parameters. Comment. Math. Univ. Carol 4, 2 (1963), 53—64.

[7] *I. Marek:* On the approximative solution of integral equations. Comment. Math. Univ. Carol. 3,4 (1962), 48—66.

[8] *I. Marek:* Řetězová reakce s rychlými neutrony v obohaceném uranu. Aplikace matematiky 8 (1963), 102—117.

[9] *A. E. Taylor:* Introduction to functional analysis. J. Wiley publ., New York 1958.

[10] *Л. Трлифай, Й. Чермак:* Кинетическая теория диффузии нейтронов в слоистой рещетке. Некоторые теоретические результаты. Ref. 2102 Intern. Conf. Pacif. Uses of Atom. Energy, Ženeva 1958.

Резюме

ЦЕПНАЯ РЕАКЦИЯ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ
II. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

ИВО МАРЕК (Ivo Marek)

Статья является продолжением одноименной статьи [8]. Между тем как в [8] решена проблема существования и однозначности критических параметров (материального параметра и реактивности), в данной статье в основном уделяется внимание вопросам, связанным с вычислениями. Именно, затронуты вопросы дискретизации задачи, сходимости решений полученных систем линейных алгебраических уравнений к точному решению исходного интегрального уравнения, сходимости некоторых вычислительных процессов типа итерации источника, устойчивости вычислительного процесса. Приведены также численные результаты.

Summary

NEUTRON CHAIN REACTION WITH FAST NEUTRONS
II. NUMERICAL ANALYSIS

IVO MAREK

The paper is a continuation of the paper [8] of the same name. In [8] problems of existence and of uniqueness of critical parameters (the material parameter, the reactivity) were solved; in the present paper computational problems are discussed. The questions treated are connected with the discretization of the problem, with the convergence of the solutions of the obtained linear algebraic equations to the exact solutions of the initial integral equations, with the convergence of some numerical processes of the type source iteration and with the stability of the numerical processes used. Some numerical results are given.

Adresa autora: *Ivo Marek* C. Sc., Matematický ústav Karlovy university, Sokolovská 83, Praha-Karlín.