Vladimír Petrův

Die Lösung der Formeln von Frenet im Falle konstanter Krümmungen

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 4, 239,240–263,264–272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102903

ČLÁNKY

DIE LÖSUNG DER FORMELN VON FRENET IM FALLE KONSTANTER KRÜMMUNGEN

VLADIMÍR PETRŮV

(Eingegangen am 27. Juni 1963.)

In dieser Arbeit wird die Lösung der Formeln von Frenet für Weltlinie untersucht, vorallem im Falle, dass die Krümmungen konstant sind. Es wird immer ein inerziales System gesucht, in dem die Weltlinie die einfachste mögliche Form hat.

Die Gleichungen

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,, \quad \alpha = 1, 2, 2, 4, \ \tau \in I \tag{1}$$

mögen die Trajektorie eines Massenpunktes mit der Ruhemasse μ im Zeitraumkoordinatensystem bezeichnen. Wenn wir voraussetzen[1]), dass die Funktionen x^α stetige Ableitungen 5. Ordnung für $\tau \in I$ haben, und wenn wir

$$i_1^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \tag{2}$$

bezeichnen, dann gelten für die Weltlinie (1) die Frentschen Formeln

$$\frac{\mathrm{d}i_1^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P}{\mu}\, i_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}i_2^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P}{\mu c^2}\, i_1^\alpha + \frac{Q}{\mu c}\, i_3^\alpha\,, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_3^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{Q}{\mu c}\, i_2^\alpha + \frac{R}{\mu c}\, i_4^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}i_4^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{R}{\mu c}\, i_3^\alpha$$

(wo c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet). Die Vektoren i_1^α, i_2^α, i_3^α, i_4^α sind dabei einander orthogonal (in der Metrik des Minkowskischen Raumes), i_2^α, i_3^α, i_4^α sind Einheitsvektoren und für den Vektor i_1^α gilt

$$g_{\alpha\beta} i_1^\alpha i_1^\beta = -c^2\,, \tag{4}$$

[1]) Beweise siehe [1].

was (wegen (2)) dasselbe ist wie

$$(5)\qquad g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = -c^2\,.$$

P, Q, R sind reelle nichtnegative Funktionen der Veränderlichen τ, die mit den Funktionen x^α durch die Relationen

$$(6)\qquad g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{P^2}{\mu^2}$$

gebunden sind; (wegen (2) kann man statt (6) auch schreiben

$$(7)\qquad g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}i_1^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}i_1^\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P^2}{\mu^2});$$

wenn $P(\tau) = 0$, setzen wir $Q(\tau) = 0$, wenn $P(\tau) \neq 0$, ist

$$(8)\qquad Q = \frac{\mu^3 c}{P^2}\left(\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2 - \frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3} \end{vmatrix}^2\right);$$

wenn $Q(\tau) = 0$, setzen wir $R(\tau) = 0$, wenn $Q(\tau) \neq 0$, ist

$$(9)\qquad R = \frac{\mu^6 c^3 \vartheta}{Q^2 P^3}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}, & \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2}, & \frac{\mathrm{d}^2x^4}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3x^1}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^2}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^3}{\mathrm{d}\tau^3}, & \frac{\mathrm{d}^3x^4}{\mathrm{d}\tau^3} \\ \frac{\mathrm{d}^4x^1}{\mathrm{d}\tau^4}, & \frac{\mathrm{d}^4x^2}{\mathrm{d}\tau^4}, & \frac{\mathrm{d}^4x^3}{\mathrm{d}\tau^4}, & \frac{\mathrm{d}^4x^4}{\mathrm{d}\tau^4} \end{vmatrix},$$

wo ϑ Signum des Determinanten rechts bezeichnet.

Diese skalare Funktionen P, Q, R sind hinsichtlich der Lorentztransformationen invariant. Wenn $R = 0$, kann man ein solches inertiales System finden, in dem sich der Massenpunkt in einer Ebene bewegt, z.B. in der Ebene $x^3 = 0$; wenn $Q = 0$, kann man ein solches inertiales System finden, in dem sich der Massenpunkt in einer Geraden bewegt, z.B. in der Geraden $x^2 = 0$, $x^3 = 0$; wenn $P = 0$, kann man ein solches inertiales System finden, in dem sich der Massenpunkt nicht bewegt.

Erinnern wir noch daran, dass

$$i_1^4 = \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > 0 \quad \text{für alle} \quad \tau \in I \,, \tag{10}$$

wo

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}x^4}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^4}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^3}{\mathrm{d}x^4}\right)^2 .$$

Stellen wir uns jetzt die Frage, wie man bei gegebenen Funktionen P, Q, R, stetigen und nichtnegativen im Interval $(-\infty, +\infty)$, die Weltlinien finden kann, denen die gegebenen Funktionen P, Q, R entsprechen.

Won der Funktion P setzen wir voraus, dass sie stets positiv ist; im Falle, dass $P = 0$, existiert, wie schon oben gesagt wurde, ein inertiales System, in dem der Massenpunkt sich nicht bewegt. Von diesem Standpunkte aus ist also der Fall $P = 0$ nicht interessant.

Um dieses Ziel zu erreichen, werden wir uns mit dem System (3) beschäftigen und die Erfüllung der Bedingungen (5) und (6) für alle τ voraussetzen. Wie werden uns dabei bemühen gleichzeitig ein solches inertiales System zu finden, in dem das Resultat die einfachste mögliche Form hat.

Bezeichnen wir

$$\frac{1}{c}\, i_1^\alpha = j_1^\alpha \,, \quad i_k^\alpha = j_k^\alpha \quad \text{für} \quad k = 2, 3, 4, \ \alpha = 1, 2, 3, 4 \,, \tag{11}$$

$$\sigma = \sigma(\tau) = \frac{1}{\mu c} \int_0^\tau P(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho \,, \tag{12}$$

ist

$$\sigma'(\tau) = \frac{1}{\mu c} P(\tau) > 0 \,,$$

so dass zur Funktion σ die inverse Funktion $\tau = \tau(\sigma)$, die im gewissen Intervall J definiert ist, existiert und (für jede differenzierbare Funktion F)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} F(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} F(\tau(\sigma))\, \frac{P(\tau)}{\mu c}$$

ist. Gehen wir vom Parameter τ zum Parameter σ über, entsteht aus (3) das System der Gleichungen

$$\text{(13)} \qquad \frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + qj_3^\alpha\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -qj_2^\alpha + rj_4^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_4^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -rj_3^\alpha\,,$$

wo wir

$$q(\sigma) = \frac{Q(\tau(\sigma))}{P(\tau(\sigma))}\,, \quad r(\sigma) = \frac{R(\tau(\sigma))}{P(\tau(\sigma))}$$

bezeichnet haben.

Aus den Bedingungen (5), (6) (resp. (4), (7)) entstehen dann die Relationen

$$\text{(14)} \qquad g_{\alpha\beta}j_1^\alpha j_1^\beta = -1\,,$$

$$\text{(15)} \qquad g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}j_1^\beta}{\mathrm{d}\sigma} = 1\,.$$

Wir werden jetzt separat die Fälle $q = 0$ resp. $r = 0$ resp. $r \neq 0$ untersuchen.

I. Der Fall $q = 0$.

Wenn $q = 0$, so ist auch $r = 0$ und das System (13) vereinfacht sich auf das System

$$\text{(16)} \qquad \frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha\,.$$

Scheidet man aus diesen Gleichungen j_2^α aus, bekommt man für j_1^α eine Gleichung zweiter Ordnung, nämlich die Gleichung

$$\text{(17)} \qquad \frac{\mathrm{d}^2j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^2} - j_1^\alpha = 0\,.$$

Das Fundamentalsystem dieser Gleichung bilden z. B. die Funktionen $\sinh\sigma$, $\cosh\sigma$, so dass

$$\text{(18)} \qquad j_1^\alpha(\sigma) = A^\alpha\sinh\sigma + B^\alpha\cosh\sigma\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,.$$

Weil $q = 0$, d.h. $Q = 0$ ist, wissen wir, dass man durch passende Wahl des inertialen Systemes das erreichen kann, dass sich der Massenpunkt in der Geranden $x^2 = x^3 = 0$ bewegen wird. Daraus folgt, dass $i_1^2 = i_1^3 = 0$ und deswegen auch $j_1^2 = j_1^3 = 0$, so dass

$$\text{(19)} \qquad A^2 = A^3 = B^2 = B^3 = 0\,.$$

Die Bedingung (14) heisst

$$g_{\alpha\beta}(A^\alpha \sinh \sigma + B^\alpha \cosh \sigma)(A^\beta \sinh \sigma + B^\beta \cosh \sigma) =$$
$$= g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \sinh^2 \sigma + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \cosh^2 \sigma + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \sinh \sigma \cosh \sigma = -1\,,$$

das ist

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \frac{\cosh 2\sigma - 1}{2} + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \frac{\cosh 2\sigma + 1}{2} + g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \sinh 2\sigma = -1\,.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen 1, $\sinh 2\sigma$, $\cosh 2\sigma$ folgt daraus

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 0\,, \quad -g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = -2\,, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0\,,$$

oder

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = 1\,, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = -1\,, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0\,,$$

oder (wegen (19))

$$(A^1)^2 - c^2(A^4)^2 = 1\,, \quad (B^1)^2 - c^2(B^4)^2 = -1\,, \quad A^1B^1 - c^2A^4B^4 = 0\,. \tag{20}$$

Es mag die Geschwindigkeit der Bewegung in der Zeit x^4, die dem Wert der Eingenzeit $\tau = 0$ entspricht, v_1 sein. Wenn man vom inertialen System x^1, x^2, x^3, x^4 zum neuen inertialen System $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$, mittels der Transformationen

$$\bar{x}^1 = \beta(x^1 - v_1x^4)\,, \quad \bar{x}^2 = x^2\,, \quad x^3 = x^3\,, \quad \bar{x}^4 = \beta\left(x^4 - \frac{v_1}{c^2}x^1\right)$$

(wo $\beta = [1 - (v_1^2/c^2)]^{-1/2}$) übergeht, dann werden in diesem neuen System für die gesuchte Weltlinie wieder offensichtlich die Gleichungen

$$\bar{j}_1^\alpha = \bar{A}^\alpha \sinh \sigma + \bar{B}^\alpha \cosh \sigma\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

gelten, wo

$$\bar{j}_1^\alpha = \frac{1}{c}\,\bar{i}_1^\alpha = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \quad \text{ist.}$$

Die gestreiften Konstanten müssen wieder dieselben Gleichungen erfüllen, wie die ungestreiften (d.i. (19), (20)). Man kann also die Streifen weglassen und weiter mit den Gleichungen (18), (19), (20) arbeiten. Jetzt wird aber die Geschwindigkeit der Bewegung für $\tau = 0$ gleich Null sein, d.i.

$$\left.\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}x^4}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau}}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{i_1^1}{i_1^4}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{j_1^1}{j_1^4}\right|_{\sigma=0} = \frac{B^1}{B^4} = 0\,,$$

so dass

$$B^1 = 0.$$

Wegen (10) ist aber

$$0 < i_1^4(0) = c\, j_1^4(0) = cB^4 ,$$

so dass man aus den Gleichungen (20) nach und nach bekommt

$$A^4 = 0 , \quad B^4 = \frac{1}{c} , \quad A^1 = \pm 1 .$$

Durch eventuelle Änderung der Orientierung der x^1 Achse erreicht man das, dass man $A^1 = 1$ einsetzen kann. Man bekommt also

$$j_1^1(\sigma) = \sinh \sigma , \quad j_1^4(\sigma) = \frac{1}{c} \cosh \sigma ,$$

d.i.

$$i_1^1(\tau) = c \sinh \left(\frac{1}{\mu c} \int_0^\tau P(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho \right) ,$$
$$i_1^4(\tau) = \cosh \left(\frac{1}{\mu c} \int_0^\tau P(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho \right) .$$

Wenn man x, y, z, t statt x^1, x^2, x^3, x^4 schreibt, hat man

$$x(\tau) = c \int_0^\tau \sinh \left(\frac{1}{\mu c} \int_0^\alpha P(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\alpha + x_0 , \tag{21}$$
$$y(\tau) = 0 , \quad z(\tau) = 0 ,$$
$$t(\tau) = \int_0^\tau \cosh \left(\frac{1}{\mu c} \int_0^\alpha P(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\alpha + t_0 .$$

Speziell im Falle, dass die Funktion P konstant ist, bekommen wir

$$x(\tau) = \frac{\mu c^2}{P} \left[\cosh \left(\frac{P}{\mu c} \tau \right) - 1 \right] + x_0 ,$$
$$t(\tau) = \frac{\mu c}{P} \sinh \left(\frac{P}{\mu c} \tau \right) + t_0 .$$

Durch passende Wahl des Ursprungs der Zeit (damit für $\tau = 0$ auch $t = 0$ wäre) und des Ursprungs der Raumkoordinaten (damit $x = \mu c^2 / P$ für $\tau = 0$ wäre), bekommt man schliesslich

$$x(\tau) = \frac{\mu c^2}{P} \cosh \left(\frac{P}{\mu c} \tau \right), \quad y(\tau) = 0 , \quad z(\tau) = 0 , \tag{22}$$
$$t(\tau) = \frac{\mu c}{P} \sinh \left(\frac{P}{\mu c} \tau \right) .$$

Den Zeitverlauf dieser Bewegung kann man in der x, t Ebene darstellen: Aus der Relation

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 ,$$

folgt

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{\mu^2 c^4}{P^2} , \tag{23}$$

was die Gleichung der Hyperbl mit den Assymptoten $x = \pm ct$ ist. Rechnet man aus (23) x aus, hat man

$$x = c \sqrt{\left(\frac{\mu^2 c^2}{P^2} + t^2 \right)} . \tag{24}$$

Bemerkung. Wenn $P(\tau_0) = 0$ ist, dann muss die Weltlinie für $\tau = \tau_0$ statt des Systemes (3) nur die Gleichung $\frac{\mathrm{d} i_1^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = 0$ erfüllen; aus den Gleichungen (21) sieht man gleich, dass die durch die Gleichungen (21) gegebene Weltlinie diese Gleichung für $\tau = \tau_0$ erfüllt, also: die Gleichungen (21) geben die Weltlinie, die einer stetigen, nichtnegativen (also nicht nur positiven) Funktion P entspricht.

Zusammenfassung. Wenn $Q = 0$ (und demnach auch $R = 0$) ist, dann entsprechen einer stetigen, nichtnegativen Funktion P Weltlinien, die man im passend gewählten inertialen Systeme durch die Gleichungen (21) ausdrücken kann, im Falle, dass P konstant ist, kann man diese Gleichungen durch passende Wahl des Ursprungs der Zeitraumkoordinaten auf die Form (22) vereinfachen. Alle möglichen Weltlinien, die gegebenem P entsprechen, erhalten wir also aus den Gleichungen (21) (resp. (22) im Falle des konstanten P) durch Lorentztransformationen.

II. Der Fall $r = 0$.

Wenn $r = 0$ ist, so vereinfacht sich das System (13) auf das System

$$\frac{\mathrm{d} j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha , \quad \frac{\mathrm{d} j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + q j_3^\alpha , \quad \frac{\mathrm{d} j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -q j_2^\alpha . \tag{25}$$

Von der Funktion q setzen wir noch weiter voraus, dass sie positiv und differenzierbar für alle τ ist. Durch Differenzieren der zweiten Gleichung in (25) bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}^2 j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^2} = \frac{\mathrm{d} j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} + q' j_3^\alpha + q \frac{\mathrm{d} j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} .$$

Wenn man diese Gleichung mit q multipliziert und addiert dazu die zweite Gleichung von (25) multipliziert mit $-q'$ und die dritte Gleichung von (25) multipliziert mit q^2, bekommt man die Gleichung

$$q \frac{d^2 j_2^\alpha}{d\sigma^2} = q' \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} + q \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} - q' j_1^\alpha - q^3 j_2^\alpha .$$

Im Hinsicht auf die erste Gleichung in (25) hat man also

$$q \frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - q' \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + q(q^2 - 1) \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + q' j_1^\alpha = 0 ,$$

d.i.

$$\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{q'}{q} \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + (q^2 - 1) \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{q'}{q} j_1^\alpha = 0 . \tag{26}$$

Damit haben wir aus dem System (25) die Funktionen j_2^α und j_3^α eliminiert und haben so eine lineare Gleichung dritter Ordnung für j_1^α bekommen. Speziell im Falle, wenn q konstant ist, haben wir die Gleichung

$$\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} + (q^2 - 1) \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} = 0 \tag{27}$$

bekommen, was eine lineare Gleichung mit konstanten Koefizienten ist. Lösen wir weiter den Fall, wenn q konstant ist.

A) $q = 1$.

Es handelt sich um den Fall, dass $P(\tau) = Q(\tau)$ für alle τ ist, die Gleichung (27) hat dann die Form

$$\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} = 0 \tag{28}$$

und wir können für das Fundamentalsystem z.B. die Funktionen 1, σ, σ^2 wählen.

Man hat also

$$j_1^\alpha(\sigma) = A^\alpha \sigma^2 + B^\alpha \sigma + C^\alpha , \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 . \tag{29}$$

Weil $r = 0$, d.h. $R = 0$ ist, weiss man, dass durch passende Wahl des inertialen Systems das erreichen kann, dass die Bewegung in der Ebene $x^3 = 0$ stattfindet; dann ist $i_1^3 = 0$, also ist auch $j_1^3 = 0$, oder

$$A^3 = B^3 = C^3 = 0 . \tag{30}$$

Es mag die Geschwindigkeit der Bewegung in der Zeit x^4, die dem Wert der Eigenzeit $\tau = 0$ entspricht, $[v_1, v_2, 0]$ sein. Wenn wir vom inertialen System x^1, x^2, x^3, x^4 zum neuen inertialen System $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ mittels der Transformationen

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= x^1 - \beta v_1 x^4 + (\beta - 1)\frac{v_1}{v_0^2}(v_1 x^1 + v_2 x^2)\,,\\
\bar{x}^2 &= x^2 - \beta v_2 x^4 + (\beta - 1)\frac{v_2}{v_0^2}(v_1 x^1 + v_2 x^2)\,,\\
\bar{x}^3 &= x^3\,,\\
\bar{x}^4 &= \beta\left[x^4 - \frac{1}{c^2}(v_1 x^1 + v_2 x^2)\right]
\end{aligned}$$

übergehen (wo $v_0 = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)}$, $\beta = [1 - (v_0^2/c^2)]^{-1/2}$), dann werden in diesem neuen System für die gesuchte Zeitlinie wieder offensichtlich die Gleichungen

(31) $$\bar{j}_1^\alpha(\sigma) = \bar{A}^\alpha\sigma^2 + \bar{B}^\alpha\sigma + \bar{C}^\alpha\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

gelten, wo

(32) $$\bar{j}_1^\alpha = \frac{1}{c}\,\bar{i}_1^\alpha = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,.$$

Wir können also wieder die Streifen loslassen und weiter mit den Gleichungen (29) arbeiten. Jetzt ist aber die Geschwindigkeit der Bewegung für $\tau = 0$ gleich Null, d.i.

$$\left.\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x^4}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\tau}}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{i_1^k}{i_1^4}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{j_1^k}{j_1^4}\right|_{\sigma=0} = \frac{C^k}{C^4} = 0\,, \quad k = 1, 2\,,$$

so dass

(33) $$C^1 = C^2 = 0\,.$$

Weil gemäss (10)

$$0 < i_1^4(0) = c\,j_1^4(0) = cC^4\,,$$

ist

(34) $$C^4 > 0\,.$$

Die Bedingung (14) heisst

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}(A^\alpha\sigma^2 + B^\alpha\sigma + C^\alpha)(A^\beta\sigma^2 + B^\beta\sigma + C^\beta) &= g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta\sigma^4 + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta\sigma^3 + \\
+ (g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta)\,\sigma^2 + 2g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta\sigma + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta &= -1\,,
\end{aligned}$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ folgt:

(35) $$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = 0\,,\\
&g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1\,.
\end{aligned}$$

Die Bedingung (15) heisst

$$g_{\alpha\beta}(2A^\alpha\sigma + B^\alpha)(2A^\beta\sigma + B^\beta) = 4g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta\sigma^2 + 4g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta\sigma + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 1\,,$$

was als neue Bedingung noch gibt

$$g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 1\,. \tag{36}$$

Aus (35) und (36) haben wir also im ganzen

$$\begin{aligned} &g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = -\tfrac{1}{2}\,; \\ &g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 1\,, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Wenn $A^2 \neq 0$, dann durch Umdrehung der Raumkoordinatenachsen, die durch die Orthogonaltransformation

$$\bar{x}_1 = \frac{A^1x^1 + A^2x^2}{\sqrt{[(A^1)^2 + (A^2)^2]}}\,, \quad \bar{x}^2 = \frac{A^2x^1 - A^1x^2}{\sqrt{[(A^1)^2 + (A^2)^2]}}\,, \quad \bar{x}^3 = x^3$$

gegeben ist, wird unsere Weltlinie in gestreiften Koordinaten ausgedrückt; es werden für sie wieder die Gleichungen (31), (32) gelten und es werden für die gestreiften Konstanten offensichtlich die selben Relationen gelten, die auch für die ungestreiften Konstanten gültig waren, d.i. die Relationen (30), (33), (34), (37), es wird aber noch $\bar{A}^2 = 0$ sein. Wir können also wieder die Streifen weglassen und auf die Gleichungen (29) mit den Bedingungen (30), (33), (34), (37) zurückkommen und noch die Bedingung

$$A^2 = 0 \tag{38}$$

hinzufügen. Wegen der Bedingungen (30), (33) und (38) bekommen die Bedingungen (37) die Form

$$\begin{aligned} &(A^1)^2 - c^2(A^4)^2 = 0\,, \quad A^1B^1 - c^2A^4B^4 = 0\,, \quad -c^2A^4C^4 = -\tfrac{1}{2}\,, \\ &(B^1)^2 + (B^2)^2 - c^2(B^4)^2 = 1\,, \quad -c^2B^4C^4 = 0\,, \quad -c^2(C^4)^2 = -1\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (34)

$$B^4 = 0\,, \quad C^4 = \frac{1}{c}\,, \quad A^4 = \frac{1}{2c}\,, \quad A^1 = \pm\tfrac{1}{2}\,, \quad B^1 = 0\,, \quad B^2 = \pm 1\,.$$

Wir können $A^1 = \frac{1}{2}$, $B^2 = 1$ voraussetzen, sonst würden wir nämlich die Orientierung der Achsen x^1 und x^2 ändern. Wir haben also

$$j_1^1(\sigma) = \tfrac{1}{2}\sigma^2\,, \quad j_1^2(\sigma) = \sigma\,, \quad j_1^3(\sigma) = \frac{1}{2c}\sigma^2 + \frac{1}{c}$$

bekommen, d.i.

$$i_1^1(\tau) = \frac{1}{2\mu^2 c}\left(\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)^2, \quad i_1^2(\tau) = \frac{1}{\mu}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,,$$

$$i_1^4(\tau) = \frac{1}{2\mu^2 c^2}\left(\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)^2 + 1\,,$$

also (wenn man x, y, z, t statt x^1, x^2, x^3, x^4 schreibt)

(39)
$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{2\mu^2 c}\int_0^\tau \left(\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)^2 \mathrm{d}\alpha + x_0\,,\\ y(\tau) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\tau \left(\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right) \mathrm{d}\alpha + y_0\,,\\ z(\tau) &= 0\,,\\ t(\tau) &= \frac{1}{2\mu^2 c^2}\int_0^\tau \left(\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)^2 \mathrm{d}\alpha + \tau + t_0\,. \end{aligned}$$

Speziell im Falle, dass P konstant ist, haben wir

$$x(\tau) = \frac{P^2}{6\mu^2 c}\tau^3 + x_0\,, \quad y(\tau) = \frac{P}{2\mu}\tau^2 + y_0\,, \quad z(\tau) = 0\,,$$

$$t(\tau) = \frac{P^2}{6\mu^2 c^2}\tau^3 + \tau + t_0\,.$$

Durch passende Wahl des Zeitraumursprungs ($t = 0$, $x = y = z = 0$ für $\tau = 0$), bekommt man schliesslich

(40)
$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{P^2}{6\mu^2 c}\tau^3\,, \quad y(\tau) = \frac{P}{2\mu}\tau^2\,, \quad z(\tau) = 0\,,\\ t(\tau) &= \frac{P^2}{6\mu^2 c^2}\tau^3 + \tau\,. \end{aligned}$$

Scheidet man τ aus den zwei ersten Gleichungen aus, bekommt man die Trajektorie der Bewegung in der x, y – Ebene

$$x^2 = \frac{2P}{9\mu c^2}\,y^3\,.$$

Die Trajektorie unserer Weltlinie ist also eine semikubische Parabel

(41)
$$y = \left(\frac{9\mu c^2}{2P}x^2\right)^{1/3}, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Bemerkung. Ist $P(\tau_0) = 0$ (also auch $Q(\tau_0) = 0$), dann muss die Weltlinie für $\tau = \tau_0$ statt des Systems (25) die Gleichung $\frac{\mathrm{d}i_1^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = 0$ erfüllen; aus den Gleichungen (39) ist leicht zu ersehen, dass diese Gleichung wirklich erfüllt ist. Die Gleichungen (39) beschreiben also die Weltlinie, die einer stetigen und nichtnegativen (nicht nur positiven) Funktion $P = Q$ entspricht.

Zusammenfassung. *Ist $R = 0$, $P = Q$, dann entsprechen einer stetigen und nichtnegativen Funktion P die Weltlinien, die man in einem passend gewählten inertialen Systeme durch die Gleichungen* (39) *beschreiben kann; wenn P konstant ist, kann man diese Gleichungen durch passende Wahl des Ursprungs der Zeitraumkoordinaten auf die Form* (40) *vereinfachen. Die Trajektorie der Bewegung ist dann die semikubische Parabel* (41). *Alle möglichen Weltlinien, die gegebenem P entsprechen, bekommt man also aus den Gleichungen* (39) (*resp.* (40) *im Falle, dass P konstant ist*) *durch Lorentzsche Transformationen.*

B) $q > 1$.

Es handelt sich um den Fall $Q = qP$, wo q konstant und grösser als 1 ist. Bezeichnen wir

(42) $$\sqrt{(q^2 - 1)} = \lambda\,,$$

dann hat die Gleichung (27) die Funktionen 1, $\sin \lambda\sigma$, $\cos \lambda\sigma$ zum Fundamentalsystem, so dass

(43) $$j_1^\alpha(\sigma) = A^\alpha \sin \lambda\sigma + B^\alpha \cos \lambda\sigma + C^\alpha\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,.$$

In derselben Weise wie im Fall A) erzielt man durch passende Wahl des inertialen Systemes, dass

(44) $$A^3 = B^3 = C^3 = 0$$

(weil es sich um Bewegung in einer Ebene handelt),

(45) $$B^1 + C^1 = B^2 + C^2 = 0$$

(durch Überführung auf Geschwindigkeit gleich Null für $\tau = 0$),

(46) $$A^2 = 0$$

(durch Umdrehung der Raumkoordinatenachsen).

Die Bedingung (10) gibt

(47) $$B^4 + C^4 > 0\,.$$

Die Bedingung (14) sieht jetzt folgendermassen aus:

$$g_{\alpha\beta}(A^\alpha \sin \lambda\sigma + B^\alpha \cos \lambda\sigma + C^\alpha)(A^\beta \sin \lambda\sigma + B^\beta \cos \lambda\sigma + C^\beta) =$$
$$= g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \sin^2 \lambda\sigma + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \cos^2 \lambda\sigma + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \sin \lambda\sigma \cos \lambda\sigma +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta \sin \lambda\sigma + 2g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta \cos \lambda\sigma + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1 ,$$

oder

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \frac{1 - \cos 2\lambda\sigma}{2} + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \frac{1 + \cos 2\lambda\sigma}{2} + g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \sin 2\lambda\sigma +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta \sin \lambda\sigma + 2g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta \cos \lambda\sigma + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1 .$$

Daraus, wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen 1, $\sin \lambda\sigma$, $\cos \lambda\sigma$, $\sin 2\lambda\sigma$, $\cos 2\lambda\sigma$, folgt, dass

$$(48)\qquad g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta + \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta) = -1 ,$$
$$-g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 0 ,$$
$$g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta = 0 .$$

Aus der Gleichung (15) bekommen wir

$$g_{\alpha\beta}(\lambda A^\alpha \cos \lambda\sigma - \lambda B^\alpha \sin \lambda\sigma)(\lambda A^\beta \cos \lambda\sigma - \lambda B^\beta \sin \lambda\sigma) =$$
$$= \lambda^2(g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \cos^2 \lambda\sigma + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \sin^2 \lambda\sigma - 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \sin \lambda\sigma \cos \lambda\sigma) = 1 ,$$

oder (wegen (48))

$$(49)\qquad g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = \frac{1}{\lambda^2} .$$

Die Bedingungen (48) und (49) kann man also auf die Form

$$(50)\qquad g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = \frac{1}{\lambda^2}, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = \frac{1}{\lambda^2}, \quad g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1 - \frac{1}{\lambda^2},$$
$$g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta = 0$$

bringen. Wegen der Bedingungen (44) und (46) folgen aus den Gleichungen (50) und (45) acht Bedingungen für acht Konstanten:

$$(51)\qquad (A^1)^2 - c^2(A^4)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (B^1)^2 + (B^2)^2 - c^2(B^4)^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$
$$(C^1)^2 + (C^2)^2 - c^2(C^4)^2 = -1 - \frac{1}{\lambda^2}, \quad A^1B^1 - c^2A^4B^4 = 0 ,$$
$$A^1C^1 - c^2A^4C^4 = 0 , \quad B^1C^1 + B^2C^2 - c^2B^4C^4 = 0 ,$$
$$B^1 + C^1 = 0 , \quad B^2 + C^2 = 0 .$$

Addiert man die 4. und 5. Gleichung, bekommt man wegen der 7. Gleichung und der Bedingung (47) die Gleichung $A^4 = 0$; aus der ersten Gleichung folgt dann (nach eventueller Änderung der Orientierung der ersten Achse) $A^1 = 1/\lambda$ und aus der 4. und 5. Gleichung folgen die Relationen $B^1 = C^1 = 0$. Addiert man die 2. und 6. Gleichung und die 3. und 6. Gleichung, so bekommt man wegen der 8. Gleichung die Gleichungen

$$-c^2 B^4(B^4 + C^4) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad -c^2 C^4(B^4 + C^4) = -1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Wenn man diese zwei Gleichungen addiert, hat man leicht (wegen (47))

$$B^4 + C^4 = \frac{1}{c},$$

so dass

$$B^4 = -\frac{1}{c\lambda^2}, \quad C^4 = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Also (nach eventueller Änderung der Orientierung der zweiten Achse)

$$B^2 = -\frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2}, \quad C^2 = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2}.$$

Es ist also

$$j_1^1(\sigma) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\sigma, \quad j_1^2(\sigma) = -\frac{\sqrt{(\lambda^2+1)}}{\lambda^2}(\cos\lambda\sigma - 1),$$

$$j_1^4(\sigma) = -\frac{1}{c\lambda^2}(\cos\lambda\sigma - 1) + \frac{1}{c},$$

d.i.

$$i_1^1(\tau) = \frac{c}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right),$$

$$i_1^2(\tau) = c\,\frac{\sqrt{(\lambda^2+1)}}{\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\lambda}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\right),$$

$$i_1^4(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\lambda}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\right) + 1.$$

Weil $\lambda = (q^2 - 1)^{1/2} = (Q^2 - P^2)^{1/2}/P$ ist, bekommt man schliesslich (wenn man

x, y, z, t statt x^1, x^2, x^3, x^4 schreibt)

$$(52)\quad x(\tau) = \frac{c\,P(\tau)}{\sqrt{(Q^2(\tau) - P^2(\tau))}} \int_0^\tau \sin\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(Q^2(\varrho) - P^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + x_0\,,$$

$$y(\tau) = \frac{c\,P(\tau)\,Q(\tau)}{Q^2(\tau) - P^2(\tau)}\left[\tau - \int_0^\tau \cos\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(Q^2(\varrho) - P^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha\right] + y_0\,,$$

$$z(\tau) = 0\,,$$

$$t(\tau) = \frac{P^2(\tau)}{Q^2(\tau) - P^2(\tau)}\left[\tau - \int_0^\tau \cos\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(Q^2(\varrho) - P^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha\right] +$$
$$+ \tau + t_0\,.$$

Gehen wir jetzt zum inertialen System über, das sich in Bezug auf das bisherige mit der Geschwindigkeit $v = [0, c\,.\,P/Q, 0]$ bewegt. Dann ist

$$\beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{P^2}{Q^2}\right)^{-1/2} = Q(Q^2 - P^2)^{-1/2}$$

und

$$\bar{x} = x\,,\quad \bar{y} = y - \beta c\frac{P}{Q}t + (\beta - 1)\,y = Q(Q^2 - P^2)^{-1/2}\left(y - \frac{cP}{Q}t\right),$$

$$\bar{z} = z\,,\quad \bar{t} = \beta\left(t - \frac{1}{c^2}c\frac{P}{Q}y\right) = Q(Q^2 - P^2)^{-1/2}\left(t - \frac{P}{cQ}y\right).$$

Ändern wir noch nachträglich die Orientierung der zweiten Raumachse und lassen wieder wegen der Einfachheit die Streifen über den Veränderlichen x, y, z, t so wie über den Konstanten x_0, y_0, t_0 aus, haben wir

$$(53)\quad x(\tau) = \frac{c\,P(\tau)}{\sqrt{(Q^2(\tau) - P^2(\tau))}} \int_0^\tau \sin\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(Q^2(\varrho) - P^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + x_0\,,$$

$$y(\tau) = \frac{c\,P(\tau)}{\sqrt{(Q^2(\tau) - P^2(\tau))}} \int_0^\tau \cos\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(Q^2(\varrho) - P^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + y_0\,,$$

$$z(\tau) = 0\,,$$

$$t(\tau) = \frac{Q(\tau)}{\sqrt{(Q^2(\tau) - P^2(\tau))}}\,\tau + t_0\,.$$

Speziell im Falle, dass P und Q konstant sind, (ändern wir noch die Orientierung der x-Achse und wählen wir den Ursprung des Zeitraumkoordinatensystems so, dass für $\tau = 0$, $y = z = t = 0$, $x = \mu c^2 P/(Q^2 - P^2)$ wäre), wird

(54)
$$x(\tau) = \frac{\mu c^2 P}{Q^2 - P^2} \cos\left(\frac{\sqrt{(Q^2 - P^2)}}{\mu c}\tau\right),$$
$$y(\tau) = \frac{\mu c^2 P}{Q^2 - P^2} \sin\left(\frac{\sqrt{(Q^2 - P^2)}}{\mu c}\tau\right),$$
$$z(\tau) = 0,$$
$$t(\tau) = \frac{Q}{\sqrt{(Q^2 - P^2)}}\tau .$$

Scheiden wir τ aus den zwei ersten Gleichungen aus, bekommen wir die Trajektorie unserer Bewegung in der x, y-Ebene

$$x^2 + y^2 = \frac{\mu^2 c^4 P^2}{(Q^2 - P^2)^2},$$

weil dann $t = \dfrac{Q}{\sqrt{(Q^2 - P^2)}}\tau$ ist, sehen wir gleich, dass es sich um gleichmässige Bewegung auf der Kreislinie des Halbmessers $\mu c^2 P/(Q^2 - P^2)$ mit der Periode $2\pi\mu c Q(Q^2 - P^2)$ und der Geschwindigkeit $v = c \,.\, P/Q$ handelt.

Bemerkung. Setzen wir nur voraus, dass $Q(\tau) = q\, P(\tau)$ ist, wo q konstant, $q > 1$ ist. Dann kann man den Definitionsbereich der konstanten Funktion $q = Q(\tau)/P(\tau)$ auf Grunde der Stetigkeit auch auf die Punkte erweitern, in den $P(\tau) = 0$ ist. Dann:

1. Die Bedingung, dass q positiv und differenzierbar ist, ist selbstverständlich erfüllt.

2. Den Definitionsbereich der Funktionen in (53) kann man auch auf die Punkte erweitern, wo $P(\tau) = 0$ (auf Grund der Stetigkeit) und die so erweiterten Funktionen werden offensichtlich differenzierbar für alle τ sein und das Gleichungssystem (3) erfüllen.

Von hier bekommen wir auf Grund des Satzes von der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Systems linearer Differenzialgleichungen mit stetigen Koeffizienten:

Zusammenfassung. *Wenn $R = 0$, $Q = qP$ ist, wo q konstant, $q > 1$ ist, dann entsprechen einer stetigen und nichtnegativen Funktion P die Weltlinien, die man im passend gewählten inertialen Koordinatensysteme durch die Gleichungen* (53) *beschreiben kann; im Falle, dass P konstant ist, kann man diese Gleichungen durch passende Wahl des Ursprungs des Zeitraumkoordinatensystems auf die Form* (54) *vereinfachen, d.h. auf Gleichungen, die gleichmässige Kreisbewegung ausdrücken. Alle möglichen Weltlinien, die gegebenen P entsprechen, bekommt man also aus den Gleichungen* (53) *(resp.* (54) *im Falle, dass P konstant ist) durch Lorentzsche Tranformationen.*

C) $q < 1$.

Es handelt sich um den Fall $Q = qP$, wo q eine positive Konstante kleiner als 1 ist. Bezeichnet man

$$\sqrt{(1 - q^2)} = \lambda \,, \tag{55}$$

dann hat die Gleichung (27) das Fundamentalsystem 1, $\sinh \lambda\sigma$, $\cosh \lambda\sigma$, so dass die Lösung die Form

$$j_1^\alpha(\sigma) = A^\alpha \sinh \lambda\sigma + B^\alpha \cosh \lambda\sigma + C^\alpha \,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \tag{56}$$

hat. Ganz auf dieselbe Weise wie im Falle **A)** und **B)** erreichen wir durch passende Wahl des inertialen Systems das, dass

$$A^3 = B^3 = C^3 = 0 \,, \tag{57}$$

$$B^1 + C^1 = B^2 + C^2 = 0 \,, \tag{58}$$

$$A^2 = 0 \,, \tag{59}$$

bei der Bedingung, dass

$$B^4 + C^4 > 0 \,. \tag{60}$$

Die Bedingung (14) heisst jetzt

$$g_{\alpha\beta}(A^\alpha \sinh \lambda\sigma + B^\alpha \cosh \lambda\sigma + C^\alpha)(A^\beta \sinh \lambda\sigma + B^\beta \cosh \lambda\sigma + C^\beta) =$$
$$= g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \frac{\cosh 2\lambda\sigma - 1}{2} + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \frac{\cosh 2\lambda\sigma + 1}{2} + g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \sinh 2\lambda\sigma +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta \sinh \lambda\sigma + 2g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta \cosh \lambda\sigma + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen 1, $\sinh \lambda\sigma$, $\cosh \lambda\sigma$, $\sinh 2\lambda\sigma$, $\cosh 2\lambda\sigma$ folgt

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta - g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta) + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1 \,, \\ g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 0 \,, \\ g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0 \,, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = 0 \,, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 0 \,. \end{gathered} \tag{61}$$

Aus der Bedingung (15) bekommt man

$$g_{\alpha\beta}(\lambda A^\alpha \cosh \lambda\sigma + \lambda B^\alpha \sinh \lambda\sigma)(\lambda A^\beta \cosh \lambda\sigma + \lambda B^\beta \sinh \lambda\sigma) =$$
$$= \lambda^2(g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta \cosh^2 \lambda\sigma + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta \sinh^2 \lambda\sigma + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta \sinh \lambda\sigma \cosh \lambda\sigma) = 1 \,,$$

oder (wegen (61))

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = \frac{1}{\lambda^2} \,. \tag{62}$$

Die Bedingungen (61) und (62) kann man auf die Form

$$
(63) \qquad g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = \frac{1}{\lambda^2}, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = -1 + \frac{1}{\lambda^2},
$$
$$
g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0, \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = 0, \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta = 0
$$

regeln. Wegen der Bedingungen (57) und (59) folgen aus den Gleichungen (63) und (58) acht Gleichungen für acht Konstanten:

$$
(64) \qquad (A^1)^2 - c^2(A^4)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (B^1)^2 + (B^2)^2 - c^2(B^4)^2 = -\frac{1}{\lambda^2},
$$
$$
(C^1)^2 + (C^2)^2 - c^2(C^4)^2 = -1 + \frac{1}{\lambda^2}, \quad A^1B^1 - c^2A^4B^4 = 0,
$$
$$
A^1C^1 - c^2A^4C^4 = 0, \quad B^1C^1 + B^2C^2 - c^2B^4C^4 = 0,
$$
$$
B^1 + C^1 = 0, \quad B^2 + C^2 = 0.
$$

Addiert man die 4. und 5. Gleichung, bekommt man wegen der 7. Gleichung und der Bedingung (60) die Gleichung $A^4 = 0$, aus der 1. Gleichung folgt dann (nach eventueller Änderung der Orientierung der ersten Achse) $A^1 = 1/\lambda$ und aus der 4. und 5. Gleichung folgt $B^1 = C^1 = 0$. Addiert man die 2. und die 6. Gleichung und die 3. und die 6. Gleichung, so bekommt man wegen der 8. Gleichung die Gleichungen

$$
-c^2 B^4(B^4 + C^4) = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad -c^2 C^4(B^4 + C^4) = -1 + \frac{1}{\lambda^2}.
$$

Wenn man diese zwei Gleichungen addiert, hat man leicht (wegen (60))

$$
B^4 + C^4 = \frac{1}{c},
$$

so dass

$$
B^4 = \frac{1}{c\lambda^2}, \quad C^4 = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right).
$$

Also (nach eventueller Änderung der Orientierung der zweiten Achse)

$$
B^2 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)^{1/2}, \quad C^2 = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)^{1/2}.
$$

Es ist also

$$
j_1^1(\sigma) = \frac{1}{\lambda}\sinh \lambda\sigma, \quad j_1^2(\sigma) = \frac{\sqrt{(1-\lambda^2)}}{\lambda^2}(\cosh \lambda\sigma - 1),
$$
$$
j_1^4(\sigma) = \frac{1}{c\lambda^2}(\cosh \lambda\sigma - 1) + \frac{1}{c},
$$

d.i.

$$i_1^1(\tau) = \frac{c}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right),$$

$$i_1^2(\tau) = c\,\frac{\sqrt{(1-\lambda^2)}}{\lambda^2}\left[\cosh\left(\frac{\lambda}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right) - 1\right],$$

$$i_1^4(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\cosh\left(\frac{\lambda}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right) - 1\right] + 1\,.$$

Weil

$$\lambda = (1 - q^2)^{1/2} = \frac{1}{P}(P^2 - Q^2)^{1/2}$$

ist, bekommt man schliesslich (wenn man x, y, z, t statt x^1, x^2, x^3, x^4 schreibt)

$$(65)\qquad x(\tau) = \frac{c\,P(\tau)}{\sqrt{(P^2(\tau) - Q^2(\tau))}}\int_0^\tau \sinh\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(P^2(\varrho) - Q^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + x_0\,,$$

$$y(\tau) = \frac{c\,P(\tau)\,Q(\tau)}{P^2(\tau) - Q^2(\tau)}\left[\int_0^\tau \cosh\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(P^2(\varrho) - Q^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha - \tau\right] + y_0\,,$$

$$z(\tau) = 0\,,$$

$$t(\tau) = \frac{P^2(\tau)}{P^2(\tau) - Q^2(\tau)}\left[\int_0^\tau \cosh\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(P^2(\varrho) - Q^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha - \tau\right] + $$
$$+ \tau + t_0\,.$$

Gehen wir jetzt zum inertialen System über, das sich in Bezug auf das bisherige mit der Geschwindigkeit $v = [0, c\,.\,Q/P, 0]$ bewegt. Dann

$$\beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{Q^2}{P^2}\right)^{-1/2} = P(P^2 - Q^2)^{-1/2}$$

und

$$\bar{x} = x\,,\quad \bar{y} = y - \beta c\frac{Q}{P}\,t + (\beta - 1)\,y = P(P^2 - Q^2)^{-1/2}\left(y - c\frac{Q}{P}\,t\right),$$

$$\bar{z} = z\,,\quad \bar{t} = \beta\left(t - \frac{1}{c^2}\,c\frac{Q}{P}\,y\right) = P(P^2 - Q^2)^{-1/2}\left(t - \frac{Q}{cP}\,y\right).$$

Ändern wir noch die Orientierung der zweiten Raumachse und lassen wider einfachkeitshalber die Streifen über den Veränderlichen x, y, z, t so wie über den Konstanten x_0, y_0, t_0 aus, haben wir die Gleichungen

$$(66)\quad x(\tau) = \frac{c\,P(\tau)}{\sqrt{(P^2(\tau) - Q^2(\tau))}} \int_0^\tau \sinh\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\alpha [\sqrt{(P^2(\varrho) - Q^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + x_0\,,$$

$$y(\tau) = \frac{c\,Q(\tau)}{\sqrt{(P^2(\tau) - Q^2(\tau))}}\,\tau + y_0\,,$$

$$z(\tau) = 0\,,$$

$$t(\tau) = \frac{P(\tau)}{\sqrt{(P^2(\tau) - Q^2(\tau))}} \int_0^\tau \cosh\left(\frac{1}{\mu c}\int_0^\tau [\sqrt{(P^2(\varrho) - Q^2(\varrho))}]\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + t_0\,.$$

Speziell im Falle, dass P und Q konstant sind (wählen wir noch den Ursprung des Zeitraumkoordinatensystems so, dass für $\tau = 0$ wäre $y = z = t = 0$, $x = \mu c^2 P/(P^2 - Q^2)$), wird

$$(67)\quad x(\tau) = \frac{\mu c^2 P}{P^2 - Q^2}\cosh\left(\frac{\sqrt{(P^2 - Q^2)}}{\mu c}\,\tau\right),$$

$$y(\tau) = \frac{cQ}{\sqrt{(P^2 - Q^2)}}\,\tau\,,$$

$$z(\tau) = 0\,,$$

$$t(\tau) = \frac{\mu c P}{P^2 - Q^2}\sinh\left(\frac{\sqrt{(P^2 - Q^2)}}{\mu c}\,\tau\right).$$

Scheiden wir τ aus den zwei ersten Gleichungen aus, bekommen wir die Trajektorie unserer Bewegung in der x, y-Ebene

$$x = \frac{\mu c^2 P}{P^2 - Q^2}\cosh\left(\frac{P^2 - Q^2}{\mu c^2 Q}\,y\right).$$

Die Abhängigkeit zwischen x und t gibt die Relation

$$x^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{\mu c^2 P}{P^2 - Q^2}\right)^2,$$

d.i.

$$(68)\quad x = c\sqrt{\left[\left(\frac{\mu c P}{P^2 - Q^2}\right)^2 + t^2\right]},$$

was eine ähnliche Relation, wie im Falle $Q = 0$ ist (vergleiche (24)). In diesem Falle handelt es sich also um Bewegung auf einer Kurve exponentialen Charakters.

Bemerkung. Setzen wir nur voraus, dass $Q(\tau) = q\,P(\tau)$ ist, wo q eine nicht negative Konstante, kleiner als 1 ist. Dann kann man den Definitionsbereich der konstanten Funktion $q = Q(\tau)/P(\tau)$ auf Grund der Stetigkeit auch auf die Punkte erweitern, in den $P(\tau) = 0$ ist. Dann:

1. Die Bedingung, dass q differenzierbar ist, ist offensichtlich erfüllt. Ist $q = 0$, d.i. $Q = 0$, bekommt man aus den Gleichungen (66) die Gleichungen (21), d.i. der Fall I. ist in diesem Falle enthalten.

2. Den Definitionsbereich der Funktionen in (66) kann man auf Grund der Stetigkeit auch auf die Punkte erweitern, in den $P(\tau) = 0$, die so erweiterten Funktionen werden offensichtlich für alle τ differenzierbar sein und das System der Differrenzialgleichungen (3) erfüllen.

Deshalb haben wir insgesamt (analog wie in B)):

Zusammenfassung. *Ist $R = 0$, $Q = qP$, wo q eine nichtnegative Konstante, $q < 1$ ist, entsprechen einer gegebenen stetigen und nichtnegativen Funktion P die Weltlinien, die man im passend gewählten inertialen Koordinatensysteme durch die Gleichungen (66) beschreiben kann. Im Falle, dass P konstant ist, kann man diese Gleichungen durch passende Wahl des Ursprungs des Zeitraumkoordinatensystems auf die Form (67) vereinfachen; die Trajektorie dieser Bewegung (im Falle $q > 0$) is eine Kurve exponentialen Charakters. Alle möglichen Weltlinien, die gegebenem P entsprechen, bekommt man also aus den Gleichungen (66) (resp. (67) im Falle, dass P konstant ist) durch Lorentzsche Transformationen.*

III. Der allgemeine Fall.

Von den Funktionen q, r machen wir noch weitere Voraussetzungen, nämlich dass sie positiv sind und dass r die erste und q die zweite Ableitung für alle τ hat. Differenziert man die 3. Gleichung in (13), bekommt man

$$\frac{d^2 j_3^\alpha}{d\sigma^2} = -q' j_2^\alpha - q\,\frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} + r' j_4^\alpha + r\,\frac{dj_4^\alpha}{d\sigma}\,.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit r und addiert dazu die 3. Gleichung aus (13) multipliziert mit $-r'$ und die 4. Gleichung aus (13) multipliziert mit r^2, bekommt man

$$r\,\frac{d^2 j_3^\alpha}{d\sigma^2} - r'\,\frac{dj_3^\alpha}{d\sigma} = (qr' - q'r)\,j_2^\alpha - qr\,\frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} - r^3 j_3^\alpha\,. \tag{69}$$

Aus der 2. Gleichung in (13) folgt durch zweifaches Differenzieren

$$\frac{d^2 j_2^\alpha}{d\sigma^2} = \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + q' j_3^\alpha + q\,\frac{dj_3^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{70}$$

$$\frac{d^3 j_2^\alpha}{d\sigma^3} = \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + q'' j_3^\alpha + 2q'\,\frac{dj_3^\alpha}{d\sigma} + q\,\frac{d^2 j_3^\alpha}{d\sigma^2}\,.$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit r, die Gleichung (69) mit q und addieren wir die entstandenen Gleichungen zusammen:

$$-qr' \frac{dj_3^\alpha}{d\sigma} + r \frac{d^3 j_2^\alpha}{d\sigma^3} = q(qr' - q'r)\, j_2^\alpha - q^2 r \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} - qr^3 j_3^\alpha + r \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +$$

$$+ rg'' j_3^\alpha + 2g'r \frac{dj_3^\alpha}{d\sigma}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit q, die Gleichung (70) mit $-(2q'r + qr')$ und addieren wir; wir haben

$$qr \frac{d^3 j_2^\alpha}{d\sigma^3} - (2q'r + qr') \frac{d^2 j_2^\alpha}{d\sigma^2} = q'(qr' - q'r)\, j_2^\alpha - q^3 r \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} - q^2 r^3 j_3^\alpha +$$

$$+ qr \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + qq'' r j_3^\alpha - (2q'r + qr') \left(\frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + q' j_3^\alpha \right),$$

oder

$$qr \frac{d^3 j_2^\alpha}{d\sigma^3} - (2q'r + qr') \frac{d^2 j_2^\alpha}{d\sigma^2} + q^3 r \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} + q^2 (q'r - qr')\, j_2^\alpha =$$

$$= qr \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - (2q'r + qr') \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} - [q^2 r^3 - qq'' r + q'(2q'r + qr')]\, j_3^\alpha .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit q, die 2. Gleichung aus (13) mit $q^2 r^3 - qq'' r + q'(2q'r + qr')$ und addieren wir, bekommen wir

$$q^2 r \frac{d^3 j_2^\alpha}{d\sigma^3} - q(2q'r + qr') \frac{d^2 j_2^\alpha}{d\sigma^2} + [q^4 r + q^2 r^3 - qq'' r + q'(2q'r + qr')] \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} +$$

$$+ q^3 (q'r - qr')\, j_2^\alpha = q^2 r \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - q(2q'r + qr') \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} +$$

$$+ [q^2 r^3 - qq'' r + q'(2q'r + qr')]\, j_1^\alpha .$$

Bedienen wir uns jetzt der 1. Gleichung aus (13) und der Gleichungen, die aus derselben durch Differenzieren folgen, können wir j_2^α beseitigen und für j_1^α die Differenzialgleichung vierter Ordnung bekommen:

$$q^2 r \frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - q(2q'r + qr') \frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} + [q^2\, r(q^2 + r^2 - 1) + q'(2q'r + qr') -$$

$$- qq'' r] \frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + [q^3 (q'r - qr') + q(2q'r + qr')] \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} -$$

$$- [q^2 r^3 - qq'' r + q'(2q'r + qr')]\, j_1^\alpha = 0 ,$$

d.i.

$$(71)\quad \frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - \left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} + \left[q^2 + r^2 - 1 - \frac{q''}{q} + \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right]\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +$$
$$+ \left[q^2\left(\frac{q'}{q} - \frac{r'}{r}\right) + 2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right]\frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} - \left[r^2 - \frac{q''}{q} + \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right]j_1^\alpha = 0\,.$$

Speziell im Falle, dass q und r konstant sind, haben wir

$$(72)\qquad \frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} + (q^2 + r^2 - 1)\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - r^2 j_1^\alpha = 0\,,$$

was eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist. Lösen wir weiter den Fall, wenn q und r konstant ist.

Bezeichenen wir

$$(73)\qquad a = q^2 + r^2 - 1\,,\quad b = r^2\,,$$

$$(74)\qquad \delta = [\tfrac{1}{2}(a + (a^2 + 4b)^{1/2})]^{1/2}\,,\quad \gamma = [\tfrac{1}{2}(-a + (a^2 + 4b)^{1/2})]^{1/2}\,,$$

dann sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die der Gleichung (72) zukommt, $\pm\gamma \pm i\delta$. Die Gleichung (72) hat also z.B. dieses Fundamentalsystem

$$\sin\delta\sigma\,,\quad \cos\delta\sigma\,,\quad \sinh\gamma\sigma\,,\quad \cosh\gamma\sigma\,,$$

so dass ihre Lösung die Form

$$(75)\qquad j_1^\alpha(\sigma) = A^\alpha \sinh\gamma\sigma + B^\alpha\cosh\gamma\sigma + C^\alpha\sin\delta\sigma + D^\alpha\cos\delta\sigma$$

hat.

Stellen wir zuerst fest, was uns die Bedingung (14) liefert:

$$g_{\alpha\beta}(A^\alpha\sinh\gamma\sigma + B^\alpha\cosh\gamma\sigma + C^\alpha\sin\delta\sigma + D^\alpha\cos\delta\sigma)(A^\beta\sinh\gamma\sigma +$$
$$+ B^\beta\cosh\gamma\sigma + C^\beta\sin\delta\sigma + D^\beta\cos\delta\sigma) = g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta\sinh^2\gamma\sigma +$$
$$+ g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta\cosh^2\gamma\sigma + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta\sinh\gamma\sigma\cosh\gamma\sigma + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta\sin^2\delta\sigma +$$
$$+ g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta\cos^2\delta\sigma + 2g_{\alpha\beta}C^\alpha D^\beta\sin\delta\sigma\cos\delta\sigma + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta\sinh\gamma\sigma\sin\delta\sigma +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta\sinh\gamma\sigma\cos\delta\sigma + 2g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta\cosh\gamma\sigma\sin\delta\sigma +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta\cosh\gamma\sigma\cos\delta\sigma = -1\,,$$

oder

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta(e^{2\gamma\sigma} + e^{-2\gamma\sigma} - 2) + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta(e^{2\gamma\sigma} + e^{-2\gamma\sigma} + 2) +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta(e^{2\gamma\sigma} - e^{-2\gamma\sigma}) - g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta(e^{2i\delta\sigma} + e^{-2i\delta\sigma} - 2) +$$
$$+ g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta(e^{2i\delta\sigma} + e^{-2i\delta\sigma} + 2) - 2ig_{\alpha\beta}C^\alpha D^\beta(e^{2i\delta\sigma} - e^{-2i\delta\sigma}) -$$
$$- 2ig_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta(e^{(\gamma+i\delta)\sigma} - e^{(\gamma-i\delta)\sigma} - e^{(-\gamma+i\delta)\sigma} + e^{(-\gamma-i\delta)\sigma}) +$$

$$+ 2g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta\left(e^{(\gamma+i\delta)\sigma} + e^{(\gamma-i\delta)\sigma} - e^{(-\gamma+i\delta)\sigma} - e^{(-\gamma-i\delta)\sigma}\right) -$$
$$- 2ig_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta\left(e^{(\gamma+i\delta)\sigma} - e^{(\gamma-i\delta)\sigma} + e^{(-\gamma+i\delta)\sigma} - e^{(-\gamma-i\delta)\sigma}\right) +$$
$$+ 2g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta\left(e^{(\gamma+i\delta)\sigma} + e^{(\gamma-i\delta)\sigma} + e^{(-\gamma+i\delta)\sigma} + e^{(-\gamma-i\delta)\sigma}\right) = -4 .$$

Die Zahlen 0, 2γ, -2γ, $2i\delta$, $-2i\delta$, $\gamma + i\delta$, $\gamma - i\delta$, $-\gamma + i\delta$, $-\gamma - i\delta$ sind alle verschieden (weil $\gamma > 0$, $\delta > 0$ ist) und deswegen sind die Funktionen 1, $e^{2\gamma\sigma}$, $e^{-2\gamma\sigma}$, $e^{2i\delta\sigma}$, $e^{-2i\delta\sigma}$, $e^{(\gamma+i\delta)\sigma}$, $e^{(\gamma+i\delta)\sigma}$, $e^{(-\gamma+i\delta)\sigma}$, $e^{(-\gamma-i\delta)\sigma}$ linear unabhängig, so dass

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta + 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta &= 0 ,\\
g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta - 2g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta &= 0 ,\\
-g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta + g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta - 2ig_{\alpha\beta}C^\alpha D^\beta &= 0 ,\\
-g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta + g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta + 2ig_{\alpha\beta}C^\alpha D^\beta &= 0 ,\\
-g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta + g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta + g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta &= -2 ,\\
g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta - ig_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta - ig_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta &= 0 ,\\
g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta + ig_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta + ig_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta &= 0 ,\\
-g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta + ig_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta - ig_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta &= 0 ,\\
-g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta - ig_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta + ig_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta &= 0 .
\end{aligned}$$

Von hier bekommt man

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha C^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}A^\alpha D^\beta = 0 ,\\
&g_{\alpha\beta}B^\alpha C^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha D^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}C^\alpha D^\beta = 0 ,
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = 0 , \quad g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta - g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta = 0 ,\\
&g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta - g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = 1 .
\end{aligned} \tag{77}$$

Aus der Bedingung (15) folgt (mit Berücksichtigung der Gleichungen (76) und (77))

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}(\gamma A^\alpha \cosh\gamma\sigma + \gamma B^\alpha \sinh\gamma\sigma + \delta C^\alpha \cos\delta\sigma - \delta D^\alpha \sin\delta\sigma) \,.\\
&.\,(\gamma A^\beta \cosh\gamma\sigma + \gamma B^\beta \sinh\gamma\sigma + \delta C^\beta \cos\delta\sigma - \delta D^\beta \sin\delta\sigma) =\\
&= \gamma^2 g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta(\cosh^2\gamma\sigma - \sinh^2\gamma\sigma) + \delta^2 g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta(\cos^2\delta\sigma + \sin^2\delta\sigma) = 1 ,
\end{aligned}$$

d.i.

$$\gamma^2 g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta + \delta^2 g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = 1 .$$

Von hier und aus den Bedingungen (77) bekommt man

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = \frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2} , \quad g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = -\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2} ,\\
&g_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2} , \quad g_{\alpha\beta}D^\alpha D^\beta = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2} .
\end{aligned} \tag{78}$$

Es mag die Geschwindigkeit der Bewegung in der Zeit x^4, die dem Wert der Eigenzeit $\tau = 0$ entspricht, gleich $v = [v_1, v_2, v_3]$ sein. Wenn wir mittels der Lorentzschen Transformationen zum System, das sich in Bezug auf das bisherige mit der Geschwindigkeit v bewegt, übergehen, dann wird die Geschwindigkeit unserer Bewegung in der Zeit, die dem Werte $\tau = 0$ entspricht, gleich Null sein, d.h.

$$B^1 + D^1 = B^2 + D^2 = B^3 + D^3 = 0\,. \tag{79}$$

Die Bedingung (10) gibt uns für $\tau = 0$ die Ungleichung

$$B^4 + D^4 > 0\,. \tag{80}$$

Jetzt machen wir noch eine solche Umdrehung der Raumachsen (eine orthogonale Transformation), dass

$$A^2 = A^3 = B^3 = 0 \tag{81}$$

ist. Beweisen wir, dass eine solche Transformation existiert: Es mag

$$\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x^j\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

sein, wobei

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} a_{jk} = \delta_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,. \tag*{$(82)_{i,k}$}$$

Die Bedingungen (81) bedeuten, dass

$$\sum_{j=1}^{3} a_{2j} A^j = 0\,, \tag{83}$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{3j} A^j = 0\,, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{3j} B^j = 0 \tag{84}$$

ist. Die Gleichungen (84) haben eine nicht triviale Lösung a_{31}, a_{32}, a_{33}, die man noch der normierenden Bedingung $(83)_{3,3}$ unterwerten kann. Die Gleichungen (83) und $(82)_{2,3}$ haben wieder eine Lösung a_{21}, a_{22}, a_{23}, die noch die normierende Bedingung $(82)_{2,2}$ erfüllt; ebenso auch die Gleichungen $(82)_{1,2}$ und $(82)_{1,3}$ haben eine Lösung a_{11}, a_{12}, a_{13}, welche die normierende Bedingung $(82)_{1,1}$ erfüllt. Wir haben so die Koeffizienten der orthogonalen Transformation gefunden (weil $(82)_{i,k}$ für alle $i, k = 1, 2, 3$ gültig ist), sodass noch (83) und (84) gilt, also die Gleichung (81) findet statt.

Wegen der Bedingungen (81) bilden die Gleichungen (76), (78) und (79) ein System von 13 Gleichungen für 13 gesuchte Konstanten:

$$A^1B^1 - c^2A^4B^4 = 0\,, \quad A^1C^1 - c^2A^4C^4 = 0\,, \quad A^1D^1 - c^2A^4D^4 = 0\,,$$

$$B^1C^1 + B^2C^2 - c^2B^4C^4 = 0\,, \quad B^1D^1 + D^2B^2 - c^2B^4D^4 = 0\,,$$

$$C^1D^1 + C^2D^2 + C^3D^3 - c^2C^4D^4 = 0\,, \quad (A^1)^2 - c^2(A^4)^2 = \frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}\,,$$

$$(B^1)^2 + (B^2)^2 - c^2(B^4)^2 = -\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}\,,$$

$$(C^1)^2 + (C^2)^2 + (C^3)^2 - c^2(C^4)^2 = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\,,$$

$$(D^1)^2 + (D^2)^2 + (D^3)^2 - c^2(D^4)^2 = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\,, \quad B^1 + D^1 = 0\,,$$

$$B^2 + D^2 = 0\,, \quad D^3 = 0\,.$$

Addiert man die 1. und 3. Gleichung, sieht man, dass (wegen (80)) $A^4 = 0$ sein muss. Aus der 7. Gleichung folgt dann (nach eventueller Änderung der Orientierung der ersten Achse) $A^1 = [(1+\delta^2)/(\gamma^2+\delta^2)]^{1/2}$ und aus der 1., 2. und 3. Gleichung folgt $B^1 = C^1 = D^1 = 0$. Addiert man die 4. und 6. Gleichung, bekommt man wegen der 12. Gleichung und der Bedingung (80) $C^4 = 0$. Aus der 9. Gleichung folgt dann, dass die rechte Seite der 10. Gleichung positiv ist, also $D^2 \neq 0$, und deswegen folgt aus der 6. Gleichung $C^2 = 0$. Aus der 9. Gleichung hat man also (nach eventueller Änderung der Orientierung der dritten Achse) $C^3 = [(1-\gamma^2) : :(\gamma^2+\delta^2)]^{1/2}$. Addiert man die 5. und 8. Gleichung und die 5. und 10. Gleichung bekommt man wegen der 12. Gleichung die Gleichungen

$$-c^2\,B^4(B^4 + D^4) = -\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}\,, \quad -c^2\,D^4(B^4 + D^4) = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\,,$$

woraus durch Addieren (wegen der Bedingung (80)) folgt

$$B^4 + D^4 = \frac{1}{c}$$

sodass

$$B^4 = \frac{1}{c}\,\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}\,, \quad D^4 = -\frac{1}{c}\,\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\,.$$

Also (nach eventueller Änderung der Orientierung der zweiten Achse)

$$B^2 = \frac{(1-\gamma^2)^{1/2}\,(1+\delta^2)^{1/2}}{\gamma^2+\delta^2}\,, \quad D^2 = -\frac{(1-\gamma^2)^{1/2}\,(1+\delta^2)^{1/2}}{\gamma^2+\delta^2}\,.$$

Es ist also

$$j_1^1(\sigma) = \left(\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}\right)^{1/2} \sinh \gamma\sigma \,,$$

$$j_1^2(\sigma) = \frac{[(1-\gamma^2)(1+\delta^2)]^{1/2}}{\gamma^2+\delta^2}(\cosh \gamma\sigma - \cos \delta\sigma) \,,$$

$$j_1^3(\sigma) = \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\right)^{1/2} \sin \delta\sigma \,,$$

$$j_1^4(\sigma) = \frac{1}{c}\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}(\cos \gamma\sigma - \cos \delta\sigma) + \frac{1}{c}\cos \delta\sigma \,.$$

Zum Vereinfachen bezeichnen wir

$$\kappa = \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\right)^{1/2}, \quad \lambda = \left(\frac{1+\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}\right)^{1/2}; \tag{85}$$

dann ist

$$i_1^1(\tau) = c\lambda \sinh(\gamma\,\sigma(\tau)) \,,$$

$$i_1^2(\tau) = c\kappa\lambda[\cosh(\gamma\,\sigma(\tau)) - \cos(\delta\sigma(\tau))] \,,$$

$$i_1^3(\tau) = c\kappa \sin(\delta\,\sigma(\tau)) \,,$$

$$i_1^4(\tau) = \lambda^2[\cosh(\gamma\sigma(\tau)) - \cos(\delta\sigma(\tau))] + \cos(\delta\sigma(\tau)) \,.$$

Wir bekommen so (wenn wir x, y, z, t statt x^1, x^1, x^3, x^4 schreiben)

$$x(\tau) = c\lambda \int_0^\tau \sinh\left(\frac{\gamma}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + x_0 \,, \tag{86}$$

$$y(\tau) = c\kappa\lambda \int_0^\tau \left[\cosh\left(\frac{\gamma}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right) - \cos\left(\frac{\delta}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\right]\mathrm{d}\alpha + y_0 \,,$$

$$z(\tau) = c\kappa \int_0^\tau \sin\left(\frac{\delta}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + z_0 \,,$$

$$t(\tau) = \lambda^2 \int_0^\tau \left[\cosh\left(\frac{\gamma}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right) - \cos\left(\frac{\delta}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\right]\mathrm{d}\alpha +$$
$$+ \int_0^\tau \cos\left(\frac{\delta}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + t_0 \,.$$

Gehen wir jetzt zum inertialen System, das sich in Bezug auf das bisherige mit der Geschwindigkeit $v = [0, c \,.\, \kappa/\lambda, 0]$ bewegt, über. ($|v| < c$, weil $0 < \kappa < \lambda$).

Dann ist

$$\beta = \left(1 - \frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1 + \delta^2}{\gamma^2 + \delta^2}\right)^{1/2} = \lambda$$

und also

$$\bar{x} = x\,, \quad \bar{y} = y - \beta c \frac{\kappa}{\lambda} t + (\beta - 1)\, y = \lambda y - c\kappa t\,,$$

$$\bar{z} = z\,, \quad \bar{t} = \beta\left(t - \frac{1}{c^2} c \frac{\kappa}{\lambda} y\right) = \lambda t - \frac{\kappa}{c} y\,.$$

Wir bekommen so (wenn wir wieder einfachkeitshalber die Streifen über den Veränderlichen so wie über den Konstanten weglassen und nachträglich die Orientierung der zweiten Raumachse ändern):

(87)
$$x(\tau) = c\lambda \int_0^\tau \sinh\left(\frac{\gamma}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + x_0\,,$$

$$y(\tau) = c\kappa \int_0^\tau \cos\left(\frac{\delta}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + y_0\,,$$

$$z(\tau) = c\kappa \int_0^\tau \sin\left(\frac{\delta}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + z_0\,,$$

$$t(\tau) = \lambda \int_0^\tau \cosh\left(\frac{\gamma}{\mu c}\int_0^\alpha P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\alpha + t_0\,.$$

Speziell im Falle, dass P, Q und R konstant sind, bekommen wir (wenn wir noch die Orientierung der dritten Achse ändern und den Ursprung der Zeitraumkoordinaten so wählen, dass für $\tau = 0$ auch $y = t = 0$, $x = \mu c^2\lambda/\gamma P$, $z = \mu c^2\kappa/\delta P$ wäre):

(88)
$$x(\tau) = \frac{\mu c^2 \lambda}{\gamma P}\cosh\left(\frac{\gamma P}{\mu c}\tau\right),$$

$$y(\tau) = \frac{\mu c^2 \kappa}{\delta P}\sin\left(\frac{\delta P}{\mu c}\tau\right),$$

$$z(\tau) = \frac{\mu c^2 \kappa}{\delta P}\cos\left(\frac{\delta P}{\mu c}\tau\right),$$

$$t(\tau) = \frac{\mu c \lambda}{\gamma P}\sinh\left(\frac{\gamma P}{\mu c}\tau\right).$$

Eliminieren wir τ aus der 2. und 3. Gleichung, so bekommen wir die Projektion der Trajektorie unserer Bewegung in die y, z-Ebene

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{\mu c^2 \kappa}{\delta P}\right)^2,$$

was ein Kreis des Halbmessers $\mu c^2 \kappa / \delta P$ ist.

Eliminieren wir τ aus der 1. und 4. Gleichung, so bekommen wir gleich die Abhängigkeit der x-Koordinate von der Zeit

$$x^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{\mu c^2 \lambda}{\gamma P}\right)^2,$$

d.i.

(89)
$$x = c\sqrt{\left[\left(\frac{\mu c^2 \lambda}{\gamma P}\right)^2 + t^2\right]},$$

was eine ähnliche Relation wie im Falle $R = 0$, $Q > P$ ist (vergleiche (68)).

Bemerkung. Setzen wir nur voraus, dass $Q(\tau) = q\, P(\tau)$, $R(\tau) = r\, P(\tau)$ ist, wo q und r nichtnegative Konstanten sind, wobei aber nicht $q = 0$, $r \neq 0$ oder $r = 0$, $q = 1$ ist. Den Definitionsbereich der konstanten Funktionen $q = Q(\tau)/P(\tau)$, $r = R(\tau)/P(\tau)$ können wir auf Grund der Stetigkeit auch auf die Punkte, in welchen $P(\tau) = 0$ ist, erweitern. Dann:

1. Die Bedingung der Differenzierbarkeit der Funktionen q und r ist offensichtlich erfüllt. Ist $r = 0$, d.i. $R = 0$, so bekommt man aus den Gleichungen (87) Gleichungen, die sich praktisch nicht von den Gleichungen (53) resp. (66) unterscheiden, d.h. die Fälle II.B und II.C sind in den Gleichungen (87) enthalten. Ist nämlich $r = 0$, dann ist in (73) $a = q^2 - 1$, $b = 0$, also in (74) ist $\gamma = 0$, $\delta = (q^2 - 1)^{1/2}$ für $q > 1$ und $\delta = 0$, $\gamma = (1 - q^2)^{1/2}$ für $q < 1$.

Es ist deswegen in (85) im ersten Falle $\kappa = (q^2 - 1)^{-1/2}$, $\lambda = q(q^2 - 1)^{-1/2}$ und im zweiten Falle $\kappa = q(1 - q^2)^{-1/2}$, $\lambda = (1 - q^2)^{-1/2}$; wenn wir in die Gleichungen (87) einsetzen, sehen wir, dass die Behauptung gültig ist.

2. Den Definitionsbereich der Funktionen in (87) kann man dann auf Grund der Stetigkeit auch auf die Punkte erweitern, in den $P(\tau) = 0$ ist, und die so erweiterten Funktionen werden dann offensichtlich die Ableitung erster Ordnung für alle τ haben und das System der Differentialgleichung (3) erfüllen.

Wir haben deshalb insgesamt (analog. wie bei II.B, C):

Zusammenfassung. *Ist $Q = qP$, $R = rP$, wo q, r nichtnegative Konstanten sind (es ist aber nicht $q = 0$, $r \neq 0$ oder $r = 0$, $q = 1$), dann entsprechen einer gegebenen stetigen und nichtnegativen Funktion P die Weltlinien, die man im passend gewählten inertialen Koordinatensysteme durch die Gleichungen (87) beschreiben* *kann. Im Falle, dass P konstant ist, kann man diese Gleichungen durch passende Wahl des Ursprungs des Zeitraumkoordinatensystems auf die Form* (88) *vereinfachen; die Projektion der Trajektorie dieser Bewegung in die y, z-Ebene ist eine Kreislinie. Alle möglichen Weltlinien, die gegebenem P entsprechen, bekommt man aus den Gleichungen* (87) (*resp.* (88) *im Falle, dass P konstant ist*) *durch Lorentzsche Transformationen.*

Untersuchen wir noch, bei welchen Bedingungen für die Funktionen P, Q, R, die ihnen entsprechenden Weltlinien (1) auf der Hyperbelfläche

$$g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \xi^\alpha)(X^\beta - \xi^\beta) = \text{konst.} \tag{90}$$

liegen, wo ξ^α ein fest gegebener Punkt, X^α ein veränderlicher Punkt ist, d.i. wann die Gleichung

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)(x^\beta(\tau) - \xi^\beta) = \text{konst}. \tag{91}$$

für alle τ eines gewissen Intervalles I gilt. Werden wir den Punkt ξ^α kennen, dann wenn wir einen Wert τ wählen und in die Gleichung (91) einsetzen, so bestimmen wir den Wert der Konstante an der rechten Seite. Es handelt sich also nur darum, wie den Wert ξ^α festzustellen.

Wenn man die Gleichung (91) differenziert, bekommt man

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_1^\beta = 0\,. \tag{92}$$

Durch weiteres Differenzieren bekommt man mit Hilfe der Frenetschen Formeln (siehe (3))

$$g_{\alpha\beta} i_1^\alpha i_1^\beta + \frac{P}{\mu}\, g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_2^\beta = 0\,,$$

d.i.

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_2^\beta = \frac{\mu c^2}{P} \tag{93}$$

für $P(\tau) \neq 0$. Ist $P(\tau_0) = 0$, bekommt man

$$g_{\alpha\beta} i_1^\alpha i_1^\beta = 0\,,$$

was unmöglich ist. Also damit die Weltlinie auf der Fläche (90) liegen kann, muss $P(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in I$ sein.

Durch weiteres Differenzieren und Vereinfachung bekommt man

$$g_{\alpha\beta} i_1^\alpha i_2^\beta + \frac{P}{\mu c^2}\, g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_1^\beta + \frac{Q}{\mu c}\, g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_3^\beta = \mu c^2 \left(\frac{1}{P}\right)'\,;$$

was wegen (92) und der Orthogonalität der Vektoren i_1^α, i_2^α

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_3^\beta = \frac{\mu^2 c^3}{Q} \left(\frac{1}{P}\right)' \tag{94}$$

für $Q(\tau) \neq 0$ gibt. Für $Q(\tau_0) = 0$ hat man

$$\left(\frac{1}{P}\right)'\bigg|_{\tau=\tau_0} = 0\,,$$

also

(95) $$P'(\tau_0) = 0\,.$$

Durch nochmaliges Differenzieren und Vereinfachung hat man

$$g_{\alpha\beta} i_1^\alpha i_3^\beta - \frac{Q}{\mu c} g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_2^\beta + \frac{R}{\mu c} g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_4^\beta = \mu^2 c^3 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\,;$$

was wegen (93) und der Orthogonalität der Vektoren i_2^α, i_3^α

(96) $$g_{\alpha\beta}(x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha)\, i_4^\beta = \frac{\mu c^2}{R}\left\{\frac{Q}{P} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\right\}$$

für $R(\tau) \neq 0$ gibt. Für $R(\tau_0) = 0$ bekommt man

(97) $$\frac{Q}{P} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\bigg|_{\tau=\tau_0} = 0\,.$$

Setzen wir noch voraus, dass $P(\tau)\, Q(\tau)\, R(\tau) \neq 0$ für alle τ ist. Dann müssen die Gleichungen (92), (93), (94) und (95) erfüllt sein und aus diesen Gleichungen müssen wir ξ^α bestimmen. Weil die Vektoren i_1^α, i_2^α, i_3^α, i_4^α orthogonal, also auch linear unabhängig sind, können wir schreiben

(98) $$x^\alpha(\tau) - \xi^\alpha = A i_1^\alpha + B i_2^\alpha + C i_3^\alpha + D i_4^\alpha\,.$$

Von hier aus, wenn man auf diese Gleichung $g_{\alpha\beta} i_1^\beta$, $g_{\alpha\beta} i_2^\beta$, $g_{\alpha\beta} i_3^\beta$, $g_{\alpha\beta} i_4^\beta$ stufenweise anwendet, und aus den Gleichungen (92), (93), (94), (96) folgt, dass

$$0 = -Ac^2\,, \quad \frac{\mu c^2}{P} = B\,, \quad \frac{\mu^2 c^3}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)' = C\,,$$

$$\frac{\mu c^2}{R}\left\{\frac{Q}{P} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\right\} = D\,,$$

also

(99) $$\xi^\alpha = x^\alpha(\tau) - \frac{\mu c^2}{P(\tau)}\, i_2^\alpha(\tau) + \frac{\mu^2 c^3}{Q(\tau)}\left(\frac{1}{P(\tau)}\right)' i_3^\alpha(\tau) + \frac{\mu c^2}{R(\tau)}\left\{\frac{Q(\tau)}{P(\tau)} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q(\tau)}\left(\frac{1}{P(\tau)}\right)'\right]'\right\} i_4^\alpha\,.$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass ξ^α konstant ist, muss $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = 0$ sein, also:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = i_1^\alpha - \mu c^2 \left(\frac{1}{P}\right)' i_2^\alpha - \frac{\mu c^2}{P}\left(\frac{P}{\mu c^2} i_1^\alpha + \frac{Q}{\mu c} i_3^\alpha\right) + \mu^2 c^3 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]' i_3^\alpha +$$

$$+ \frac{\mu^2 c^3}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\left(-\frac{Q}{\mu c} i_2^\alpha + \frac{R}{\mu c} i_4^\alpha\right) + \mu c^2 \left\{\frac{1}{R}\left(\frac{Q}{P} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\right)\right\}' i_4^\alpha +$$

$$+ \frac{\mu c^2}{R}\left\{\frac{Q}{P} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\right\}\left(-\frac{R}{\mu c} i_3^\alpha\right) = 0\,.$$

Nach Vereinfachung bekommen wir die Bedingung

$$\frac{R}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)' + \left\{\frac{1}{R}\left(\frac{Q}{P} + \mu^2 c^2 \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{P}\right)'\right]'\right)\right\}' = 0\,. \tag{100}$$

Beachten wir noch speziell den Fall, dass P, Q, R konstant sind:

I. Ist $Q = 0$ (also auch $R = 0$), $P \neq 0$, dann ist die Bedingung (95) für alle τ erfüllt und die entsprechenden Weltlinien liegen immer auf der Fläche (90), denn aus der Gleichung (98), wenn man auf sie $g_{\alpha\beta} i_1^\beta$, $g_{\alpha\beta} i_2^\beta$ stufenweise aufwendet, mit Hilfe der Gleichungen (92) und (93) folgt: $0 = -Ac^2$, $\mu c^2/P = B$, C und D bleibt unbestimmt, wir können dafür z.B. Nullen wählen. Dann

$$\xi^\alpha = x^\alpha(\tau) - \frac{\mu c^2}{P} i_2^\alpha$$

und durch Differenzieren bekommt man

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = i_1^\alpha - \frac{\mu c^2}{P}\frac{P}{\mu c^2} i_1^\alpha = 0$$

und der gewählte Punkt ξ^α hängt von τ wirklich nicht ab.

II. Ist $R = 0$, $Q \neq 0$ (also auch $P \neq 0$), dann ist die Gleichung (97) der Gleichung $Q = 0$ äquivalent, was einen Widerspruch bildet. Also in diesem Falle kann keine Weltlinie auf keiner Fläche der Form (90) liegen.

III. Ist $R \neq 0$ (also auch $Q \neq 0$, $P \neq 0$), dann ist die Bedingung (100) erfüllt, d.i. ξ^α hängt von τ nicht ab, die Gleichung (99) gibt eindeutig

$$\xi^\alpha = x^\alpha(\tau) - \frac{\mu c^2}{P}\left(i_2^\alpha + \frac{Q}{R} i_4^\alpha\right)$$

und alle Weltlinien liegen auf der zuständigen Fläche (90).

Literatur

[1] *F. Nožička*: Les formules de Frenet pour la géodésique dans la mécanique de Minkowski. Czechoslovak Math. Journal 13 (88), 1963, 290—321.

Výtah

ŘEŠENÍ FRENETOVÝCH FORMULÍ PRO SVĚTOČÁRU V PŘÍPADĚ KONSTANTNÍCH KŘIVOSTÍ

VLADIMÍR PETRŮV

V této práci je vyšetřován systém diferenciálních rovnic (tzv. Frenetovy formule), který závisí na třech nezáporných funkcích P, Q, R. Substitucí $\sigma = \frac{1}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho$ převedeme tento systém na jednodušší systém (je-li ovšem $P \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + q j_3^\alpha\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -q j_2^\alpha + r j_4^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_4^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -r j_3^\alpha\,,$$

který závisí pouze od dvou nezáporných funkcí $q = Q/P$, $r = R/P$ (označili jsme $j_1^\alpha(\sigma) = \frac{1}{c}\,i_1^\alpha(\tau) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}$, $j_h^\alpha(\sigma) = i_h^\alpha(\tau)$ pro $h = 2, 3, 4$).

V práci je řešen případ, kdy q, r jsou konstanty a řešení je zapsáno v speciálně zvoleném inerciálním systému, aby mělo co nejjednodušší tvar. Speciálně v případě, že P, Q, R jsou konstanty, dostáváme tyto výsledky:

1. $R = Q = 0$: pohyb v přímce;
2. $R = 0$, $Q < P$: rovnoměrný pohyb kruhový;
3. $R = 0$, $Q = P$: pohyb po semikubické parabole;
4. $R = 0$, $Q > P$: pohyb po řetězovce;
5. $R \neq 0$: pohyb po křivce v trojrozměrném prostoru, jejíž projekcí do roviny x, y je kruh.

Резюме

РЕШЕНИЕ ФОРМУЛ ФРЕНЕ В СЛУЧАЕ КОНСТАНТНОЙ КРИВИЗНЫ

ВЛАДИМИР ПЕТРУВ (Vladimír Petrův)

В этой работе рассматривается система дифференциальных уравнений (так называемые формулы Френе), которая зависит от трех функций P, Q, R. Если положим $\sigma = \frac{1}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho$, то получим более простую систему

$$\frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + qj_3^\alpha\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -\,qj_2^\alpha + rj_4^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_4^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -\,rj_3^\alpha\,,$$

которая зависит только от двух функций $q = Q/P$, $r = R/P$.

В работе решается случай, когда q и r – константы, и решение записано в специальной инерциальной системе координат ради того, – чтобы оно было записано в самом простом виде.

В частности: Если P, Q, R – константы, то в случае:

1) $R = Q = 0$: получается движение по прямой;

2) $R = 0$, $Q < P$: получается ровномерное движение по кругу;

3) $R = 0$, $Q = P$: получается движение по семикубической параболе;

4) $R = 0$, $Q > 1$: получается движение по цепной линии;

5) $R \neq 0$: получается движение по трехмерной линии, проекцией которой на плоскость x, y является круг.

Adresa autora: Vladimír Petrův, Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university, Malostranské nám. 25, Praha 1.