Aplikace matematiky

Juraj Šütti

Apriorna presnosť čítania na spojnicových nomogramoch s tromi rovnoběžnými nositelkami stupníc

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 3, 194–205

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102896

APRIORNA PRESNOSŤ ČÍTANIA NA SPOJNICOVÝCH NOMOGRAMOCH S TROMI ROVNOBEŽNÝMI NOSITEĽKAMI STUPNÍC

JURAJ ŠÜTTI

(Došlo dňa 4. januára 1963.)

Práca pojednáva o určení apriornej strednej dĺžkovej chyby a apriornej strednej chyby v odčítaných kótach na výslednej stupnici spojnicových nomogramov s rovnobežnými nositeľkami stupníc. Apriorne určenú strednú chybu čítaných hodnôt výslednej premennej možno považovať za dostatočne približne kritérium presnosti čítania a teda za jedného z určujúcich faktorov projektovania nomogramov uvedeného druhu.

Na spojnicovom nomograme s tromi rovnobežnými nositeľkami zostrojenom pre vzťah medzi tromi premennými $F(x, y, z) = 0$ v rozsahoch $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, $e \leqq z \leqq f$, výsledok (napr. niektorú hodnotu z_i premennej z) čítame na stupnici tejto premennej z, ktorá má parametrické rovnice

$$\xi = \text{konšt.}\,, \quad \eta = \mu\, \varphi(z)\,, \tag{1}$$

kde $\varphi(z)$ je určitá funkcia premennej z, vyplývajúca z úpravy daného vztahu $F(x, y, z) = 0$ na Cauchyho kanonický tvar. Pri tomto čítaní podľa indexu, miesto skutočnej hodnoty výsledku Z_i čítame nejakú hodnotu z_i, ktorá s hodnotou Z_i súvisí podľa

$$\Delta_{z_i} = Z_i - z_i\,, \tag{2}$$

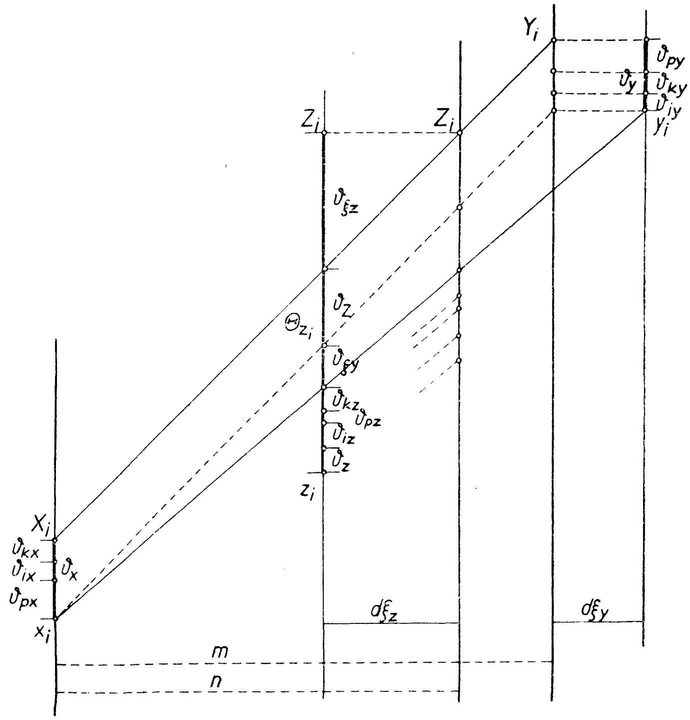
kde Δ_{z_i} je skutočná absolútna chyba v nomograficky určenej hodnote (kóte) z_i. Tejto číselnej chybe, ktorá je rezultátom (algebraickým súčtom) rôznych elementárnych chýb, odpovedá na nositeľke úsečka, tj. dĺžková chyba veľkosti

$$\Theta_{z_i} = \eta_{Z_i} - \eta_{z_i} = \mu(\varphi(Z_i) - \varphi(z_i)) = \mu(\varphi(z_i + \Delta_{z_i}) - \varphi(z_i))\,, \tag{3}$$

kde η_{Z_i}, η_{z_i} sú súradnice bodov s kótami Z_i, z_i, μ je modul zobrazenia a $\varphi(Z_i)$, $\varphi(z_i)$ sú hodnoty funkcie $\varphi(z)$ s hodnotami parametra — kótami Z_i, z_i. Rozvinutím pravej strany rovnice (3) v Taylorov rad, berúc do úvahy len lineárne členy, dostávame závislosť medzi Δ_{z_i} a Θ_{z_i} v tvare

$$\Delta_{z_i} = \frac{\Theta_{z_i}}{\mu\, \varphi'(z_i)}\,. \tag{4}$$

Podľa získaného vzťahu, absolútna chyba Δ_{z_i} v odčítanej výslednej kóte z_i závisí priamo na veľkosti dĺžkovej chyby Θ_{z_i} v tom bode, nepriamo na module a na deriváci funkcie $\varphi(z)$ v bode z_i, tj. aj na polohe čítania. Dĺžková chyba Θ_{z_i} pre každý bod stupnice definovanej rovnicami (1) (ak sa jedná o stupnicu nomogramu), bude obecne vždy iná a bude v ďalšom predmetom skúmania pre prípad, keď stupnica výslednej premennej z bude v nomograme umiestená medzi stupnicami ostatných dvoch premenných.



Obr. 1.

Tak, ako číselná chyba Δ_{z_i} je algebraickým súčtom rôznych elementárnych chýb δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vyplývajúcich z konštrukcie a užívania nomogramu, aj dĺžková chyba Θ_{z_i} je algebraickým súčtom elementárnych dĺžkových chýb ϑ_i $(i = 1, \ldots, n)$, ktoré možno pokladať za grafické zobrazenie elementárnych číselných chýb δ_i s modulom μ. Pri konštrukcii a užívaní spojnicového nomogramu môžeme vymedziť tieto druhy a skupiny elementárnych dĺžkových chýb:

1. dĺžkové chyby ϑ_k vyplývajúce z grafickej konštrukcie stupníc;

2. dĺžkové chyby ϑ_i vyplývajúce z grafickej interpolácie pri vyhľadaní daných hodnôt a pri čítaní výslednej hodnoty;

3. dĺžkové chyby ϑ_p prikladania čítacieho indexu k bodom s danými kótami resp. určenia priesečníka indexu s nositeľkou stupnice;

4. dĺžkové chyby ϑ_ξ vyplývajúce z grafickej konštrukcie dvoch nositeliek, tj. z ich nepresného umiestnenia vzhľadom k tretej nositeľke;

5. dĺžkové chyby ϑ_z vyplývajúce z nepriamosti (zakrivenosti) čítacích indexov.

Rozbor neuvažuje chyby vyvolané zakrivenosťou nositeliek stupníc a ich nerovnobežnosťou.

Elementárne chyby uvedených skupín na výslednej chybe Θ_{z_i} sa podielajú rôznou mierou a podľa obr. 1, celková dĺžková chyba Θ_{z_i} čítaniana výslednej stupnici v bode z_i bude

(5) $$\Theta_{z_i} = \vartheta_Z + \vartheta_{\xi z} + \vartheta_{\xi y} + \vartheta_z + \vartheta_{pz} + \vartheta_{iz} + \vartheta_{kz} ,$$

kde

1. ϑ_Z je dĺžková chyba vyvolaná nepresnou polohou bodov daných kót X_i, Y_i na príslušných stupniciach, tj. dĺžkovými chybami ϑ_X, ϑ_Y;

2. $\vartheta_{\xi z}$ je dĺžková chyba, vyvolaná dĺžkovou chybou $d\xi_z$, vzniklou chybným vynesením ξ pre nositeľku stupnice z;

3. $\vartheta_{\xi y}$ je dĺžková chyba vyvolaná chybou dĺžkovou $d\xi_y$, vzniklou chybným vynesením ξ pre nositeľku stupnice y;

4. ϑ_z je dĺžková chyba vyvolaná zakrivenosťou použitých indexov;

5. ϑ_{pz} je dĺžková chyba vyvolaná nepresným určením priesečníka indexu s nositeľkou stupnice premennej z;

6. ϑ_{iz} je dĺžková chyba vyvolaná grafickou interpoláciou pri čítaní kóty určeného priesečníka s nositeľkou stupnice premennej z;

7. ϑ_{kz} je dĺžková chyba vyvolaná nepresnou grafickou konštrukciou stupnice premennej z.

Veľkosť niektorých týchto dĺžkových chýb závisí na iných chybách, na polohách bodov s kótami X_i, Y_i na príslušných stupniciach, od rozmerov nomogramu a usporiadania nositeliek. Bližšie možno uvedené chyby charakterizovať takto:

ad 1. Dĺžková chyba ϑ_Z vyvolaná nepresnou polohou bodov s kótami X_i, Y_i na príslušných stupniciach, tj. dĺžkovými chybami ϑ_X, ϑ_Y je

(6) $$\vartheta_Z = \vartheta_{ZX} + \vartheta_{ZY} ,$$

kde jej zložky ϑ_{ZX}, ϑ_{ZY} závisia na chybách ϑ_X, ϑ_Y, sečnom uhle α indexu s nositeľkami stupníc a rozmeroch nomogramu v smere súradnicovej osi (ξ), tj. na $\xi_z = n$, $\xi_y = m$. Ich veľkosť určíme z obr. 2, odkiaľ pre zložku ϑ_{ZX} plynie

(7) $$\vartheta_{ZX} = \frac{m - n}{m} \vartheta_X$$

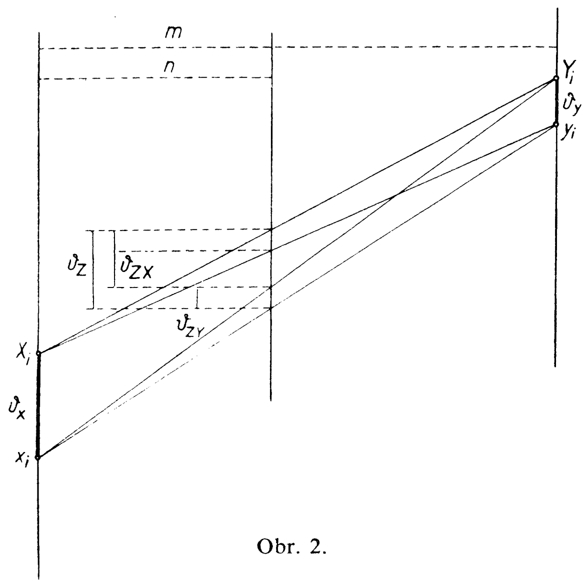
a analogicky pre zložku ϑ_{ZY}

(8) $$\vartheta_{ZY} = \frac{n}{m} \vartheta_Y .$$

pričom dĺžkové chyby ϑ_X, ϑ_Y polohy bodov s danými kótami X_i, Y_i sú algebraickým súčtom troch elementárnych chýb, a to:

a) Dĺžkovej chyby ϑ_{kx} resp. ϑ_{ky} vyplývajúcej z geometrickej konštrukcie stupníc premennej x a y, ktoré vo svojom pôsobení pre ten istý nomogram účinkujú ako stále systematické chyby (predpokladáme, že ϑ_{kx} resp. ϑ_{ky} sú rovnaké v každom bode príslušnej stupnice). Veľkosť chyby závisí od kvality kresliaceho podkladu, kresliacich prostriedkov a pozornosti kresliča.

b) Dĺžkovej chyby ϑ_{ix} resp. ϑ_{iy} vyplývajúcej z grafickej interpolácie kót X_i, Y_i na príslušných stupniciach, ktorú môžeme pre sledovaný účel považovať za náhodnú. Chyba z grafickej interpolácie ϑ_i obsahuje vlastnú chybu lineárnej interpolácie a chybu vyplývajúcu z použitia lineárnej interpolácie na stupniciach s nerovnomerným delením. Veľkosť chyby závisí od šírky dielika, zobrazujúceho použitý krok, charaktere stupnice, zrakových kvalít a skúseností pozorovateľa.



Obr. 2.

c) Dĺžkovej chyby ϑ_{px} resp. ϑ_{py} vyplývajúcej z prikladania čítacieho indexu k polohám bodov s kótami X_i, Y_i, určenými a vyznačenými na stupniciach interpoláciou. Tuto chybu považujeme tiež za náhodnú; jej veľkosť závisí od druhu a hrúbky odčítacieho indexu, spôsobu vyznačenia bodov s danými kótami, hrúbky nositeľky a jej sečného uhlu s indexom. Máme teda

$$\vartheta_X = \vartheta_{ix} + \vartheta_{px} + \vartheta_{kx}\,, \tag{9}$$

$$\vartheta_Y = \vartheta_{iy} + \vartheta_{py} + \vartheta_{ky}\,, \tag{10}$$

a pre chybu ϑ_Z podľa (6) s uvážením (7), (8), (9), (10)

$$\vartheta_Z = \frac{m-n}{m}(\vartheta_{ix} + \vartheta_{px}) + \frac{m-n}{m}\vartheta_{kx} + \frac{n}{m}(\vartheta_{iy} + \vartheta_{py}) + \frac{n}{m}\vartheta_{ky}\,. \tag{11}$$

Predpokladáme, že pri konštrukcii nomogramu (tou istou osobou, tými istými prostriedkami) chyby z grafickej konštrukcie stupníc sú približne rovnaké, tj.

$$\vartheta_{kx} \doteq \vartheta_{ky} \doteq \vartheta_{kz} = \vartheta_k\,. \tag{12}$$

Potom

$$\vartheta_Z = \frac{m-n}{m} (\vartheta_{ix} + \vartheta_{px}) + \frac{n}{m} (\vartheta_{iy} + \vartheta_{py}) + \vartheta_k \,, \tag{13}$$

kde chyby ϑ_{ix}, ϑ_{iy}, ϑ_{px}, ϑ_{py} sú náhodné a predpokládáme, že majú normálne rozdelenie s hustotou pravdepodobnosti

$$f(\vartheta_r) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\, m_{\vartheta r}} \exp\left(-\frac{\vartheta_r}{2m_{\vartheta r}^2}\right), \quad r = ix, iy, px, py\,, \quad -\infty \leqq \vartheta_r \leqq \infty\,,$$

so strednou hodnotou $M(\vartheta_r) = 0$ a rozptylom (štvorcom strednej kvadratickej chyby) $D(\vartheta_r) = m_{\vartheta r}^2$ a chyba ϑ_k je systematická chyba konštrukcie stupníc konštantnej veľkosti.

ad 2. Dĺžková chyba $\vartheta_{\xi z}$ je vyvolaná chybou $\mathrm{d}\xi_z$ v ξ-súradnici nositeľky stupnice premennej z a pre určitý nomogram pokladáme ju za rovnakú v celom rozsahu stupnice, tj. konštantu, čo znamená, že v ďalšom pôsobení sa prejavuje ako stála systematická chyba. Chyba $\vartheta_{\xi z}$, ktorá s chybou $\mathrm{d}\xi_z$ súvisí podľa vzťahu

$$\vartheta_{\xi z} = \mathrm{d}\xi_z \operatorname{cotg} \alpha\,, \tag{14}$$

vyplývajúceho z obr. 3, prejavuje sa potom pri určitej hodnote sečného uhlu tiež ako stála systematická chyba. Veľkosť chyby $\mathrm{d}\xi_z$ závisí na kvalite kresliaceho podkladu, kresliacich prostriedkov a pozornosti kresliča.

ad 3. Dĺžková chyba $\vartheta_{\xi y}$ je vyvolaná chybou $\mathrm{d}\xi_y$ v ξ-súradnici nositeľky stupnice premennej y a predpokladáme o nej, že pre určitý nomogram je rovnaká na ktoromkoľvek miesto stupnice, teda že chyba $\mathrm{d}\xi_y$ má stály systematický charakter. Chybu $\vartheta_{\xi y}$ v závislosti na chybe $\mathrm{d}\xi_y$ môžeme vyjadriť pomocou prvkov d, α, pričom $\beta \doteq \alpha$ (obr. 4), tj. podľa

$$\vartheta_{\xi y} = d \operatorname{cotg} \alpha\,,$$

kde

$$d = \frac{n}{m} \mathrm{d}\xi_y\,,$$

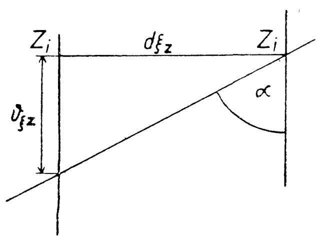
takže

$$\vartheta_{\xi y} = \frac{n}{m} \mathrm{d}\xi_y \operatorname{cotg} \alpha\,. \tag{15}$$

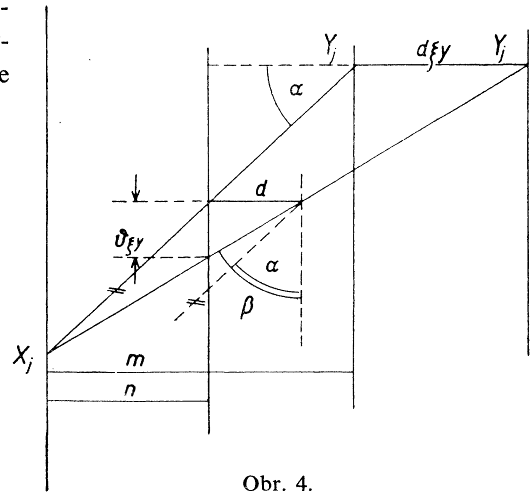
Chyba $\vartheta_{\xi y}$ pre určité hodnoty n, m, α, teda pre určitý bod z_i na stupnici premennej z má stálu hodnotu. Veľkosť chyby $\mathrm{d}\xi_y$ závisí, ako vôbec každej chyby z grafickej konštrukcie, na kvalite kresliaceho podkladu, kresliacich prostriedkov a kresliča.

ad 4. Dĺžková chyba ϑ_{pz} z určenia priesečníka indexu s nositeľkou stupnice výslednej premennej závisí hlavne od hrúbky nositeľky, od spôsobu určenia (vyznačenia) priesečníka, hrúbky indexu, sečného uhla indexu s nositeľkou a predpokladáme, že má náhodný charakter.

ad 5. Dĺžková chyba ϑ_z je vyvolaná zakrivenosťou odčítacieho indexu, ktorá sa u bežných druhov indexov prejaví rôznou mierou. Jej veľkosť závisí od kvality vyhotovenia indexu (rôznych pravítok, priamok, nanesených na priesvitných podkladoch, atď.) a za predpokladu, že pri používaní nomogramu striedame rôzne druhy indexov, chybu ϑ_z môžeme považovať za náhodnú. (Pri stálom používaní toho istého indexu má $|\vartheta_z|$ charakter jednostrannej systematickej chyby. Znamienko chyba ϑ_z mení v závislosti na polohe indexu.)



Obr. 3.



Obr. 4.

ad 6. Dĺžková chyba ϑ_{iz} vyvolaná grafickou interpoláciou kóty z_i závisí na podobných faktoroch ako ostatné chyby ϑ_{ix}, ϑ_{iy} grafickej interpolácie a predpokládame, že je tiež náhodného charakteru.

ad 7. Dĺžková chyba ϑ_{kz} v zmysle (12) má hodnotu ϑ_k, je vyvolaná nepresnou grafickou konštrukciou stupnice premennej z a má charakter stálej systematickej chyby.

Predpokladáme, že aj chyby ϑ_j; $j = z, pz, iz$ majú normálne rozdelenie s hustotou pravdepodobnosti

$$f(\vartheta_j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\, m_{\vartheta_j}} \exp\left(-\frac{\vartheta_j}{2m^2_{\vartheta_j}}\right), \quad -\infty \leqq \vartheta_j \leqq \infty .$$

Na základe (5) s prihliadnutím na (11), (14), (15) máme teda pre celkovú dĺžkovú chybu Θ_{z_i}

$$(16) \qquad \Theta_{z_i} = \frac{m-n}{m}(\vartheta_{ix} + \vartheta_{px}) + \frac{n}{m}(\vartheta_{iy} + \vartheta_{py}) + \vartheta_k + \frac{n}{m}\, d\xi_y \operatorname{cotg}\alpha + $$
$$+ d\xi_z \operatorname{cotg}\alpha + \vartheta_z + \vartheta_{pz} + \vartheta_{iz} + \vartheta_k$$

a ďalej, ak algebraický súčet všetkých náhodných elementárnych chýb označíme

$$(17) \qquad \zeta_i = \frac{m-n}{m}\vartheta_{ix} + \frac{n}{m}\vartheta_{iy} + \vartheta_{iz} + \frac{m-n}{m}\vartheta_{px} + \frac{n}{m}\vartheta_{py} + \vartheta_{pz} + \vartheta_p ,$$

algebraický súčet všetkých elementárnych chýb systematického charakteru

(18) $$C = 2\vartheta_k + \frac{n}{m} \operatorname{cotg} \alpha \, d\xi_y + \operatorname{cotg} \alpha \, d\xi_z ,$$

potom

(19) $$\Theta_{z_i} = \zeta_i + C_i .$$

Dĺžkovú presnosť pri odčítaní kóty z_i budeme charakterizovať strednou kvadratickou chybou m_{Θ_i}, ktorú dostávame umocnením rovnice (16) a utvorením strednej hodnoty štvorca chyby Θ_{z_i}. V zmysle pravidiel pre počítanie so strednými hodnotami [3] máme

(20) $$M(\Theta_{z_i}^2) = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{ix}^2) + \left(\frac{n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{iy}^2) + M(\vartheta_{iz}^2) + \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{px}^2) + \\ + \left(\frac{n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{py}^2) + M(\vartheta_{pz}^2) + M(\vartheta_z^2) + C_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j \, M(\vartheta_i) \, M(\vartheta_j) ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, 7 ,$$

pričom

$$a_1 = a_4 = \frac{m-n}{m} , \quad a_2 = a_5 = \frac{n}{m} , \quad a_3 = a_6 = a_7 = 1$$

a indexy chýb ϑ_j znamenajú

$$1 = ix, \; 2 = iy, \; 3 = iz, \; 4 = px, \; 5 = py, \; 6 = pz, \; 7 = z .$$

Posledný člen teda znamená súčet všetkých dvojnásobných súčinov (kombinácií bez opakovania) členov rovnice (17) a pretože každý súčin tohoto člena obsahuje strednú hodnotu niektorej náhodnej chyby vzťahu (17), ktorá je nulová, bude aj

(21) $$2 \sum_{i \neq j} a_i a_j \, M(\vartheta_i) \, M(\vartheta_j) = 0 .$$

Ako je známe, stredné hodnoty štvorcov náhodných chýb sú štvorce príslušných stredných chýb, teda

(22) $$m_{\Theta_i}^2 = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 m_{\vartheta ix}^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 m_{\vartheta iy}^2 + m_{\vartheta iz}^2 + \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 m_{\vartheta px}^2 + \\ + \left(\frac{n}{m}\right)^2 m_{\vartheta py}^2 + m_{\vartheta pz}^2 + m_{\vartheta z}^2 + C_i^2 .$$

Môžeme reálne predpokladať, že presnosť interpolácie a určenia priesečníkov nositeliek s indexom na každej stupnici bude rovnaká, tj.

(23) $$m_{\vartheta ix} \doteq m_{\vartheta iy} \doteq m_{\vartheta iz} = m_{\vartheta i} ,$$

$$m_{\vartheta px} \doteq m_{\vartheta py} \doteq m_{\vartheta pz} = m_{\vartheta p} ,$$

a potom

$$(24)\quad m_{\Theta_i}^2 = \frac{(m-n)^2 + m^2 + n^2}{m^2}\, m_{\vartheta i}^2 + \frac{(m-n)^2 + m^2 + n^2}{m^2}\, m_{\vartheta p}^2 + m_{\vartheta z}^2 + C_i^2 .$$

Táto stredná dĺžková chyba m_{Θ_i} charakterizuje dĺžkovú presnosť v polohe bodu s kótou Z_i a obecne pre každý iný bod stupnice premennej z bude iná. Ako vyplýva zo vzťahu (23), rôzna hodnota m_{Θ_i} pre určitý nomogram, tj. konštantné m a n, bude vyvolaná predovšetkým hodnotou systematickej časti C_i^2 celkovej strednej dĺžkovej chyby m_{Θ_i}, ktorej niektoré členy obsahujú sečný uhol α, meniaci sa pri používaní nomogramu prakticky v rozsahu $\pi/6 \leqq \alpha \leqq 5\pi/6$. Náhodná časť

$$m_{\zeta i}^2 = \frac{(m-n)^2 + m^2 + n^2}{m^2}\,(m_{\vartheta_i}^2 + m_{\vartheta p}^2) + m_{\vartheta z}^2 ,$$

alebo

$$(25)\qquad m_{\zeta}^2 = v(m_{\vartheta_i}^2 + m_{\vartheta p}^2) + m_{\vartheta z}^2 ,$$

kde

$$v = \frac{(m-n)^2 + m^2 + n^2}{m^2} ,$$

celkovej strednej dĺžkovej chyby m_{Θ_i}, ako vidno, neovplyvňuje veľkosť m_{Θ_i}.

Ako kritérium dĺžkovej presnosti v celom rozsahu stupnice použijeme priemernú hodnotu celkovej strednej dĺžkovej chyby m_{Θ_i}, ktorú dostaneme tiež zo vzťahu (16) za definitoricky zavedeného predpokladu, že veličinu α budeme považovať tiež za náhodnú veličinu s rovnomerným rozdelením hustoty pravdepodobnosti v rozsahu $\frac{1}{6}\pi \leqq \alpha \leqq \frac{5}{6}\pi$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi} = \frac{3}{2\pi} .$$

Analogickým postupom ako pre m_{Θ_i} dostávame

$$(26)\quad M(\Theta_{z_i}^2) = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{ix}^2) + \left(\frac{n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{iy}^2) + M(\vartheta_{iz}^2) + \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{px}^2) +$$
$$+ \left(\frac{n}{m}\right)^2 M(\vartheta_{py}^2) + M(\vartheta_{pz}^2) + M(\vartheta_z^2) + 4\vartheta_k^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \mathrm{d}\xi_y^2\, M(\operatorname{cotg}^2 \alpha) +$$
$$+ \mathrm{d}\xi_z^2\, M(\operatorname{cotg}^2 \alpha) + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j\, M(b_i)\, M(b_j) , \quad j = 1, 2, \dots, 10 ,$$

kde

$$a_1 = a_4 = \frac{m-n}{m} , \quad a_2 = a_5 = \frac{n}{m} , \quad a_2 = a_6 = a_7 = 1 , \quad a_8 = 2 ,$$

$$a_9 = \frac{n}{m}\,\mathrm{d}\xi_y , \quad a_{10} = \mathrm{d}\xi_z ,$$

$$b_1 = \vartheta_{ix} , \quad b_2 = \vartheta_{iy} , \quad b_3 = \vartheta_{iz} , \quad b_4 = \vartheta_{px} , \quad b_5 = \vartheta_{py} , \quad b_6 = \vartheta_{pz} ,$$

$$b_7 = \vartheta_z , \quad b_8 = \vartheta_k , \quad b_9 = b_{10} = \operatorname{cotg} \alpha .$$

Stredné hodnoty funkcií náhodnej veličiny α vystupujúcich v tomto vzťahu budú

$$M(\operatorname{cotg}^2 \alpha) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} f(\alpha) \operatorname{cotg}^2 \alpha \, d\alpha = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{cotg}^2 \alpha \, d\alpha = 0{,}653 \, ,$$

$$M(\operatorname{cotg} \alpha) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} f(\alpha) \operatorname{cotg} \alpha \, d\alpha = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{cotg} \alpha \, d\alpha = 0 \, ,$$

takže posledný člen rovnice (26) bude nulový a potom máme

$$m_\Theta^2 = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 m_{\vartheta ix}^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 m_{\vartheta iy}^2 + m_{\vartheta iz}^2 + \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 m_{\vartheta px}^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 m_{\vartheta py}^2 +$$
$$+ m_{\vartheta pz}^2 + m_{\vartheta z}^2 + 4\vartheta_k^2 + 0{,}653 \left[\left(\frac{n}{m}\right)^2 d\xi_y^2 + d\xi_z^2\right].$$

Ak uvážime vzťahy (23) a (25), označíme

$$m_C^2 = 4\vartheta_k^2 + 0{,}653 \left[\left(\frac{n}{m}\right)^2 d\xi_y^2 + d\xi_z^2\right],$$

kde m_C^2 vyjadruje priemernú hodnotu celkového vplyvu systematických chýb v celom rozsahu stupnice premennej z, dostávame konečne

$$(27) \quad m_\Theta^2 = m_\zeta^2 + m_C^2 = v(m_{\vartheta i}^2 + m_{\vartheta p}^2) + m_{\vartheta z}^2 + 4\vartheta_k^2 + 0{,}653 \left[\left(\frac{n}{m}\right)^2 d\xi_y^2 + d\xi_z^2\right].$$

Náhodná časť ζ celkovej chyby Θ_z, pretože je funkciou n$_a$hodných veličín – chýb elementárnych, s normálnym rozdelením hustoty pravdepodobnosti, s nulovými strednými hodnotami a disperziami rovnými štvorcom príslušných stredných chýb, bude mať v zmysle kompozície normálnych zákonov [3] tiež normálne rozdelenie s hustotou pravdepodobnosti

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\, m_\zeta} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2m_\zeta^2}\right), \quad -\infty \leqq \zeta \leqq \infty$$

tiež s nulovou strednou hodnotou a parametrom m_ζ^2, určeným vzťahom (25). Pretože celková dĺžková chyba Θ_z je lineárnou funkciou chyby ζ, tj. $\Theta_z = \varphi(\zeta)$, hustotu rozdelenia pravdepodobnosti $f(\Theta_z)$ chýb Θ_z dostaneme podľa

$$f(\Theta_z) = f(\Psi(\Theta_z)) \, |\Psi'(\Theta_z)| \, ,$$

kde $\Psi(\Theta_z)$ je inverzná funkcia funkcii $\varphi(\zeta)$. Teda

$$f(\Theta_z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\, m_\zeta} \exp\left(-\frac{(\Theta_z - C)^2}{2m_\zeta^2},\right) \quad -\infty \leqq \Theta_z \leqq \infty$$

s parametrami $M(\Theta_z) = C$, $D(\Theta_z) = m_\zeta^2$.

Podľa (4), priemerná absolútna chyba Δ_z odčítaných kót je funkciou priemernej dĺžkovej chyby Θ_z, tj. $\Delta_z = k\Theta_z$, kde $k = (\mu\ \varphi'(z_i))^{-1}$. Jej rozdelenie hustoty pravdepodobnosti bude

$$f(\Delta_z) = \frac{1}{|k| m_\Delta \sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{(\Delta_z - kC)^2}{2k^2 m_\Delta^2}\right), \quad -\infty \leqq \Delta_z \leqq \infty$$

s parametrami

$$M(\Delta_z) = \frac{C}{\mu\ \varphi'(z_i)}, \quad D(\Delta_z) = m_\Delta^2 = \left(\frac{m_\Theta}{\mu|\varphi'(z_i)|}\right)^2. \tag{28}$$

Podľa (28) a (27) priemerná stredná chyba odčítaných kót výslednej stupnice je teda

$$m_\Delta = \pm \frac{m_\Theta}{\mu|\varphi'(z_i)|}$$

resp. po uvážení (27)

$$m_\Delta = \pm \frac{\sqrt{(\nu(m_{\vartheta i}^2 + m_{\vartheta p}^2) + m_{\vartheta z}^2 + m_C^2)}}{\mu|\varphi'(z_i)|}. \tag{29}$$

Ak sa na výslednej stupnici požaduje čítanie kót s rovnakou absolútnou chybou, tj. $\varphi(z)$ má byť lineárna funkcia, potom $\varphi'(z_i) =$ konšt. $= \kappa$ pre akúkoľvek hodnotu z_i a pre m_Δ plynie

$$m_\Delta = \pm \frac{m_\Theta}{\mu\kappa}, \tag{30}$$

tj. stredná chyba bude konštanta pre každý bod stupnice premennej z.

Ak sa na výslednej stupnici požaduje čítanie kót s rovnakou relatívnou chybou, tj. $\varphi(z)$ má byť logaritmická funkcia, potom pre relatívnu priemernú strednú chybu máme

$$\frac{m_\Delta}{z} = \pm \frac{m_\Theta}{0{,}4343\mu}, \tag{31}$$

tj. táto bude konštantná v každom bode stupnice premennej z.

Hodnoty stredných chýb $m_{\vartheta i}$, $m_{\vartheta p}$, $m_{\vartheta z}$ získame z veľkého počtu pozorovaní empiricky, tj. zo základných súborov. Pre stredné chyby $m_{\vartheta i}$, $m_{\vartheta p}$, $m_{\vartheta z}$ z niekoľko desiatok pozorovaní dostali sme hodnoty: $m_{\vartheta i} = \pm\ 0{,}12$ mm, $m_{\vartheta p} = \pm\ 0{,}18$ mm. Chybu $m_{\vartheta z}$ sme určili z vyšetrenia zakrivenosti rôznych čítacích indexov a dostali sme $m_{\vartheta z} = \pm\ 0{,}07$ mm. Hodnoty ϑ_k, $d\xi_y$, $d\xi_z$ môžeme presnými prostriedkami zistiť alebo starostlivou konštrukciou stupníc znížiť na zanedbateľnú mieru. Zo vzťahu pre m_C^2 vyplýva, že pre $\vartheta_k = d\xi_y = d\xi_z$, $n \doteq m$ bude $m_C^2 = 4\vartheta_k^2 + 1{,}3\vartheta_k^2$, tj. najväčší systematický vplyv budú mať chyby v konštrukcii stupníc, ktoré majú zhruba 3krát väčší vplyv, ako vplyv chybného rozostupu stupníc.

Vzťahy (30), (31), udávajúce apriorne strednú a relatívne strednú chybu v odčítaných kótach výslednej stupnice, sú síce len približnými kritériami v dôsledku niektorých zjednodušení a predpokladov prijatých pri ich odvodení, no predsa dostatočne spoľahlivými na výpočet plánovanej presnosti čítania.

Literatúra

[1] *Невский В. А.:* Справочная книга по номографии; Госуд. изд. техн.-теорет. литературы, Москва 1951.

[2] *Пентковский М. В.:* Номография; Госуд. изд. техн.-теорет. литературы, Москва 1949.

[3] *Вентцель Е. С.:* Теория вероятностей; Госуд. изд. физико-матем. литературы, Москва 1962.

Резюме

АППРИОРНАЯ ТОЧНОСТЬ ЧТЕНИЯ НА НОМОГРАММАХ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С ТРЕМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ШКАЛ

ЮРАЙ ШЮТТИ (Juraj Šütti)

Истинная ошибка Δ_{z_i} отчитанной пометки z_i на шкале этой переменной, лежащей в номограмме из выравненных точек между остальными двумя шкалами, дана отношением (4). В нем Θ_{z_i} является геометрической ошибкой в точке z_i, т.е. графическим изображением ошибки Δ_{z_i} в масштабе μ. Геометрическая ошибка Θ_{z_i}, величина которой в каждой точке шкалы z меняется, является алгебраической суммой различных элементарных ошибок, вытекающих из конструкции и применения номограммы. Частное этих ошибок от деления на Θ_{z_i} дано отношением (5), или же после определения отдельных его членов, отношением (16), в котором $\bar{\zeta}_i$ выражает общее влияние случайных элементарных ошибок и C_i-систематических элементарных ошибок. От истинной ошибки Θ_{z_i} осуществляется переход к средней геометрической ошибке m_{Θ_i} (22) в точке z_i и к среднему значению средней геометрической ошибки m_Θ (27), одинаковой для всех пределов шкалы z. В зависимости от последней и от отношения (4), абсолютнся средняя (квадратическая) ошибка чтения кот да на отношением (30), относительная средная ошибка отношением (31).

Zusammenfassung

DIE APRIORE GENAUIGKEIT VON ABLESEN AN DEN FLUCHT-LINIENTAFELN MIT DREI PARALLELEN TRÄGERN DER SKALEN

JURAJ ŠÜTTI

Den wahren Fehler Δz_i des abgelesenen Arguments z_i an der Skale dieser Veränderlichen, die an der Fluchtlinientafel zwischen den übrigen zwei Skalen angebracht wird, gibt die Beziehung (4) an. In diesem ist Θ_{z_i} der Längefehler im Punkt z_i, d. h. die graphische Darstellung von Fehler Δ_{z_i} mit dem Massstab μ. Der Längefehler Θ_{z_i}, dessen Grösse in jedem Punkt der Skale z anders ist, ist die algebraische Summe der aus der Konstruktion und Anwendung von Nomogramm hervorgehender verschiedener elementarer Fehler. Den Anteil dieser Fehler an Θ_{z_i} gibt die Beziehung (5) an, bzw. nach der Untersuchung einzelner ihrer Glieder die Beziehung (16), in der ζ_i den gesamten Einfluss zufälliger elementarer Fehler und C_i die systematischen elementaren Fehler ausdrückt. Vom wahren Wert Θ_{z_i} geht man zum mittleren Längefehler m_{Θ_i} (22) im Punkt z_i über und zum durchschnittlichen Wert von mittleren Längefehler m_Θ (27), der für den ganzen Bereich der Skale z gleich ist. In Abhängigkeit von diesem und der Beziehung (4), gibt den absoluten mittleren Fehler von Ablesen der Argumente die Beziehung (30), den relativen mittleren Fehler die Beziehung (31) an.

Adresa autora: Doc. inž. *Juraj Šütti*, Katedra banského meračstva a geofyziky VŠT, Švermova 3, Košice.