

Aplikace matematiky

Ivan Hlaváček

Řešení ohybu kruhově desky metodou Reissnerovských algoritmů 1. druhu

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 3, 173–185

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102894>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ŘEŠENÍ OHYBU KRUHOVÉ DESKY METODOU REISSNEROVSKÝCH ALGORITMŮ 1. DRUHU

IVAN HLAVÁČEK

(Došlo dne 22. července 1963.)

V článku je na základě jedné varianty 1. Reissnerovské aproximace (viz [10]) navržena metoda, zpřesňující technickou teorii pro kruhovou desku, která je namáhána osově symetrickým ohybem a buďto vetknuta nebo prostě podepřena na okrajích.

1. METODY ŘEŠENÍ OHYBU SILNÝCH DESEK

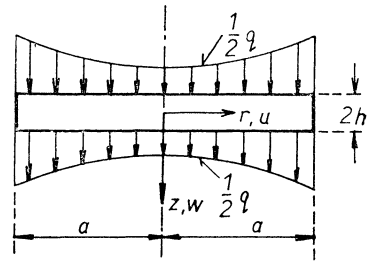
Uvažujme ohyb silné kruhové desky při rotačně symetrickém zatížení i uložení okrajů – viz obr. 1.¹⁾

V matematické trojdimensionální teorii pružnosti je možno tento problém formulovat buď systémem parciálních diferenciálních rovnic pro funkce posunů $u(r, z)$ a $w(r, z)$, nebo pomocí jediné funkce napětí $\Phi(r, z)$ biharmonickou rovnicí, a to vždy s příslušnými okrajovými podmínkami na povrchu válce $r \leq a, |z| \leq h$.

Prvým způsobem řešil úlohu mezi jinými např. A. NÁDAI [1] a dospěl k výsledku ve tvaru nekonečných dvojných řad, složených z funkcí hyperbolických a Besselových.

Druhý způsob, tj. funkci napětí, užívá např. S. P. TIMOSHENKO [2], který sestavuje řešení z biharmonických polynomů, nebo A. I. LURJE [3], který odvodil speciální operátorovou metodu pro trojdimensionální úlohy pružnosti v nekonečné vrstvě ($0 \leq r < \infty, |z| \leq h$) a pak ji aplikoval na silné desky. V. K. PROKOPOV [4] vypočetl příčinkové funkce pro funkci napětí u vetknuté desky a sice opět ve tvaru nekonečné řady.

Všechny tyto metody řeší sice teoreticky přesně diferenciální rovnice a splňují beze zbytku i okrajové podmínky na horním a dolním povrchu desky, ale okrajovým pod-



Obr. 1.

¹⁾ Jde-li o případ zatížení pouze horního povrchu desky, je ovšem třeba připojit ještě řešení desky, namáhané oboustranným tlakem, tj. pro okrajové podmínky $\sigma_z = -\frac{1}{2}q(r)$ při $z = \pm h$.

mínkám na plášti válce $r = a$ vyhovují pouze buď ve smyslu integrálním (např. nulového ohybového momentu – viz [1], [2], [3]) nebo pouze na střední kružnici (např. $w = 0$ pouze při $z = 0$ -viz [4]). Hlavní jejich nevýhodou však je, že při obecnějším zatížení je vyčíslování řad pracné a kromě toho není vyšetřena konvergence těchto řad a s tím související odhad chyby.

K celé otázce je možno přistupovat také jinak. Víme totiž, že ohyb tenké desky při spojitém zatížení dobře vystihuje klasická teorie tenkých desek, založená na Kirchhoffově hypotéze o zachování normály ke střednicové ploše a zanedbání vlivu napětí σ_z , τ_{rz} na deformace i energii desky, což vede ke známé rovnici

$$\Delta \Delta w = \frac{q(r)}{D}$$

pro jedinou funkci $w(r)$ průhybu střednicové plochy.

Podobně jako u vysokých nosníků nebo silnostěnných skořepin vzniká i u silných desek, resp. desek, namáhaných nespojitým zatížením, jako třeba osamělými břemeny, otázka, jak doplnit, opravit klasickou technickou teorii, abychom dosáhli vždy požadované přesnosti.

Jde tedy v podstatě o vhodný převod obecně trojdimensionálního problému na dvojdimensionální, v případě osové symetrie dvojrozměrného na jednorozměrný, pomocí hypotéz geometrického či statického charakteru.

Tuto otázku studovala celá řada autorů, zvláště v posledních dvaceti letech. Podnět vyšel od E. REISSNERA [5], dále uveďme např. práce L. BOLLE [6], B. F. VLASOVA [7] a A. L. GOLDENVEJZERA [8], [9]. V článku [8] kritizuje Goldenvejer metodu Reissnerovu a odmítá řešení Vlasovovo. V práci [9] pak přichází s vlastní iterační metodou, založenou na tzv. asymptotickém integrování rovnic prostorové pružnosti.

Jmenované studie obsahují předpoklady často intuitivního rázu, neporovnávají dosažené výsledky s řešením trojdimensionálního problému pružnosti a nedotýkají se otázek konvergenčních.

Tohoto nedostatku je zbaveno jiné pojetí problému, které přinesli I. BABUŠKA a M. PRÁGER v práci [10] a [11] pod názvem „Algoritmy Reissnerova typu“. Problému desek týká se tu odstavec 6 v [11], z něhož plyne:

a) Existuje právě jedna „optimální“ posloupnost funkcí $\psi_i(\zeta)$, $\chi_i(\zeta)$ ($\zeta = z/h$), která v posloupnosti deformačních hypotéz (tzv. Reissnerovských aproximací 1. druhu)²⁾

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_n(r, h\zeta) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} h^{2i-1} \varphi_i(r) \psi_i(\zeta), \\ \tilde{w}_n(r, h\zeta) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} h^{2i-2} w_i(r) \chi_i(\zeta) \end{aligned}$$

²⁾ Algoritmy 2. druhu vyjadřují obdobné hypotézy o tvaru funkce napětí.

(kde funkce φ_i, w_i se určují z Eulerových rovnic, odpovídajících Lagrangeovu principu minima potenciální energie), dává pro všechny nekonečně derivovatelné funkce zatížení $q(r)$ relativní chybu

$$(2) \quad \varepsilon_n(h) = \frac{W[u - \tilde{u}_n, w - \tilde{w}_n]}{W[u, w]} \leq Ch^{4n-2}.$$

Zde u, w značí přesné řešení prostorového problému, $W[u, w]$ je kvadratický funkcionál, vyjadřující potenciální energii deformace desky – viz dále vzorec (4). Konstanta C závisí sice obecně na $q(r)$, ale nezávisí na h .

b) V (1) lze zaměnit vzájemně nezávislé funkce φ_i, w_i zčásti nebo úplně derivacemi jediné funkce $w_1(r)$ pomocí vztahů $w_i(r) = \Delta^{i-1}w_1(r)$, $\varphi_i(r) = d/dr \cdot [\Delta^{i-1}w_1(r)]$, aniž by se tím porušila nerovnost (2).

c) Dále platí o konvergenci posloupnosti Reissnerovských aproximací, že při pevném h a pevné funkci $q(r)$, integrovatelné s kvadrátem, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W[u - \tilde{u}_n, w - \tilde{w}_n] = 0.$$

Na výhodné vlastnosti I. Reissnerovské aproximace ((1) pro $n = 1$) při dvou nezávislých funkcích $\varphi_1(r), w_1(r)$, v souvislosti s tzv. stabilitou vůči definiční oblasti, poukazuje I. BABUŠKA v článku [12].

Právě tato alternativa stojí tedy jistě za podrobnější vyšetření, také již proto, že představuje zřejmě nejjednodušší zobecnění klasické teorie desek ve smyslu Reissnerovských algoritmů.

2. REISSNEROVSKÁ APROXIMACE SE DVĚMA VOLNÝMI FUNKCEMI

Uvolněním vazby mezi složkami vektoru posunutí v I. Reissnerovské aproximaci dostaneme hypotézu (indexy „1“ v dalším vynecháváme):

$$(3) \quad \begin{aligned} u(r, z) &= -z \varphi(r), \\ w(r, z) &= w(r) + \frac{\nu}{2(1-\nu)} z^2 \Delta w(r), \end{aligned}$$

kde ν je Poissonova konstanta, $\Delta = d^2/dr^2 + 1/r \cdot d/dr$.

Tyto vztahy vyjadřují předpoklad, že normály střednicové roviny desky se mírně zkříví do tvaru paraboly (přímé zůstanou pouze při $\nu = 0$) a mimo to se zkosí pravé úhly při střednicové rovině (jinak by muselo platit, že $\varphi = dw/dr$).

Že tato hypotéza povede k lepším výsledkům než hypotéza typu (1) s jedinou volnou funkcí (podle b)), je zřejmé proto, že smyková napětí od posouvajících sil vyvolají zkosení pravých úhlů, které naše hypotéza (3) v podstatě vystihuje, a také proto, že v Lagrangeově principu se dostaneme blíže k ideálnímu minimu potenciální energie,

neboť uvolněním vazby mezi složkami u, w připouštíme ke konkurenci širší třídu vektorových funkcí posunů, řečeno jazykem mechaniky, udělíme desce více „stupňů volnosti“.

Celková potenciální energie desky vetknuté nebo prostě podepřené (přesný význam těchto pojmů bude definován níže) je

$$(4) \quad \mathfrak{E}[u, v] = \frac{\pi E}{(1+v)(1-2v)} \left\{ \int_{-h}^h \int_0^a \left[(1-v) \left(\frac{u^2}{r^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2v \left(\frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (1-2v) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] r \, dr \, dz - (1+v)(1-2v) \frac{2}{E} \int_0^a (w(r, +h) + w(r, -h)) \cdot \frac{1}{2} q(r) \, r \, dr \right\}.$$

Dosadíme-li sem hypotézu (3), vzniká kvadratický funkcionál tvaru

$$\int_0^a F(\varphi, \varphi', w, w', \Delta w, (\Delta w)', q) \, dr.$$

Zde i v dalším budeme čárkami značit derivace podle r . Na základě Lagrangeova principu je potřeba tento funkcionál minimalizovat na množině vektorových funkcí $[\varphi(r), w(r)]$, dostatečně hladkých a splňujících příslušné okrajové podmínky. Odtud dostaneme Eulerovy rovnice ($\nabla \varphi = d\varphi/dr + 1/r \cdot \varphi$)

$$(5) \quad w' - \varphi + \frac{h^2}{6} \frac{v(1-6v)}{(1-2v)(1-v)} (\Delta w)' + \frac{2}{3} h^2 \frac{1-v}{1-2v} (\nabla \varphi)' = 0,$$

$$(6) \quad \frac{(1-6v)v}{1-2v} \Delta \nabla (w' - \varphi) + 6(1-v) \frac{1}{h^2} \nabla (w' - \varphi) + v \Delta^2 w + \frac{3v^2}{10(1-v)} h^2 \Delta^3 w = - \frac{6(1-v^2)}{Eh^3} \left(q + \frac{vh^2}{2(1-v)} \Delta q \right)$$

a okrajové podmínky, plynoucí částečně též z podmínek uložení desky

A) dokonale vetknuté ($u = w = 0$ pro $r = a, |z| < h$):

I. $w(a) = 0,$

II. $\varphi(a) = 0,$

III. $\Delta w(a) = 0,$

IV. $\Delta^2 w(a) = \frac{10(1-v)(1-6v)}{3v(1-2v)h^2} \nabla \varphi(a) - \frac{10(1-v^2)}{vEh^3} q(a);$

B) prostě podepřené ($\sigma_r = w = 0$ pro $r = a$, $|z| < h$):

I. $w(a) = 0$,

II.
$$\varphi'(a) + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla\varphi(a) - \frac{\nu^2}{(1-\nu)(1-2\nu)} \Delta w(a) = 0,$$

III.
$$\varphi(a) - w'(a) - \frac{3\nu}{10(1-\nu)} h^2(\Delta w)'|_{r=a} = 0,$$

IV.
$$\frac{1-6\nu}{3h^2(1-2\nu)} \nabla(w' - \varphi)|_{r=a} + \frac{\nu}{10(1-\nu)} \Delta^2 w(a) = -\frac{1+\nu}{Eh^3} q(a).$$

Hodnotu $q(a)$ je zde nutno brát ve smyslu $q(a) = \lim_{r \rightarrow a^-} q(r)$. Kromě těchto podmínek musí být uprostřed desky, tj. v okolí $r = 0$, omezeny funkce φ , w se všemi derivacemi a operátory, které se při výpočtu vyskytují.

Uvedené okrajové problémy lze řešit velmi snadno při $\nu = 0$. Pak totiž soustava (5), (6) přechází v postupné řešení rovnic

$$\Delta \nabla \varphi = \frac{q(r)}{D},$$

$$w' = \varphi - \frac{2}{3} h^2 (\nabla \varphi)',$$

kde

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} = \frac{2}{3} Eh^3,$$

s okrajovými podmínkami A) I.–II. resp. B) I.–II.; podmínky III. a IV. odpadají.

Jako příklad uveďme průhyb střednicové plochy rovnoměrně zatížené vetknuté desky

(A)
$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{32}{3} h^2 (a^2 - r^2) \right]$$

a prostě podepřené desky

(B)
$$w = \frac{q}{64D} \left[(5a^2 - r^2)(a^2 - r^2) + \frac{32}{3} h^2 (a^2 - r^2) \right].$$

Při hodnocení numerických výsledků omezme se pouze na průhyb středu desky $w(0, 0)$. V tabulce 1 srovnáme poměry w_R/w_T , w_3/w_T , kde w_R je průhyb podle 1. Reissnerovské aproximace (3), w_T je průhyb podle obvyklé technické teorie tenkých desek, tj. v případě (A) $w_T = qa^4/64D$, v případě (B) $w_T = (qa^4/64D) \cdot 5$, w_3 je průhyb, získaný přibližným řešením příslušného trojdimensionálního problému teorie pružnosti.

Poznamenejme, že přesné řešení těchto problémů v uzavřeném tvaru patrně neexistuje vzhledem k tomu, že splnění okrajových podmínek na celé válcové ploše

$r = a, |z| < h$ v bodovém smyslu činí značné potíže – viz [1]–[4]. Např. u vetknuté desky předpokládáme spolu s [2], [3] pouze $u(a, 0) = 0, \partial u(a, 0)/\partial z = 0$, takže průhyb vyjde zřejmě větší než kdybychom přesně splnili podmínku $u(a, z) = 0$ pro $|z| < h$.

Tabulka 1

Srovnání maximálních průhybů pro $\nu = 0, q = \text{konst}$

$\nu = 0$	(A)	(B)
w_R/w_T	$1 + \frac{32}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2$	$1 + \frac{64}{30} \left(\frac{h}{a}\right)^2$
w_3/w_T	$1 + 16 \left(\frac{h}{a}\right)^2$	$1 + \frac{64}{25} \left(\frac{h}{a}\right)^2$

3. ŘEŠENÍ PRO NENULOVOU POISSONOVU KONSTANTU ASYMPTOTICKÁ INTEGRACE

Složitější bude řešení soustavy (5), (6) s okrajovými podmínkami I.–IV. v případě, že $\nu > 0$. Existuje však způsob, jak tuto úlohu převést na několik kroků, z nichž každý spočívá v řešení jednoduchého dílčího problému.

Ze soustavy (5), (6) a okrajových podmínek I.–IV. se dá především vyloučit funkce $\varphi(r)$. Vznikne rovnice

$$(7) \quad \Delta^2 w + h^2 c_2 \Delta^3 w + h^4 c_4 \Delta^4 w = (q - h^2 \gamma_2 \Delta q - h^4 \gamma_4 \Delta^2 q)/D$$

a okrajové podmínky (pro $r = a$) v případě (A):

I. $w = 0,$

II. $w' + h^2 \alpha_3 (\Delta w)' + h^4 \alpha_5 (\Delta^2 w)' + h^6 \alpha_7 (\Delta^3 w)' = -h^4 \frac{p_{11}}{D} \left(q' + h^2 \gamma_0 (\Delta q)' \right),$

III. $\Delta w = 0,$

IV. $\Delta^2 w + h^2 \beta_6 \Delta^3 w = (p_{IV} q + h^2 p_{IV}^* \Delta q)/D,$

a v případě (B):

I. $w = 0,$

II.
$$w' - \frac{a}{1-\nu} \Delta w + h^2 \left[\alpha_3 (\Delta w)' - \frac{3}{2} a \alpha_5 \Delta^2 w \right] +$$

$$+ h^4 \left[\alpha_5 (\Delta^2 w)' - \frac{3}{2} a \alpha_7 \Delta^3 w \right] + h^6 \alpha_7 (\Delta^3 w)' =$$

$$= \frac{3}{2} a \frac{p_{11}}{D} h^2 (q + h^2 \gamma_0 \Delta q) - \frac{p_{11}}{D} h^4 (q' + h^2 \gamma_0 (\Delta q)').$$

$$\text{III. } \beta_3(\Delta w)' + h^2 \alpha_5(\Delta^2 w)' + h^4 \alpha_7(\Delta^3 w)' = -h^2 \frac{p_{\text{II}}}{D} (q' + h^2 \gamma_0(\Delta q)'),$$

$$\text{IV. } \Delta^2 w + h^2 \beta_6 \Delta^3 w = (p_{\text{IV}} q + h^2 p_{\text{IV}}^* \Delta q)/D.$$

Zde koeficienty $c, \alpha, \beta, \gamma, p$ závisí pouze na v :

$$c_2 = \frac{v(10 - 41v + 2v^2)}{30(1 - v)(1 - 2v)}, \quad c_4 = \frac{v^2}{20(1 - 2v)}, \quad \gamma_2 = \frac{4 - 11v + 10v^2}{6(1 - v)(1 - 2v)},$$

$$\gamma_4 = \frac{v}{3(1 - 2v)}, \quad \gamma_0 = \frac{v}{2(1 - v)}, \quad \alpha_3 = \frac{4 + v}{6(1 - v)}, \quad \alpha_5 = \frac{v(8 - 31v - 2v^2)}{9(1 - 2v)^2(4 + v)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{15} \frac{5 - v}{1 - v}, \quad \beta_6 = -\frac{3v(1 - v)(1 - 6v)}{2(-1 + 65v - 203v^2 - 6v^3)},$$

$$\alpha_7 = \frac{2v^2(1 - v)}{15(1 - 2v)^2(4 + v)},$$

$$p_{\text{II}} = \frac{16(1 - v)^2}{9(1 - 2v)^2(4 + v)}, \quad p_{\text{IV}} = \frac{-5(8 - 13v - 16v^2 + 36v^3)}{v(-1 + 65v - 203v^2 - 6v^3)}.$$

Podobně lze vyjádřit i koeficient p_{IV}^* , ale ten nemá v dalším postupu, jak uvidíme, význam.

Rovnice i okrajové podmínky jsou tu rozvinuty podle mocnin malého parametru h a je tedy nasnadě užití metody tzv. asymptotické integrace diferenciálních rovnic, jak ji vypracovali např. M. I. VIŠIK a L. A. LJUSTERNIK [13], a kterou s úspěchem uplatnil v teorii skořepin E. REISSNER nebo A. L. GOLDENVEJZER.

Bez obtíží lze prokázat že jsou zde splněny podmínky postačující k tomu, abychom mohli metodu aplikovat.

Předpokládejme, že zatížení je dáno funkcí $q(r)$, která má spojité derivace 2. řádu v intervalu $r \in \langle 0, a \rangle$ a $q'_+(0) = 0$.

Řešení hledáme ve tvaru řady

$$(8) \quad w_\varepsilon = (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots) + \varepsilon^s (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots),$$

kde $\varepsilon = h/a$, $w_i(r)$ jsou základní části průhybu a $v_i(t)$ při $t = (a - r)/h$, jsou tzv. funkce pohraniční zóny. Exponent s je určen jednoznačně tvarem rovnice (7) a okrajových podmínek I. – IV. (srv. [13]), a sice v případě (A) $s = 2$, v případě (B) $s = 3$.

Dále předpokládáme, že všechny derivace $d^k w_i / dr^k$ resp. $d^l v_i / dt^l$ jsou veličiny téhož řádu (měřeného v ε) jako w_i resp. v_i .

Řadu (8) dosadíme do rovnice (7) a okrajových podmínek I. – IV., přičemž všechny operace s funkcemi v_i převedeme na proměnnou t a rozvineme podle mocnin ε . Porovnáme-li pak všude členy při stejných mocninách parametru ε , dostaneme dvojitý iterační proces tohoto znění:

1. krok:

$$\Delta^2 w_0 = q/D,$$

(A): $w_0(a) = 0,$

(B): $w_0(a) = 0,$

$$w_0'(a) = 0,$$

$$w_0'(a) - \frac{a}{1-\nu} \Delta w_0(a) = 0,$$

(9) $v_0^{(4)} + c_2 v_0^{(6)} + c_4 v_0^{(8)} = 0$

(kde čísla v zátvorkách budou značit derivace podle t), s počátečními podmínkami

(A): $v_0^{(2)}(0) = -a^2 \Delta w_0(a),$

$$v_0^{(4)}(0) + \beta_6 v_0^{(6)}(0) = 0,$$

(B): $(\beta_3 v_0^{(3)} + \alpha_5 v_0^{(5)} + \alpha_7 v_0^{(7)})|_{t=0} = a^3 \beta_3 (\Delta w_0)'|_{r=a},$

$$v_0^{(4)}(0) + \beta_6 v_0^{(6)}(0) = 0.$$

2. krok:

$$\Delta^2 w_1 = 0,$$

(A): $w_1(a) = 0,$

$$w_1'(a) = \frac{1}{a} (v_0^{(1)} + \alpha_3 v_0^{(3)} + \alpha_5 v_0^{(5)} + \alpha_7 v_0^{(7)})|_{t=0},$$

(B): $w_1(a) = 0,$

$$w_1'(a) - \frac{a}{1-\nu} \Delta w_1(a) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\nu} v_0^{(2)} + \frac{3}{2} \alpha_5 v_0^{(4)} + \frac{3}{2} \alpha_7 v_0^{(6)} \right) \Big|_{t=0},$$

(10) $v_1^{(4)} + c_2 v_1^{(6)} + c_4 v_1^{(8)} = 2v_0^{(3)} + 3c_2 v_0^{(5)} + 4c_4 v_0^{(7)},$

(A): $v_1^{(2)}(0) = v_0^{(1)}(0) - a^2 \Delta w_1(a),$

$$v_1^{(4)}(0) + \beta_6 v_1^{(6)}(0) = 2v_0^{(3)}(0) + 3\beta_6 v_0^{(5)}(0),$$

(B): $(\beta_3 v_1^{(3)} + \alpha_5 v_1^{(5)} + \alpha_7 v_1^{(7)})|_{t=0} = (\beta_3 v_0^{(2)} + 2\alpha_5 v_0^{(4)} + 3\alpha_7 v_0^{(6)})|_{t=0} + a^3 (\Delta w_1)'|_{r=a},$

$$(v_1^{(4)} + \beta_6 v_1^{(6)})|_{t=0} = (2v_0^{(3)} + 3\beta_6 v_0^{(5)})|_{t=0} + a^4 (p_{IV} - 1) \frac{q(a)}{D}$$

3. krok:

$$\Delta^2 w_2 = -a^2(c_2 + \gamma_2) \Delta q/D,$$

(A): $w_2(a) = -v_0(0),$

$$w_2'(a) = -a^2 \alpha_3 (\Delta w_0)'|_{r=a} - \frac{1}{a} (\alpha_3 v_0^{(2)} + 2\alpha_5 v_0^{(4)} + 3\alpha_7 v_0^{(6)})|_{t=0} + \frac{1}{a} (v_1^{(1)} + \alpha_3 v_1^{(3)} + \alpha_5 v_1^{(5)} + \alpha_7 v_1^{(7)})|_{t=0},$$

(B): $w_2(a) = 0$,

$$w_2'(a) - \frac{a}{1-v} \Delta w_2(a) = a^3 \cdot \frac{3}{2} (\alpha_5 + p_{11}) \frac{q(a)}{D} - a^2 \alpha_3 (\Delta w_0)'|_{r=a} +$$

$$+ \frac{1}{a} \left[\frac{-v}{1-v} v_0^{(1)} + (\alpha_3 - 3\alpha_5) v_0^{(3)} + \left(\alpha_5 - \frac{9}{2} \alpha_7 \right) v_0^{(5)} + \alpha_7 v_0^{(7)} \right] |_{t=0} +$$

$$+ \frac{1}{a} \left[\frac{1}{1-v} v_1^{(2)} + \frac{3}{2} \alpha_5 v_1^{(4)} + \frac{3}{2} \alpha_7 v_1^{(6)} \right] |_{t=0} .$$

Další kroky by postrádaly smyslu, neboť chyba už vlivem původní hypotézy (3) je řádu ε^2 podle asymptotické nerovnosti (2).

Z fundamentální soustavy rovnic (9) a (10) vybíráme pouze funkce typu pohraniční zóny, tj. funkce odpovídající kořenům charakteristické rovnice se zápornou reálnou částí. Snadno se přesvědčíme, že všechny funkce w_i, v_i jsou pak uvedenými vztahy určeny jednoznačně.

Přibližné řešení problému se tedy redukuje na trojí řešení klasické rovnice desky a mezilehlé řešení rovnic (9) a (10) s konstantními koeficienty. Prvý krok se vzhledem k funkci w_0 ztotožňuje s technickou teorií tenkých desek a následující kroky vyjadřují příčné opravy.

4. NUMERICKÝ PŘÍKLAD ROVNOMĚRNÉHO ZATÍŽENÍ ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Vzmemme $q = \text{konst}$, $v = 1/6$, takže v případě vetknuté desky (A) je

$$w_0 = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 ,$$

v případě prostého podepření (B) je

$$w_0 = \frac{q}{64D} \left(\frac{31}{7} a^4 - \frac{38}{7} a^2 r^2 + r^4 \right) .$$

Kořeny se zápornou reálnou částí charakteristické rovnice, příslušné rovnici (9), jsou

$$\mu_{1,2} = -2,66 \mp i 3,86$$

a funkce v_0 vychází ve tvaru

$$v_0(t) = 2\text{Re} (B_0 e^{\mu_1 t}) ,$$

kde konstanta B_0 je v případě (A)

$$B_0 = \frac{q a^4}{D} \frac{15}{64} (8,593 + i 9,767) 10^{-3}$$

a v případě (B)

$$B_0 = -\frac{qa^4}{D} 3,6657 (1,326 + i 1,5074) 10^{-4}.$$

Dále najdeme pro

$$(A): w_1(r) = -\frac{qa^2}{64D} 0,04842(a^2 - r^2),$$

$$(B): w_1(r) = -\frac{qa^2}{64D} \frac{31}{7} 0,03630(a^2 - r^2).$$

Z rovnice (10) plyne

$$v_1(t) = 2\text{Re} [(B_1 + \frac{1}{2}B_0t) e^{\mu_1 t}],$$

kde nová konstanta B_1 se určí opět z příslušných počátečních podmínek. Konečně oprava druhého řádu průhybové funkce činí

pro (A):

$$w_2(r) = \frac{qa^2}{64D} 13,075(a^2 - r^2),$$

pro (B):

$$w_2(r) = \frac{qa^2}{64D} \frac{31}{7} 3,379(a^2 - r^2).$$

Vcelku tedy máme v případě (A):

$$w_\varepsilon = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + (-\varepsilon \cdot 0,04842 + \varepsilon^2 \cdot 13,075) a^2(a^2 - r^2) + \dots \right] + \varepsilon^2 [v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \dots]$$

a v případě (B):

$$w_\varepsilon = \frac{q}{64D} \left[\frac{31}{7} a^4 - \frac{38}{7} a^2 r^2 + r^4 + (-\varepsilon \cdot 0,03630 + \varepsilon^2 \cdot 3,379) \frac{31}{7} a^2(a^2 - r^2) + \dots \right] + \varepsilon^3 [v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \dots].$$

Srovnáme opět jako v odstavci 2 průhyby středu desky $w(0, 0)$ s výsledky technické teorie tenkých desek a trojdimensionální teorie pružnosti. Přehled uvádí tabulka 2:

Záporné koeficienty při ε znamenají, že pro dostatečně malé ε budou opravy technické teorie záporné, tj. průhyby vyjdou menší než podle technické teorie. Tento fakt zdánlivě odporuje úvaze, že zkosením pravých úhlů mezi normálovým prvkem a střednicovou plochou se musí nutně průhyby zvětšit, ať je $\varepsilon > 0$ jakékoli. Nesmíme však zapomenout, že v Kirchhoffových předpokladech teorie tenkých desek není pouze geometrická hypotéza o zachování zmíněných pravých úhlů, ale také předpoklad

Tabulka 2
Srovnání maximálních průhybů pro $\nu = \frac{1}{6}$, $q = \text{konst}$

$\nu = \frac{1}{6}$ $q = \text{konst}$	(A)	(B)
w_R/w_T	$1 - \varepsilon \cdot 0,04842 + \varepsilon^2 \cdot 13,075$	$1 - \varepsilon \cdot 0,03630 + \varepsilon^2 \cdot 3,379$
w_3/w_T	$1 + \varepsilon^2 \cdot 19,20$	$1 + \varepsilon^2 \cdot 2,88$

o zanedbání vlivu napětí σ_z na deformace, a právě ten je příčinou vyšetřované difference. Kdybychom vypočetli průhyby podle 1. Reissnerovské aproximace s jedinou volnou funkcí (tj. podle b) odst 1), vyšly by skutečně menší opravy při libovolném ε než podle hypotézy (3), což souhlasí s naší úvahou, neboť zde správně porovnáváme pouze geometrické hypotézy.

Z praktického hlediska však nemá záporná oprava, vypočtená podle prvního řádku tabulky 2, význam, protože např. pro (A) činí největší záporná oprava přibližně $-4,5 \cdot 10^{-5}$, a to při $\varepsilon \doteq 0,002$.

Na vysvětlenou větších rozdílů mezi koeficienty při ε^2 u vetknuté desky připomeňme, že hodnota w_3 je tu poněkud převýšená vlivem pouze přibližného splnění okrajových podmínek (viz odst. 2).

Lze tedy v souhrnu říci, že ve vyšetřovaných případech metoda 1. Reissnerovské aproximace se dvěma volnými funkcemi vystihuje souhlasně s trojdimensionální teorií opravy klasické technické teorie tenkých desek, čili že dobře započítává vliv posouvajících sil na průhyb desky.

Zvýšení přesnosti neděje se tu však na úkor nepřiměřeného vzrůstu početních výkonů, neboť jde v podstatě jen o opakované řešení okrajové úlohy klasické rovnice desky a počátečního problému jednoduché lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, kde se mění pouze pravé strany a okrajové nebo počáteční podmínky.

Literatura

- [1] *A. Nádai*: Elastische Platten; Berlin 1925.
- [2] *S. P. Timoshenko, J. N. Goodier*: Theory of Elasticity; New York 1951, 350—360.
- [3] *A. И. Лурье*: Пространственные задачи теории упругости; Москва 1955.
- [4] *В. К. Прокопов*: Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой; Прикл. мат. и мех. 24 (1950), 527—536.
- [5] *E. Reissner*: On the theory of bending of elastic plates; J. Math. and Phys. 23 (1944), 184—191.
- [6] *L. Bolle*: Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque elastique; Bulletin Technique de la Suisse Romande 1947, 281—285, 293—298.
- [7] *Б. Ф. Власов*: Об уравнениях теории изгиба пластинок; Изв. АН СССР, отд. тех. наук № 12 (1957), 57—60.
- [8] *А. Л. Гольденвейзер*: О теории изгиба пластинок Рейсснера; Изв. АН СССР, отд. тех. наук № 4 (1958), 102—109.

- [9] *А. Л. Гольденвейзер*: Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости; Прикл. мат. и мех. 26 (1962), 668—686.
- [10] *I. Babuška, M. Práger*: Reissnerian algorithmus in the theory of elasticity; Bull. Acad. Pol. VIII (1960), No. 8, 411—417.
Рейсснеровы алгоритмы в теории упругости; Механика, пер. сб. иностр. статей, 1961, № 6, 123—128.
- [11] *I. Babuška, R. Babušková, I. Hlaváček, B. Kepr, L. Pachta, M. Práger, J. Švejdová*: Algoritmy Reissnerova typu v matematické teorii pružnosti; Sborník fakulty inž. stavit. č. 24, 1961.
- [12] *I. Babuška*: Die Stabilität mit Rücksicht auf das Definitionsgebiet und die Frage der Formulierung des Plattenproblems (Vorbericht); Aplikace matematiky 7 (1962), č. 6.
- [13] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник*: Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений; Успехи мат. наук 15 (1960), в. 3, 3—80.

Резюме

РЕШЕНИЕ ИЗГИБА КРУГЛОЙ ПЛИТЫ МЕТОДОМ РЕЙССНЕРОВЫХ АЛГОРИТМОВ 1-ГО РОДА

ИВАН ГЛАВАЧЕК (Ivan Hlaváček)

Осесимметрично нагруженная толстая плита изучается на основе 1-го приближения Рейсснера с двумя независимыми функциями [10]

$$u(r, z) = -z\varphi(r),$$

$$w(r, z) = w(r) + \frac{\nu}{2(1-\nu)} z^2 \Delta w(r)$$

(ν значит коэффициент Пуассона, $\Delta = d^2/dr^2 + 1/r \cdot d/dr$).

После применения начала возможных перемещений Лагранжа получится система двух дифференциальных уравнений для $\varphi(r)$, $w(r)$ с четырьмя краевыми условиями на краю $r = a$, которые рассматриваются для заделанной и для шарнирно опертой пластинки.

Эта система сводится путем исключения $\varphi(r)$ к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\Delta^2 w + h^2 c_2 \Delta^3 w + h^4 c_4 \Delta^4 w = (q - h^2 \gamma_2 \Delta q - h^4 \gamma_4 \Delta^2 q)/D$$

и к краевым условиям, которые тоже разложены в ряды по степеням малого параметра h (половины толщины плиты).

Метод асимптотического интегрирования [13] дает приближенное решение этой задачи, состоящее из трех простых шагов. Первый шаг соответствует классической теории тонких плит, следующие выражают надлежащие поправки степени h/a и $(h/a)^2$.

Численные примеры приведены для равномерно распределенной нагрузки и для $\nu = 1/6$. Максимальные прогибы $w_R(0, 0)$ сравниваются в таблицах 1 и 2 с соответствующими результатами теории тонких пластинок w_T и трехмерной задачи теории упругости w_3 . Отсюда заключаем, что результаты приближения Рейсснера хорошо соглашаются с трехмерной теорией упругости.

Summary

A REISSNERIAN ALGORITHM IN THE THEORY OF BENDING OF CIRCULAR PLATES

IVAN HLAVÁČEK

A thick circular plate under axially symmetric loading is investigated on the base of the first Reissnerian approximation with two independent functions [10]

$$u(r, z) = -z \varphi(r),$$

$$w(r, z) = w(r) + \frac{\nu}{2(1-\nu)} z^2 \Delta w(r)$$

(ν is Poisson's ratio, $\Delta = d^2/dr^2 + 1/r \cdot d/dr$).

Lagrange's principle yields a system of two differential equations for $\varphi(r)$, $w(r)$ with four boundary conditions at the edge $r = a$; the cases of clamped and of simply supported plates are considered.

Elimination of $\varphi(r)$ from both the system and the boundary conditions yields the following equation with constant coefficients,

$$\Delta^2 w + h^2 c_2 \Delta^3 w + h^4 c_4 \Delta^4 w = (q - h^2 \gamma_2 \Delta q - h^4 \gamma_4 \Delta^2 q) / D;$$

and boundary conditions, which are also expanded in powers of a small parameter h (half thickness of the plate).

By the method of asymptotic integration [13], an approximative solution is obtained, which consists of three simple steps. The first step corresponds to the classical theory of thin plates, the remaining two express corrections of degree h/a and $(h/a)^2$ respectively.

Numerical examples are calculated for the uniform load and for $\nu = \frac{1}{6}$. The comparison of the maximum deflections $w_R(0, 0)$ which is carried out in tables 1 and 2, with the corresponding results of both classical theory of plates w_T and the three-dimensional theory of elasticity w_3 , shows good agreement of the results of Reissnerian algorithm with the three-dimensional theory of elasticity.

Adresa autora: Inž. Ivan Hlaváček C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.