Karel Čulík

Rozklad konečného automatu a poznámka k jeho analýse

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 4, 292–301

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102862

ROZKLAD KONEČNÉHO AUTOMATU A POZNÁMKA K JEHO ANALYSE

KAREL ČULÍK

(Došlo dne 14. listopadu 1961.)

Je ukázáno, že konečný automat lze rozložit právě tehdy, když existuje jistá faktorizace množiny jeho stavů. Je popsán algoritmus pro nalezení všech faktorizací. Tím je řešen problém položený E. F. MOOREM [3] o rozložitelnosti konečného automatu, a to v obecnějším případě automatů G. H. MEALYHO [4]. Jsou ukázány některé nesprávnosti v práci D. D. AUFENKAMPA [2].

Úvod. Uvažované konečné automaty popisujeme podle B. A. TRACHTĚNBROTA [5], tj. automat $\mathscr{A}$ je určen takto: $\mathscr{A} = \langle S, X, Y, \varphi, \psi \rangle$, kde S je množina stavů o n prvcích, X je množina vstupů, Y množina výstupů a φ, ψ jsou funkce dvou proměnných $x \in X$ a $s \in S$ takové, že $\varphi(s, x) \in S$ a $\psi(s, x) \in Y$. Nejsou-li funkce φ a ψ definovány pro každé $x \in X$ a $s \in S$, říká D. D. AUFENKAMP [2], že daný automat $\mathscr{A}$ má ohraničení na vstupy. O posloupnosti vstupů $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ říkáme, že je přípustná pro stav s, jestli funkce φ a ψ jsou definovány pro všechny dvojice

$$(s_1, x_1), \quad \text{kde} \quad s_1 = s \quad \text{a} \quad (s_i, x_i), \quad \text{kde} \quad s_i = \varphi(s_{i-1}, x_{i-1}) \quad \text{pro} \quad 2 \leqq i \leqq k\,.$$

V [2] se automat $\mathscr{A}$ popisuje pomocí tzv. matice přechodu automatu $\mathscr{A}$. Tuto matici lze jednoduše popsat užitím binárních relací ϱ_{ij}, což jsou konečné množiny uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in X$, $y \in Y$, definované takto:

$$\varrho_{ij} = \{(x, y) \in X \times Y / \varphi(s_i, x) = s_j \quad \text{a} \quad \psi(s_i, x) = y\}\,, \tag{1}$$

když jsme jednotlivé stavy označili jako $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Pak $A = \|\varrho_{i,j}\|$ je čtvercová matice řádu n, jejíž prvky jsou binární relace ϱ_{ij} (tehdy i-tý řádek a i-tý sloupec odpovídá stavu s_i).

Snadno se nahlédne, že libovolná čtvercová matice $A = \|\varrho_{ij}\|$, kde $\varrho_{ij} \subset X \times Y$ pro $1 \leqq i, j \leqq n$, je maticí přechodu nějakého automatu právě tehdy, když platí tyto dvě podmínky:

$$\text{když} \quad (x_1, x_1) \in \varrho_{i,j} \quad \text{a} \quad (x_2, y_2) \in \varrho_{i,j}\,, \quad \text{potom} \quad x_1 \neq x_2\,; \tag{2}$$

$$\mathbf{L}(\varrho_{ij}) \cap \mathbf{L}(\varrho_{ik}) = \emptyset \quad \text{pro každé} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{a pro} \quad j \neq k\,, \tag{3}$$

kde

$$\mathbf{L}(\varrho_{ij}) = \{x/(x, y) \in \varrho_{ij}\} .$$

Automat se někdy znázorňuje diagramem, což je ohodnocený graf, jehož uzly jsou stavy automatu. Z uzlu odpovídajícího stavu s_i vychází hrana, která vchází do uzlu s_j právě tehdy, když $\varrho_{i,j} \neq \Phi$ a tato hrana je ohodnocena relací ϱ_{ij}. Z diagramu je patrné, jak vypadají přípustné posloupnosti.

Příklad 1. Automat $\mathscr{A} = \langle S, X, Y, \varphi, \psi \rangle$,

kde
$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} ,$$
$$X = \{a, b\} ,$$
$$Y = \{0, 1\} .$$

φ je dána tabulkou:

	a	b	c
s_1	s_3		s_1
s_2	s_4	s_4	
s_3	s_1	s_3	
s_4	s_1		s_3

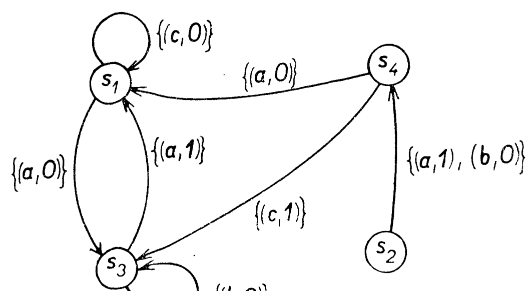
ψ tabulkou

	a	b	c
s_1	0		0
s_2	1	0	
s_3	1	0	
s_4	0		1

Matice přechodu automatu $\mathscr{A}$:

$$\begin{array}{l} s_1 \ldots \\ s_2 \ldots \\ s_3 \ldots \\ s_4 \ldots \end{array} \left\| \begin{array}{llll} \{(c, 0)\}, & \varnothing, & \{(a, 0)\} & \varnothing \\ \varnothing \quad , & \varnothing, & \varnothing \quad , & \{(a, 1), (b, 0)\} \\ \{(a, 1)\}, & \varnothing, & \{(b, 0)\}, & \varnothing \\ \{(a, 0)\}, & \varnothing, & \{(c, 1)\}, & \varnothing \end{array} \right\|$$

Diagram automatu $\mathscr{A}$ je na obr. 1.



Obr. 1.

1. Rozklad $\bar{S}$ na množině stavů S se nazývá faktorizací (bez ohledu na výstup), jestliže platí:

(4) jestliže $s_i, s_j \in S_1$,

kde $S_1 \in \bar{S}$,

pak $\varphi(s_i, x), \varphi(s_j, x) \in S_2$,

kde $S_2 \in \bar{S}$ pro každé $x \in X$.

Lemma 1. *Rozklad $\bar{S}$ na množině stavů je faktorizací právě tehdy, když matice $\boldsymbol{B} = \|\sigma_{u,v}\|$, kde $\sigma_{u,v} = \bigcup_{\substack{s_i \in S_u \\ s_j \in S_v}} \varrho_{ij}$ a $S_u, S_v \in \bar{S}$, splňuje* (3).

Důkaz. Nechť je dán rozklad $\bar{S}$. Utvořme $\sigma_{u,v}$ pro $S_u \in \bar{S}$, $S_v \in \bar{S}$.

Platnost vztahu

$$\mathbf{L}(\sigma_{s,t}) \cap \mathbf{L}(\sigma_{s,w}) \neq \varnothing \tag{5}$$

znamená, že existuje vstup x a stavy $s_k \in S_s$, $s_m \in S_s$ tak, že $\varphi(s_k, x) \in S_t$ a $\varphi(s_m, x) \in S_m$. Tedy jestliže existují s, t, w tak, že platí vztah (5), pak rozklad $\bar{S}$ není faktorizací a naopak jestliže $\bar{S}$ není faktorizací, a tedy existuje vstup x a stavy $s_k \in S_s$ a $s_m \in S_s$ tak, že $\varphi(s_k, x) \in S_t$ a $\varphi(s_m, x) \in S_w$ $(S_t \neq S_w)$, pak pro tato S_s, S_t, S_w platí vztah (5), a tedy matice $\boldsymbol{B} = \|\sigma_{u,v}\|$ není maticí spojení žádného automatu.

Příklad 2. Rozklad $\{s_1, s_2\}$, $\{s_3, s_4\}$ stavů automatu $\mathscr{A}$ z příkladu 1 je faktorizace.

Součinem automatů $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ rozumíme automat $\mathscr{C} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ definovaný takto svou maticí přechodu $\boldsymbol{C}$:

(6) $$\text{je-li } \boldsymbol{A} = \|\varrho_{i,j}\| \text{ řádu } n\,, \quad \boldsymbol{B} = \|\sigma_{i,j}\| \text{ řádu } m\,,$$

pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \|\tau_{u,v}\|$ řádu $m \,.\, n$, kde $\times$ značí Kronekrovský či přímý součin matic a

(7) $$\tau_{u,v} = \varrho_{ij}\sigma_{hk} = \{(a, b) |\ \text{existuje takové } c, \text{ že } (a, c) \in \varrho_{ij}\,,\ (c, b) \in \sigma_{hk}\}\,,$$

přičemž i, j, h, k jsou určeny podmínkami

$$u = (i - 1)\, m + h\,,\ v = (j - 1)\, m + k \quad \text{pro} \quad 1 \leqq i, j \leqq n \quad \text{a} \quad 1 \leqq h, k \leqq m\,,$$

Z (7) je patrno, že v součinu $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ jsou vstupy původními vstupy automatu $\mathscr{A}$ a výstupy jsou původními výstupy automatu $\mathscr{B}$. V případě, žádný výstup automatu $\mathscr{A}$ není současně vstupem automatu $\mathscr{B}$, vyjdou všechny $\tau_{u,v} = \Phi$, takže dostaneme tzv. prázdný automat (jeho matice přechodu má všude prázdné množiny).

Poznámka: Součin zavedený v (7) je zřejmě asociativní.

Věta 1. *Automat $\mathscr{C}$ je součinem automatů $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$, tj. $\mathscr{C} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$, kde $\mathscr{A}$ má n a $\mathscr{B}$ m stavů, právě tehdy, když existuje jeho faktorizace, která má n tříd, z nichž každá má m prvků.*

Důkaz: 1) Nechť $\mathscr{C} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Stavy automatu $\mathscr{C}$ označme c_i $(i = 1, \ldots, m \times n)$ přičemž c_i je stav odpovídající i-tému řádku matice přechodu $\|\tau_{u,v}\|$ automatu $\mathscr{C}$.

$\bar{C}$ označme rozklad stavů automatu $\mathscr{C}$, jehož třídy C_i jsou určeny takto:

(8) $$C_r = \{c_k \mid (r - 1)\, m < k \leqq r \,.\, m\}\,.$$

Ze vztahu (7) a z lemmatu 1 vidíme, že rozklad $\bar{C}$ je faktorizací.

2) Nechť existuje požadovaná faktorizace automatu $\mathscr{C}$. $\boldsymbol{C}$ označme matici přechodu automatu $\mathscr{C}$ takovou, že stavy jsou seřazené tak, aby stavům patřícím do téže množiny faktorizace odpovídaly řádky (sloupce) matice po řadě za sebou.

Označme $\boldsymbol{C}^{i,j} = \|\tau_{p,r}^{i,j}\|$ podmatici, která vznikne protnutím řádků odpovídajících stavům z F_i a sloupců odpovídajících stavům z F_j. Tedy $\tau_{p,r}^{i,j}$ je prvek matice $\boldsymbol{C}$ ležící v p-tém řádku z těch řádků, které odpovídají stavům z F_i a v r-tém sloupci z těch sloupců matice $\boldsymbol{C}$, které odpovídají stavům z F_j. Matici spojení automatu $\mathscr{A}$ utvořme takto:

(9) $$\varrho_{ij} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{L}(\boldsymbol{C}^{i,j})\}\,,$$

kde y jsou libovolné pomocné symboly, splňující pouze tu podmínku, že každý z nich se vyskytuje v matici $\boldsymbol{A}$ pouze jedenkrát.

Ze vztahu

$$\mathbf{L}(a_{i,j}) = \mathbf{L}(\boldsymbol{C}_{i,j}),$$

jehož platnost plyne bezprostředně z definice (9) matice $\boldsymbol{A}$ a z lemmatu 1, vidíme, že matice $\boldsymbol{A}$ je skutečně maticí přechodu.

Matici přechodu automatu $\mathscr{B}$ označme $\boldsymbol{B} = \|\sigma_{p,r}\|$ a vytvořme takto: $\bar{A} = \|\bar{\varrho}_{ij}\|$ označme matici, kterou dostaneme, když ve všech dvojicích matice $\boldsymbol{A}$ vyměníme prvý prvek za druhý (vyměníme vstupy a výstupy).

Potom

$$\sigma_{p,r} = \bigcup_{i,j=1}^{n} \varrho_{i,j}\, \tau_{p,r}^{i,j}, \tag{10}$$

kde n je počet množin faktorizace $\bar{C}$.

Protože jsme pomocné symboly volili po dvou různé, jsou pro matici $\boldsymbol{B}$ splněny vztahy (2), (3) a tedy je to matice přechodu.

Jestliže $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \mathscr{C}$, pak podle definice přímého (Kronekrovského) součinu dostaneme podmatici $\boldsymbol{C}^{i,j}$ matice $\boldsymbol{C}$ jako $\varrho_{i,j} \,.\, \boldsymbol{B}$, kde součin prvku a matice je chápán obvyklým způsobem, tedy označíme-li prvky matice $\boldsymbol{C}^{i,j} = \|\tau_{p,r}^{i,j}\|$, pak

$$\tau_{p,r}^{i,j} = \varrho_{i,j}\sigma_{p,r}\,. \tag{11}$$

Zbývá nám tedy ukázat, že vztah (11) je splněn.

Podle definice matice přechodu $\boldsymbol{B}$ je

$$\varrho_{i,j}\sigma_{p,r} = \varrho_{i,j} \bigcup_{k,l=1}^{n} \bar{\varrho}_{k,l}\tau_{p,r}^{k,l} \tag{12}$$

a protože pomocné symboly y z (9) jsou pro různé $a_{i,j}$ různé, platí

$$a_{i,j}\bar{a}_{k,l}\tau_{p,r}^{k,l} = \emptyset \quad \text{pro} \quad k \neq i \quad \text{nebo} \quad l \neq j\,,$$

a tedy pravou stranu (12) můžeme psát

$$a_{i,j}\bar{a}_{i,j}\tau_{p,r}^{i,j}\,.$$

Protože dále podle definice $\boldsymbol{A}$ a $\bar{A}$ je

$$a_{i,j}\bar{a}_{i,j} = \{(x, x)/x \in \mathbf{L}(\boldsymbol{C}^{ij})\}$$

platí

$$a_{i,j}\bar{a}_{i,j}\tau_{p,r}^{i,j} = \tau_{p,r}^{i,j}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka: Vztahem (10) jsme určili matici přechodu automatu $\mathscr{B}$. Můžeme se přesvědčit, že totéž vyjadřuje vztah

$$\boldsymbol{B} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{i,j}\boldsymbol{C}^{i,j}, \tag{13}$$

kde $\sum_{i,j=1}^{n}$ označuje sčítání matic, která chápeme jako množinové sjednocení odpovídajících si prvků. Jestliže některé sčítance ve (12) se liší jen pomocným symbolem (při sčítání matic podle i, j), na příklad

$$\begin{Vmatrix} \{(a, x)\}, & \varnothing, & \varnothing \\ \varnothing & , \varnothing, & \{(a, y), (a, z)\} \\ \{(a, x)\}, & \varnothing, & \varnothing \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \{(b, x)\}, & \varnothing, & \varnothing \\ \varnothing & , \varnothing, & \{(b, y), (b, z)\} \\ \{(b, x)\}, & \varnothing, & \varnothing \end{Vmatrix},$$

můžeme z nich ponechat jen jeden a v matici $\boldsymbol{A}$ nahradit vynechané pomocné symboly odpovídajícími ponechanými.

Příklad 3. Podle příkladu 2 a věty 1 musí existovat automaty $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ tak, že automat $\mathscr{C}$ z příkladu 1 se dá vyjádřit jako $\mathscr{C} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Najdeme je podle důkazu věty 1.

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{Vmatrix} \{(a, e), (b, f)\}, & \{c, g\} \\ \{(b, h)\} & , \{(a, i), (c, j)\} \end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \equiv \begin{Vmatrix} \{(a, e), (b, f)\}, & \{(c, g)\} \\ \{(b, h)\} & , \{(a, i), (c, j)\} \end{Vmatrix}$$

Podle předcházející poznámky můžeme v matici $\boldsymbol{B}$ vynechat dvojici s pomocným symbolem j a v matici $\boldsymbol{A}$ psát f namísto j.

Poznámka: Vhodným uspořádáním stavů v jednotlivých množinách faktorizace (bylo zatím libovolné) při zápisu matice přechodu je možno ušetřit počet pomocných symbolů. Je možné udat algoritmus, jak stavy v jednotlivých množinách rozkladu uspořádat.

Definice. *Říkáme, že automat $\mathscr{N}$ je nadautomatem automatu $\mathscr{A}$, jestliže ke každému stavu h_i automatu $\mathscr{A}$ existuje stav d_j automatu $\mathscr{N}$ mající jako podmnožinu svých přípustných vstupních posloupností množinu přípustných vstupních posloupností stavu h_j automatu $\mathscr{A}$ a dávající pro tyto společné vstupní posloupnosti stejné výstupní posloupnosti.*

Věta 2. *Nechť existuje faktorizace stavů automatu $\mathscr{C}$. Označme n_1 počet množin faktorizace, n_2 maximální počet prvků v jedné množině faktorizace. Potom existují automaty $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ mající po řadě n_1 a n_2 stavů takové, že automat $\mathscr{D} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ je nadautomatem automatu $\mathscr{C}$.*

Důkaz. Utvořme automat $\mathscr{D}$ takto: vstupy a výstupy bude mít stejné jako automat $\mathscr{C}$. Do každé třídy uvažované faktorizace přidáme ještě tolik stavů, aby v každé množině jich bylo n_2. Přidané stavy nebudou mít žádné přípustné vstupní posloupnosti, matici přechodu automatu $\mathscr{D}$ dostaneme tedy, přidáme-li nulové řádky a sloupce do matice přechodu automatu $\mathscr{C}$ na místa odpovídající novým stavům. Automat $\mathscr{D}$ je zřejmě nadautomatem automatu $\mathscr{C}$. Jednotlivé třídy uvažované faktorizace včetně přidaných prvků nechť tvoří rozklad R stavů automatu $\mathscr{D}$. Je to rozklad na n_1 množin po n_2 prvcích a podle lemmatu 1 je faktorizací, tedy podle věty 2 existují automaty $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, tak, že jsou splněny požadavky věty.

Poznámka: Nulové řádky můžeme vložit do matice C tak, aby nutný počet pomocných symbolů z (9) byl co nejmenší.

2. *Algoritmus pro nalezení faktorizací.* Hledáme algoritmus, pomocí něhož bychom našli všechny faktorizace daného automatu.

Dvojici stavů s_i, s_j, které leží v téže třídě faktorizace, říkejme faktorizační dvojice a označujme je $[s_i, s_j]$. Množinu všech faktorizačních dvojic faktorizace F označme $\mathscr{F}$. Říkáme, že dvojice $[s_i, s_j]$ vynucuje dvojici $[s_k, s_p]$, jestliže existuje posloupnost vstupů

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

tak, že

$$s_k = \varphi(\varphi(\ldots \varphi(\varphi(s_i, x_1), x_2) \ldots x_{p-1}), x_p),$$

$$s_p = \varphi(\varphi(\ldots \varphi(\varphi(s_j, x_1), x_2) \ldots x_{p-1}), x_p).$$

Nezáleží na pořadí s_k, s_p.

Lemma 2. *Nutné a postačující podmínky pro množinu M dvojic stavů automatu, aby byla množinou všech faktorizačních dvojic $\mathscr{F}$ nějaké faktorizace F, jsou*

(14) *Jestliže* $[s_i, s_j] \in M$ *a* $[s_i, s_j]$ *vynucuje* $[s_k, s_l]$ *pak* $[s_k, s_l] \in M$.

(15) *Jestliže* $[s_i, s_j] \in M$ *a* $[s_i, s_k] \in M$ *pak* $[s_j, s_k] \in M$.

Důkaz: 1) Nechť $M = \mathscr{F}$. Jestliže $[s_i, s_j] \in \mathscr{F}$ a $[s_i, s_j]$ vynucuje $[s_k, s_l]$, pak i stavy s_k, s_l leží v téže třídě faktorizace, tedy $[s_k, s_l] \in \mathscr{F}$ tedy je splněna podmínka (14). Náležet k téže třídě faktorizace je zřejmě vztah transitivní a je tedy splněna i podmínka (15).

2) Nechť množina dvojic stavů automatu splňuje podmínky (14), (15). Potom podmínka (15) zaručuje, že tato množina dvojic určuje rozklad stavů a podmínka (14), že tento rozklad je faktorizací.

Podmínky lemmatu 2 nás povedou při sestrojení předpisu, jak najít nejjemnější faktorizaci, jejíž faktorizační dvojicí je též dvojice $[s_i, s_j]$. Nejjemnější faktorizaci, jejíž množina faktorizačních dvojic obsahuje podmnožinu M, říkáme faktorizace vynucená množinou M.

Hledáme faktorizace automatu $\mathscr{A}$ o n stavech. Sestrojíme čtvercovou matici $C = \|C_{i,j}\|$ o $\binom{n}{2}$ řádcích a sloupcích. Ke každému řádku (sloupci) matice C je přiřazena právě jedna dvojice stavů automatu $\mathscr{A}$ (pro řádky i sloupce ve stejném pořadí). Prvky matice budou nuly nebo jedničky. $c_{i,j} = 1$, jestliže dvojice přiřazená i-tému řádku bezprostředně vynucuje dvojici přiřazenou j-tému řádku nebo jestliže $i = j$. $c_{i,j} = 0$ v opačném případě. Označujme řádky dvěma indexy, (k, l)-řádek je řádek příslušný dvojici stavů $[s_k, s_l]$. Podle toho označujeme i prvky matice $C = \|c_{[k,l][p,r]}\|$. Dvojice (i, j)-řádku říkáme těm dvojicím, v jejichž sloupcích jsou jedničky. Jestliže jsou to právě všechny faktorizační dvojice faktorizace F, potom říkáme, že řádek je faktorizačním řádkem faktorizace F. V jednotlivých řádcích budeme připisovat jednotky tak, jak to vyžadují podmínky (14), (15), dokud dvojice (i, j)-řádku nebudou faktorizačním řádkem faktorizace vynucené dvojicí $[s_i, s_j]$. Budeme to provádět pomocí operátoru $\mathbf{Q}$ sestávajícího ze dvou kroků – odpovídajícím podmínkám (14) a (15).

1. Matici $\boldsymbol{C}$ zaměníme maticí $\boldsymbol{C}^m$, kde n je nejmenší přirozené číslo splňující $\boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{C}^{m+1}$ (násobíme matici samu sebou, pokud dostáváme něco nového). Jde o mocninu matice v obvyklém smyslu, ovšem příslušné součty a součiny jsou booleovské. Pomocí výsledků práce [1] snadno nahlédneme, že $\boldsymbol{C}^{i,k}$ má v (i, j)-řádku jednotky právě ve sloupcích příslušných těm dvojicím, které dvojice $[s_i, s_j]$ vynucuje vstupní posloupností délky k. Protože však

$$\boldsymbol{C}^m = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{I})^m = \boldsymbol{C}^m + \boldsymbol{C}^{m-1} + \ldots + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{I},$$

dostáváme pomocí matice $\boldsymbol{C}^n$ dvojice vynucené libovolně dlouhými posloupnostmi vstupů a tedy všechny dvojice požadované podmínkou (14).

2. V každém řádku matice $\boldsymbol{C}$ doplníme jednotky tak, abychom dostali nejmenší ekvivalentní relaci (podmínka (15)). Provedeme to takto: Uvažujme řádek (h, l), utvořme symetrickou matici $\boldsymbol{D}^{h,l} = \|d^{h,l}_{p,r}\|$ takto:

$d^{h,l}_{p,r} = d^{h,l}_{r,p} = C[h, l], [p, r] \ldots$ číslo v (p, r) sloupci uvažovaného řádku,

$d^{h,l}_{p,p} = 1$ pro $p, r = 1, 2, \ldots, n$.

Najdeme $\boldsymbol{D}^m$ (obdobně jako $\boldsymbol{C}^m$) a zpět napíšeme do řádku (h, l):

$$c_{[h,l][p,r]} = d^{h,l}_{p,r} \quad \text{pro} \quad p, r = 1, \ldots, n;$$

to provedeme pro všechny řádky.

Provedení operátoru $\mathbf{Q}$ spočívá v tom, že danou matici měníme podle 1. a 2. stálým opakováním, až zůstane nezměněna. Výslednou matici označme $\mathbf{Q}(\boldsymbol{C})$. Proces musí skončit po konečném počtu kroků, protože pouze připisujeme jednotky a matice má konečný počet prvků.

Lemma 3. *V (i, j)- řádku matice $\mathbf{Q}(\boldsymbol{C})$ dostaneme faktorizační řádek faktorizace vynucené dvojicí $[s_i, s_j]$.*

Důkaz: Z toho, že se matice $\mathbf{Q}(\boldsymbol{C})$ již nemění aplikováním operátoru $\mathbf{Q}$, je vidět, že všechny její řádky splňují podmínky (14), (15) a tedy jsou to faktorizační řádky. Z jejich konstrukce je dále zřejmé, že v (i, j)-řádku je nejjemnější faktorizace, jejíž množinu faktorizačních dvojic obsahuje dvojice $[s_i, s_j]$, je to tedy faktorizace vynucená dvojicí $[s_i, s_j]$.

Podle lemmatu 3 můžeme nalézt faktorizace vynucené jednoprvkovými množinami. Abychom našli všechny faktorizace, postupujeme dále tak, že k faktorizačním dvojicím každé nalezené faktorizace přidáme vždy jednu další dvojici stavů automatu $\mathscr{A}$ a hledáme faktorizaci vynucenou všemi těmito dvojicemi dohromady.

Lemma 4. *Nechť je dána množina dvojic M a dvojice $[s_i, s_j]$ stavů automatu $\mathscr{A}$. Nechť množina dvojic $M \cup [s_i, s_j]$ vynucuje v $\mathscr{A}$ faktorizaci F_1. Změňme automat $\mathscr{A}$ na $\bar{\mathscr{A}}$ tak, aby každá dvojice stavů $\bar{\mathscr{A}}$ vynucovala všechny prvky množiny M. Označme F_2 faktorizaci stavů automatu $\bar{\mathscr{A}}$, kterou vynucuje dvojice $[s_i, s_j]$.* Potom $F_1 = F_2$.

Důkaz. Hledejme faktorizace F_1, F_2 přidáváním dvojic podle podmínek (14), (15). První použití podmínky (14) dá v obou případech tentýž výsledek a tedy i dále dostáváme v obou případech tytéž dvojice, jak lze snadno nahlédnout.

Algoritmus. Hledáme všechny faktorizace automatu $\mathscr{A}$. Zapisujeme je ve formě faktorizačních řádků do „seznamu" faktorizací.

1. Sestavme matici C.
2. Aplikujeme na C operátor $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(C)$ zapíšeme do C'.
3. Řádky $\mathbf{Q}(C)$ jsou faktorizační řádky. Bereme postupně jeden za druhým a zapisujeme je vždy na první volné místo seznamu faktorizací, pokud tam ovšem takový řádek již není.
   Každý nově zapsaný řádek seznamu je tzv. „neoznačený".
4. Najdeme první neoznačený řádek seznamu faktorizací, neexistuje-li, je konec algoritmu, označíme jej, přičteme (booleovsky) ke všem řádkům matice C' a takto vzniklou matici napíšeme na místo matice C.
5. Aplikujeme na C operátor $\mathbf{Q}$ a postup opakujeme od bodu 3.

Věta 3. *Provedením popsaného algoritmu dostaneme seznam všech faktorizací daného automatu.*

Důkaz. Části 1, 2 algoritmu dávají podle lemmatu 3 faktorizace vynucené jednou dvojicí (jednoprvkovou množinou dvojic) stavů automatu. Opakované provádění částí 3, 4, 5 znamená, že každou nalezenou faktorizaci dosazujeme za množinu M z lemmatu 4 a hledáme další faktorizace vynucené víceprvkovými množinami dvojic. Nejdříve dvouprvkovými, potom tříprvkovými atd.

3. V tomto odstavci ukážeme některé nesprávnosti v práci D. D. Aufenkampa. D. D. Aufenkamp v práci [2] ukazuje, jak lze k danému automatu nalézt nadautomat o menším počtu stavů. Aufenkamp však nemluví o nadautomatech, ale o soumístných automatech. Definuje je takto: Dva automaty $\mathscr{M}$ a $\mathscr{N}$ nazývají se soumístnými automaty tehdy a jen tehdy, když ke každému stavu s_i automatu $\mathscr{M}$ existuje alespoň jeden soumístný stav t_j automatu $\mathscr{N}$ a ke každému stavu t_j automatu $\mathscr{N}$ existuje alespoň jeden soumístný stav s_i automatu $\mathscr{M}$. Přičemž soumístné stavy jsou takto definovány: Dva stavy: stav s_i automatu $\mathscr{M}$ a stav t_j automatu $\mathscr{N}$ jsou soumístné tehdy a jen tehdy, když oba automaty, automat $\mathscr{M}$ vycházeje ze stavu s_i a automat $\mathscr{N}$ vycházeje ze stavu t_j dávají stejné výstupní posloupnosti pro libovolnou vstupní posloupnost patřící do průniku přípustných posloupností stavu s_i automatu $\mathscr{M}$ a přípustných posloupností stavu t_j automatu $\mathscr{N}$.

Tato definice je však nevhodná – soumístný automat k danému automatu $\mathscr{A}$ je např. každý automat mající úplně jiné vstupy, triviálně i automat mající jediný stav a nemající žádnou přípustnou vstupní posloupnost. Hledání takovýchto soumístných automatů by ovšem nemělo smysl.

Algoritmus v práci [2] popsaný je však konstruován tak, že se soumístným automatem rozumí vlastně nadautomat a lze ho tedy v praxi používat. Nesprávný je jen závěr, kde se tvrdí, že k danému automatu „odpovídající" automat s minimálním počtem stavů se dostane vždy jako výsledek jedné větve popsaného rozvětvujícího se algoritmu. Citujeme z práce D. Aufenkampa: „*Věta:* 3. *K danému automatu* $\mathscr{M}$ *existuje odpovídající soumístný automat* $\mathscr{N}$ (*ne nutně jediný*) *s minimálním počtem stavů. V nynější době minimální počet stavů je možno určit jen zkoumáním všech možností*".

Jestliže by šlo skutečně o soumístný automat, neměla by věta smysl – byla by splněna triviálně automatem majícím jediný stav s žádnou přípustnou posloupností.

Uvedeme příklad ukazující nesprávnost tvrzení, jde-li o nadautomaty. Definujeme automat $\mathscr{A}$ maticí přechodu

$$\begin{Vmatrix} \{(a, x)\}, & \{(b, y)\}, & \varnothing \\ \varnothing \quad , & \{(c, x)\}, & \{(b, y)\} \\ \{(c, x)\}, & \varnothing \quad , & \{(a, z)\} \end{Vmatrix}.$$

Provedeme-li v [2] popsaný algoritmus, bude mít dvě větve, které obě dají triviální rozklad (po jednom stavu). Tento algoritmus tedy neukazuje žádný nadautomat o menším počtu stavů.

Automat $\mathscr{B}$ definovaný maticí přechodu

$$\begin{Vmatrix} \{(a, x), (c, x)\}, & \{(b, y)\} \\ \{(c, x)\} \qquad , & \{(b, y), (a, z)\} \end{Vmatrix}$$

je však zřejmě nadautomatem automatu $\mathscr{A}$. Aufenkampův algoritmus nevede tedy ve všech případech k nalezení nadautomatu o nejmenším počtu stavů i když se prozkoumají všechny možnosti – všechny větve algoritmu.

Literatura

[1] *Aufenkamp D. D.:* Analysis of sequential machines I. IRE Trans., EC-6, No 4 (1957), 276–285.

[2] *Aufenkamp D. D.:* Analysis of sequential machines II. IRE Trans., EC-7, No 4 (1958), 299–306.

[3] *Moore E. F.:* Gedanken – experiments on sequential machines. Automata Studies, Princenton, 1956, 129–153.

[4] *Mealy G. H.:* A method of synthesizing sequential circuits. Bell Sys. Tech. J., 34 (1955), 1045–1079.

[5] *Трахтенброт Б. А.:* Об операторах, реализуемых в логических сетях. ДАН СССР, 1957, т. 112, № 6.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА И ЗАМЕТКА К ЕГО АНАЛИЗУ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík)

В работе решена проблема разложения конечного автомата, предложенная Е. Муром [3], но в более общем случае автоматов Г. Мили [4]. Разбиение $\bar{S}$ на множестве состояний S называется факторизацией, если выполнено следующее: Если $s_i, s_j \in S_1$, где $S_1 \in S$, то $\varphi(s_i, x)$, $\varphi(s_j, x) \in S_2$, где $S_2 \in \bar{S}$ для каждого $x \in X$. Оказывается, что автомат $\mathscr{C}$ можно разбить на произведение автоматов $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, где $\mathscr{A}$ имеет n и $\mathscr{B}$ — m состояний, тогда и только тогда, когда существует его факторизация, которая имеет n классов, причем все классы содержат m элементов.

Описывается алгорифм, с помощью которого можно найти все факторизации данного автомата.

В дальнейшем указываются некоторые ошибки в работе Д. Д. Ауфенкампа [2].

Summary

DECOMPOSITION OF AUTOMATA AND NOTES ON THEIR ANALYSIS

KAREL ČULÍK

In the paper, the problem of decomposition of an automat as described by E. F. MOORE [3], and that of the more general case of G. H. MEALYS [4] is solved. The composition $\bar{S}$ of the set of states is called a factorization if the following holds: If $s_i, s_j \in S_1$ whenever $S_1 \in \bar{S}$ then, for every $x \in X$, $\varphi(s_i, x)$, $\varphi(s_j, x) \in S_2$ whenever $S_2 \in \bar{S}$. It is proved that an automat $\mathscr{C}$ can be decomposed into the product automat $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ where $\mathscr{A}$ has n states and $\mathscr{B}$ m states if there is a factorization of $\mathscr{C}$ with n states, of which each has m elements.

An algorithm for finding all factorizations of a given automat is described.

Some corrections to a paper by D. D. AUFENKAMP [2] are given.

Adresa autora: *Karel Čulík*, Matematická laboratoř ČVUT, Horská 3, Praha 2.