Václav Doležal; Zdeněk Vorel

O některých základních vlastnostech Kirchhoffových sítí

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 1, 30–54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102836

O NĚKTERÝCH ZÁKLADNÍCH VLASTNOSTECH KIRCHHOFFOVÝCH SÍTÍ

VÁCLAV DOLEŽAL, ZDENĚK VOREL

(Došlo dne 15. února 1962.)

Článek je věnován některým novým výsledkům teorie Kirchhoffových sítí. V prvé části jsou zavedeny pojmy regularity sítě, zejména regularity v časové a frekvenční oblasti, je ukázáno, kterak tyto pojmy mezi sebou souvisí a konečně uvedeny nutné a postačující podmínky pro jednotlivé regularity. Ve druhé části je sledována stabilita řešení Kirchhoffovy sítě podle počátečních podmínek a podle zdrojů, a problém kompatibility počátečních podmínek. Ve třetí části je ukázáno, kterak je možno soustavu integrodiferenciálních rovnic, popisující chování sítě v časové oblasti, převést k normální vektorové diferenciální rovnici $x' = Ax + w$; těchto výsledků je pak použito k zevrubnému rozboru podmínek kompatibility.

0. ÚVOD

Osvětleme si nejdříve povahu problémů, kterými se budeme zabývat! Čtenář má jistě hrubou představu o tom, co je to Kirchhoffova (elektrická) síť; jak známo, tímto názvem označujeme soustavu, utvořenou vzájemným propojením časově nezávislých odporů, cívek a kondensátorů, do které můžeme vkládat zdroje elektromotorické síly. Představme si, že máme dánu nějakou konkrétní síť, a máme ji řešit, tj. máme stanovit proudy, které tekou jednotlivými prvky R, L, C (větvemi sítě), jsou-li udány vložené zdroje, případně počáteční hodnoty proudů a nábojů na kondensátorech. Je známo, že proudy v síti musí spolu se zdroji splňovat jisté rovnice, které se nazývají Kirchhoffovy zákony.

Předně podívejme se na to, co rozumíme rčením „řešit síť". Na tuto věc můžeme pohlížet s několika různých hledisek, která nyní rozebereme.

A) Předpokládejme, že nás zajímá proudový režim v síti v tom případě, kdy vložené zdroje mají jakýkoliv obecný časový průběh. Zde říkáme, že síť vyšetřujeme v časové oblasti (t-oblasti). V tomto případě vede formulace Kirchhoffových zákonů na soustavu lineárních integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. (Formuluje se okamžitá napěťová resp. proudová bilance.)

B) Jindy hledáme proudy v „symbolickém tvaru", tj. Kirchhoffovy zákony formulujeme tak, že za zdánlivé odpory prvků R, L, C béřeme racionální funkce R, Lp, $(Cp)^{-1}$; úloha pak vede na soustavu lineárních algebraických rovnic, jejichž koeficienty (a i řešení) jsou racionálními funkcemi proměnné p. Přitom proměnné p uděluje se fysikální význam „komplexní frekvence", a získané řešení se pak obvykle nazývá řešení v frekvenční oblasti (p-oblasti).

C) Konečně je možno pohlížet na problém řešení ještě s tohoto stanoviska (ω-oblast): nechť $\omega > 0$ je pevný kruhový kmitočet, (na příklad v silnoproudé elektrotechnice je nejčastěji $\omega = 2\pi . 50$), a předpokládejme, že všechny elektromotorické síly vložené do sítě mají časový průběh tvaru $E_k \cos(\omega t + \varphi_k)$, kde E_k, φ_k jsou konstanty; hledejme „ustálený" proudový režim v síti, tj. hledejme takové proudy v síti, které mají rovněž průběh $I_k \cos(\omega t + \psi_k)$. Je známo, (viz ostatně dále), že formulace Kirchhoffových zákonů v tomto případě (při pevném kmitočtu) vede na soustavu algebraických rovnic s číselnými (komplexními) koeficienty.

Je lehko vidět, že například pojem řešení v t-oblasti je něco podstatně jiného než řešení v p-oblasti nebo v ω-oblasti. Nyní vznikají tyto důležité otázky:

1) Řešíme-li nějakou konkrétní síť N (v některé z uvedených oblastí), existuje pak řešení (tj. proudy), resp. je pro každou soustavu zdrojů určeno příslušné řešení jednoznačně? Nastává-li poslední případ, budeme síť N nazývat regulární (v časové oblasti, frekvenční oblasti, atd., podle toho, které pojetí máme na mysli).

2) Jak poznáme, aniž bychom prováděli řešení příslušných rovnic, že N je regulární? Poznamenejme, že význam této otázky není jen teoretický; řeší-li se totiž složité sítě na počítacích strojích, musí být předem zaručena existence resp. unicita řešení.

3) Konečně můžeme klást otázku: jaké jsou souvislosti mezi pojmy regularity v jednotlivých oblastech, tj. je-li například N regulární v ω-oblasti pro nějaké ω, je též regulární v časové oblasti?

Tyto problémy jsou diskutovány a zodpovězeny v prvé části článku.

Druhá část článku je věnována hlubšímu rozboru vlastností sítí v časové oblasti, a to otázkám stability řešení, a otázce kompatibility počátečních podmínek. Prvou otázkou ptáme se v podstatě na to, jak se chovají průběhy proudů, změníme-li počáteční podmínky resp. průběhy vložených elektromotorických sil, tj. zda proudy nezmění zásadně svůj průběh, když málo změníme počáteční podmínky nebo elektromotorické síly.

Otázka kompatibility značí pak nalezení podmínek, které musí splňovat počáteční hodnoty proudů s počátečními náboji na kondensátorech a počátečními hodnotami elektromotorických sil, aby průběhy proudů v síti spojitě vyšly z předepsaných počátečních hodnot. (Je známo, že v jistém smyslu není obecně možné předepsat počáteční hodnoty proudů a nábojů zcela libovolně.)

Konečně ve třetí části článku bude ukázáno, že rovnice sítě v časové oblasti (soustava integrodiferenciálních rovnic) lze převésti na normální soustavu diferenciálních rovnic, tj. na vektorovou rovnici $x' = Ax + w$ (A je konstantní matice). Rozbor této okolnosti umožňuje pak vyslovit další nutné a postačující podmínky kompatibility.

Precisujme nyní všechny věci, o kterých jsme hovořili v úvodu. K tomu cíli zaveďme nejdříve některé pomocné pojmy. Pro popis topologie sítě (tj. pospojování jednotlivých prvků) se hodí pojem orientovaného grafu. Mějme nějakou konečnou neprázdnou množinu $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$, jejíž prvky nazveme hranami, a konečnou neprázdnou množinu $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$, jejíž prvky nazveme uzly; nechť je dále dána matice $a = [a_{ik}]$ o r řádcích a s sloupcích, přičemž 1) prvky a_{ik} nabývají pouze hodnot $1, -1, 0$, 2) v každém řádku matice a je právě jeden prvek roven 1 a právě jeden prvek roven -1, 3) v každém sloupci a je aspoň jeden prvek různý od nuly. Přiřadíme-li i-tému řádku matice a prvek $h_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, r$ a j-tému sloupci matice a prvek $u_j \in U$, $j = 1, 2, \ldots, s$, odpovídá každé hraně h_i právě jeden uzel u_j, pro který $a_{ij} = -1$, a právě jeden uzel u_k, pro který $a_{ik} = 1$. Uzel u_j nazýváme začátečním, u_k koncovým uzlem hrany h_i. Trojici $G = (H, U, a)$ nazveme pak orientovaným grafem, a matici a incidenční (nebo strukturální) maticí grafu G.

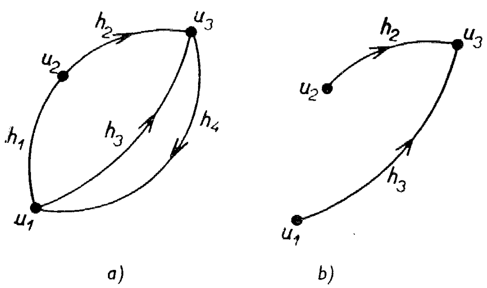
Vypustíme-li některé prvky z H a některé prvky z U tak, že vypuštěním odpovídajících řádků a sloupců v matici a dostaneme matici, která splňuje opět podmínky 1)–3), vznikne tak graf, který nazýváme podgrafem grafu G.

Konkrétní grafy znázorňujeme dobře známým způsobem, jehož příklad je patrný z obr. 1a, kde incidenční matice je

$$a = \begin{bmatrix} -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ -1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & -1 \end{bmatrix}.$$

Graf, uvedený na obr. 1b, je zřejmě jeho podgrafem s incidenční maticí

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & 1 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$



Obr. 1.

Buď nyní G orientovaný graf; podgraf L grafu G nazveme obvodem, jestliže po změně orientace některých hran v L lze všechny hrany z L srovnat v takovou posloupnost $\tilde{L} = \{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_n}\}$, že $h_{i_j} \neq h_{i_k}$ pro $j \neq k$, koncový uzel hrany h_{i_m} je začátečním uzlem hrany $h_{i_{m+1}}$ pro $m = 1, 2, \ldots, n - 1$ a koncový uzel hrany h_{i_n} je začátečním uzlem hrany h_{i_1}. Formálně budeme takový obvod zapisovat výrazem $\sum_{i=1}^{r} c_i h_i$, kde c_i položíme rovno 1, jestliže hrana h_i se vyskytuje v posloupnosti $\tilde{L}$ se stejnou orientací jako v L, -1 pro opačnou orientaci a konečně rovno nule, když se hrana h_i v $\tilde{L}$ nevyskytuje. Tak například z obr. 1a je patrno, že soustava h_1, h_2, h_3 tvoří obvod, neboť posloupnost $\{h_3, -h_2, -h_1\}$ má shora uvedenou vlastnost. (Znaménko minus označuje přeorientování hrany). Uvažovaný obvod zapíšeme tedy jako $-h_1 - h_2 + h_3$.

Pro zjednodušení dalších úvah budeme používat vektorovou symboliku. Buď $h' = [h_1, h_2, \ldots, h_r]$, $h_i \in H$. (Čárka označuje transponování; má tedy vektor h za prvky všechny hrany grafu G.) Formálně můžeme tedy každý obvod psát ve tvaru $c'h$, kde c je r-dimensionální vektor, sestavený z čísel c_i.

Lze snadno dokázat, že je-li $c'h$ nějaký obvod, že pak platí $a'c = 0$.

V dalším budeme potřebovat poněkud zobecnit pojem obvodu. Cyklem nazveme každý výraz $c'h$, kde vektor c je reálným řešením rovnice $a'c = 0$. (Jsou tedy prvky vektoru c reálná čísla, ne nutně celá.) Je zřejmé, že každý obvod je současně cyklem. Obráceně lze dokázat, že *každý cykl je lineární kombinací obvodů*, tj. je-li $c'h$ cykl, lze najít obvody $d'_1h, d'_2h, \ldots, d'_mh$ tak, že $c = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \ldots + \alpha_m d_m$, kde α_i jsou reálná čísla. Tak například pro graf z obr. 1a je $h_1 + h_2 - \frac{1}{3}h_3 + \frac{2}{3}h_4$ cyklem; přitom zřejmě platí $[1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = [1, 1, -1, 0] + \frac{2}{3}[0, 0, 1, 1]$, kde $h_1 + h_2 - h_3$, $h_3 + h_4$ jsou obvody.

Buďte nyní c'_ih, $i = 1, 2, \ldots, n$ cykly; řekneme, že $c'_1h, c'_2h, \ldots, c'_nh$ tvoří soustavu lineárně nezávislých cyklů, právě když z rovnosti $\alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 + \ldots + \alpha_nc_n = 0$ plyne $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Konečně řekneme, že $c'_1h, c'_2h, \ldots, c'_nh$ tvoří úplnou soustavu lineárně nezávislých cyklů, jestliže $c'_1h, c'_2h, \ldots, c'_nh$ tvoří soustavu lineárně nezávislých cyklů, přičemž pro každý cykl $c'h$ existují čísla $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tak, že $c = \beta_1c_1 + \beta_2c_2 + \ldots + \beta_nc_n$.

Nyní můžeme již definovat pojem Kirchhoffovy sítě (dále K-sítě). Buď G orientovaný graf o r hranách a R, L, S buďte reálné čtvercové matice r-tého řádu; K-sítí N nazveme pak čtveřici (G, R, L, S). Jestliže nadto matice R, L, S jsou positivně semidefinitní,[1]) přičemž R a S jsou diagonální, budeme N nazývat pasivní K-sítí.

Všimněme si fysikálního smyslu uvedené definice! Zřejmě pomocí grafu G je popsáno vzájemné propojení elementů K-sítě; matici R budeme pojímat jako matici „vzájemných odporů", tj. prvek R_{ik} bude představovat vzájemný odpor hran h_i, h_k. Podobně L bude představovat matici vzájemných indukčností, a S matici převratných hodnot vzájemných kapacit. Bude-li se jednat o pasivní K-síť, pak z definice plyne jednak to, že v síti existují pouze „vlastní" odpory a kapacity; podmínky positivní semidefinitnosti, tj. $x'Rx \geqq 0$, $x'Lx \geqq 0$, $x'Sx \geqq 0$ necharakterisují pak nic jiného, než známý fysikální fakt, že tepelná (Jouleova), magnetická a elektrostatická energie v síti je nezáporná ať jsou poměry v síti jakékoliv, tj. „pasivitu" sítě. Naproti tomu, obecnější pojem K-sítě připouští například i záporné odpory, takže zahrnuje i sítě, které se v elektrotechnice nazývají aktivní.

Přistupme nyní k vyšetřování sítí v časové oblasti! Mějme tedy dánu nějakou K-síť $N = (G, R, L, S)$ a nechť $E(t)$ je vektor, jehož prvky jsou funkce definované pro $t \geqq 0$, které představují průběhy elektromotorických sil v jednotlivých větvích sítě. (V souhlasu s terminologií elektrotechniky budeme používat též termín „větev", kterému v abstrakci odpovídá příslušná hrana grafu sítě.)

---

[1]) Reálnou čtvercovou matici M r-tého řádu nazveme positivně semidefinitní, jestliže 1) M je symetrická a 2) pro každý reálný r-dimensionální vektor x platí $x'Mx \geqq 0$.

Označme $I(t)$ vektor, jehož prvky představují průběhy proudů v jednotlivých větvích sítě N, jsou-li elektromotorické síly representovány vektorem $E(t)$. Potom podle prvního Kirchhoffova zákona má platit pro každý obvod $d^{\backprime}h$ rovnice

$$\text{T1*} \qquad d^{\backprime}\left\{RI(t) + L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + S\left(\int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau + q_0\right)\right\} = d^{\backprime}E(t)\,,$$

kde prvky vektoru q_0 představují hodnoty počátečního náboje na kondensátorech v jednotlivých větvích. Podobně, formulujeme-li druhý Kirchhoffův zákon, dostaneme rovnici

$$\text{T 2*} \qquad a^{\backprime}I(t) = 0\,.$$

Dále bývá předepsáno, jaké mají být „počáteční hodnoty" proudů v některých větvích.

Rozeberme nyní podrobněji popis problému rovnicemi T 1* a T 2*! Všimněme si předně otázky počátečních hodnot; z fysikální zkušenosti je zřejmé, že nemá smysl předepisovat počáteční hodnotu proudu pro ty větve, které „nikam nevedou", (tj. větve, které nepatří do žádného obvodu), a rovněž pro větve, které nejsou induktivně vázány s žádnou jinou větví a jejichž vlastní indukčnost je nulová. Abychom si však těmito věcmi problém zbytečně nekomplikovali, postavme se na stanovisko, že danou síť sestavíme z jejích větví v okamžiku $t = 0$, a tedy že „počáteční hodnoty" mají význam jednotlivých veličin (proudů, nábojů) v okamžiku těsně před sestavením; budeme tedy předpokládat, že je dána počáteční hodnota proudu v každé větvi. Vektor mající za složky tyto hodnoty, označme I_0.

Dále vzniká otázka, co vlastně rozumíme „počáteční hodnotou", tj. specielně jaký je vztah mezi vektorem $I(t)$ a I_0. Odpověď nám dává představa, že vektor proudů $I(t)$ by měl „spojitě vyjít" z počátečního vektoru I_0, tj. že vektor $I(t)$ by měl být spojitý v bodě $t = 0$ (zprava) a tedy by existovala limita $I(0) = \lim_{t \to 0+} I(t)$, přičemž by platilo $I(0) = I_0$.

Konečně z rov. T 1* je zřejmé, že v ní vystupuje člen $L[\mathrm{d}I(t)/\mathrm{d}t]$, tj. bylo by vhodné požadovat, aby vektor $I(t)$ měl v každém bodě $t \geqq 0$ derivaci.

Provedeme-li matematický rozbor požadavků na řešení $I(t)$, které jsme právě uvedli, zjistíme, že tyto požadavky jsou velmi silné, a tedy jen v „málo případech" existuje řešení $I(t)$, které je všechny splňuje.

Aby si čtenář mohl učinit lepší představu o těchto věcech, uveďme jednoduchý příklad. Uvažujme K-síť, jejíž schema je uvedeno na obr. 2, a předpokládejme, že jak počáteční hodnoty proudů tak i počáteční náboj na kondensátoru jsou nulové. Zvolíme-li obvody $h_1 + h_2$, $h_1 + h_3$ můžeme podle T 1* psát rovnici

$$(1.1) \qquad I_1 + 2I_2 + \int_0^t I_2\,\mathrm{d}\tau = e_1 + e_2\,,$$

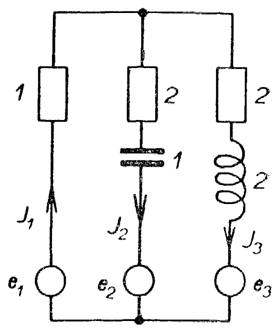
$$I_1 + 2I_3 + 2\frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}t} = e_1 + e_3\,.$$

Podle T 2* pak platí $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Pro jednoduchost předpokládejme ještě, že je $e_2 = e_3 = 0$, a stanovme řešení I_1, I_2, I_3! Soustavy tvaru (1.1) řeší se v praxi obyčejně Laplaceovou transformací; zvolíme-li tuto metodu, kde klademe $\mathscr{L}(\mathrm{d}I_3/\mathrm{d}t) = p\mathscr{L}(I_3) - I_3(0+)$ a položíme-li $I_3(0+) = 0$ (předepsaná počáteční hodnota), dostaneme známým způsobem například pro $I_1(t)$ rovnici

$$(1.2) \qquad J_1(t) = \tfrac{1}{3}e_1(t) + \int_0^t \alpha(t - \tau)\, e_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

kde $\alpha(t) = -0{,}0495 \exp(-0{,}39t) + 0{,}161 \exp(-1{,}27t)$.

Je-li nyní $e_1(t)$ spojitá v $\langle 0, \infty)$ a je-li $e_1(0+) = 1$, pak z rov. (1.2) vyplývá $I_1(0+) = \frac{1}{3}$, což ovšem není předepsaná nulová hodnota. To však není v rozporu s fysikálními představami, neboť vinu na tomto faktu má zřejmě ta okolnost, že napětí $e_1(t)$ „začíná" ihned hodnotou 1, a nevychází z nulové hodnoty, která odpovídá klidovému stavu sítě.



Obr. 2.

Všimněme si nyní toho faktu, že nemá-li funkce $e_1(t)$ v některém bodě $t_0 > 0$ derivaci, že pak ani $I_1(t)$ nemá v t_0 derivaci. (Srv. s rovnicí (1.2)!) Nalezené řešení $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ tedy vůbec nesplňuje výše uvedené podmínky. Poznamenejme ještě, že $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ skutečně představují řešení, tak jak je budeme definovat později, a které odpovídá fysikální skutečnosti.

Z uvedeného vyplývá, že nebude zbývat nic jiného, než představu „řešení vyjde spojitě z počátečních hodnot" nahradit pojmem obecnějším, a existenci derivace řešení v každém bodě opustit, resp. nahradit ji rovněž obecnějším pojmem. Ukazuje se, že vhodným aparátem k dosažení vytčeného cíle je teorie distribucí, která nadto ještě umožňuje zpracovat spolehlivě i problémy, kdy vložené elektromotorické síly obsahují impulsy.

Povězme si proto nejdříve něco o distribucích! Distribuce jsou zobecněním pojmu funkce. Lze je definovat různým způsobem; nebudeme zde uvádět přesné znění definic, ale soustředíme se převážně na formální stránku jejich použití. Podrobnější poučení nalezne čtenář v práci [2], [3].

Předně uveďme, že každá lokálně integrovatelná funkce je distribucí; tedy například $H_T(t)$ ($H_T(t) = 1$ pro $t \geqq T$, $H_T(t) = 0$ pro $t < T$), $\cos t$, t^3, $\exp t$, $\exp(\exp t^4)$ jsou distribucemi. Takové distribuce nazývají se regulárními. Existují však distribuce, které nejsou regulární; takovou je například Diracova distribuce δ_T, která je precisací představy o jednotkovém impulsu, působícím v čase $t = T$.

V dalším budeme užívat pouze třídu $\boldsymbol{D}$ těch distribucí, které jsou rovny nule na $(-\infty, 0)$. Patří tedy do $\boldsymbol{D}$ všechny lokálně integrovatelné funkce, které jsou skoro všude rovné nule na $(-\infty, 0)$, dále je H_T, $\delta_T \in \boldsymbol{D}$ pro $T \geqq 0$.

Už na tomto místě zdůrazněme, že distribuce tvoří lineární systém, tj. že s nimi můžeme provádět všechny lineární operace zcela shodně, jako s funkcemi. To značí například, že jsou-li f, g distribuce, α číslo, potom $f + g$, αf jsou rovněž distribucemi.

Přitom operace sčítání a násobku číslem mají tu vlastnost, že jsou-li specielně f, g funkcemi, pak „distributivní" součet resp. násobek je roven obyčejnému součtu resp. násobku. Přitom platí známé vzorce $f + g = g + f$,

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g\,, \quad \alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f \quad \text{apod.}$$

(Podtrhněme, že nemají smysl nelineární operace $\delta_T \,.\, \delta_T$, δ_0^3 atd.)

Pro distribuce lze dále zavést pojem derivace; snadno se pak dokáže, že každá distribuce f má derivaci f', která je rovněž distribucí. Odtud vyplývá, že *každá distribuce má derivace všech řádů.* Současně platí, že v případě, kdy f je regulární a příslušná funkce $f(t)$ má všude v $(-\infty, \infty)$ (obyčejnou) derivaci $f'(t)$, že potom distributivní derivace f' je opět regulární a je rovna $f'(t)$. Představuje tedy distributivní derivace zobecnění derivace obyčejné. Pro distributivní derivaci platí opět známý vzorec $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$. Dále lze dokázat důležitý vzorec $H_T' = \delta_T$.

Pro distribuce ze systému $\mathbf{D}$ lze konečně zavést pojem primitivní distribuce $f^{(-1)}$; přitom pro každou $f \in \mathbf{D}$ platí vzorec $(f')^{(-1)} = (f^{(-1)})' = f$. Speciálně tedy je $H_T = \delta_T^{(-1)}$. Je-li $f \in \mathbf{D}$ regulární distribuce, pak též $f^{(-1)}$ je regulární a je rovna $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$; je tedy primitivní distribuce zobecněním určitého integrálu.

Nyní můžeme již přikročit k definování pojmu (distributivního) řešení K-sítě a regularity. Zaveďme ještě rčení: je-li x nějaký r-dimensionální vektor, jehož prvky patří do množiny M, budeme říkat „x je vektor nad M".

Buď $N = (G, R, L, S)$ K-síť, a nechť a je incidenční matice grafu G; je-li E r-dimensionární vektor nad $\mathbf{D}$ a I_0, q_0 r-dimensionální číselné vektory, potom r-dimensionální vektor I nad $\mathbf{D}$ nazveme řešením N v časové oblasti příslušným vektorům E, I_0, q_0, jsou-li splněny následující podmínky:

T 1: $$c'\{RI + L(I' - I_0\delta_0) + S(I^{(-1)} + q_0 H_0)\} = c'E$$

pro každý cykl $c'h$ grafu G,

T 2: $$a'I = 0\,.$$

K-síť N nazveme regulární v časové oblasti (t-regulární), jestliže ke každé trojici E, I_0, q_0 je příslušný vektor I určen jednoznačně.

Poznámka: Všimněme si, že rov. T 1 je v podstatě rovnicí T 1*, na jejíž pravé straně stojí místo E člen $E + LI_0\delta_0$. Je tedy vliv počáteční podmínky I_0 stejný, jako vliv „impulsů" $LI_0\delta_0$ v elektromotorických silách, které „vyženou" proudy na příslušné počáteční hodnoty. Rovnice T 1 se od T 1* liší ještě tím, že platí pro každý cykl $c'h$; je však zřejmé, že kdybychom požadovali platnost T 1 jen pro každý obvod $d'h$. že by odtud plynula ihned její platnost pro každý cykl. (Vzpomeňme, že každý cykl je lineární kombinací obvodů.)

Věnujme ještě několik slov tomu, jaký význam má definice pojmu řešení rovnicemi T 1, T 2. Předně, jak uvidíme později, zaručuje definice T 1, T 2 existenci řešení pro každou trojici E, I_0, q_0, splňují-li matice a, R, L, S jisté, poměrně slabé podmínky. Podtrhněme, že pak řešení existuje pro každé E, nikoli jen pro ty vektory E, které mají

„dobré vlastnosti“, jak by tomu bylo, kdybychom vycházeli z rovnic T 1*, T 2* a žádali spojitost $I(t)$ apod. (Srovnej s uvedeným příkladem sítě z obr. 2!) Dále lze snadno ukázat, že *jestliže nějaká síť N má řešení ve smyslu rovnic* T 1*, T 2*, *že toto („klasické“) řešení je zároveň řešením i ve smyslu definice* T 1, T 2. Konečně lze dokázat, že řešení podle T 1, T 2 má jisté vlastnosti spojité závislosti na E; odtud pak je možno snadno vyvodit, že námi zavedený pojem řešení podle T 1, T 2 skutečně vystihuje fysikální podstatu věci, a že tedy definice podle T 1, T 2 není zvolena jen pro pohodlné matematické zpracování problému. (Bližší poučení o tom nalezne čtenář v [3].)

Pojem t-regularity zřejmě značí fysikálně to, že ať jsou průběhy vložených elektromotorických sil a hodnoty počátečních podmínek jakékoli, je proudový režim v síti určen jednoznačně, tj. proudy se rozvinou jen jedním, zcela určitým způsobem.

Zaveďme nyní další pojem regularity K-sítě! Buď $\mathbf{R}$ systém všech racionálních funkcí proměnné p, které mají reálné koeficienty.

Buď $N = (G, R, L, S)$ K-síť; N nazveme regulární ve frekvenční oblasti (nebo p-regulární), jestliže pro každý r-dimensionální vektor $\bar{E}$ nad $\mathbf{R}$ existuje jediný r-dimensionální vektor $\bar{I}$ nad $\mathbf{R}$ tak, že jsou splněny podmínky:

F 1: $$c'(R + pL + p^{-1}S)\,\bar{I} = c'\bar{E}$$

pro každý cykl $c'h$ grafu G,

F 2: $$a'\bar{I} = 0\,.$$

Všimněme si opět fysikálního smyslu vyslovené definice! Pojímáme-li proměnnou p jako komplexní kmitočet, pak zřejmě každý prvek pL_{ik} matice pL má význam impedance vzájemné indukčnosti L_{ik} (vlastní indukčnosti pro $i = k$); analogicky prvky matice $p^{-1}S$ mají význam impedance kondensátorů, a prvky R význam impedance odporů. Podmínky F 1, F 2 nepředstavují tedy nic jiného, než formulaci Kirchhoffových zákonů v symbolickém tvaru.

Přistupme nyní k výkladu souvislostí mezi t-regularitou a p-regularitou! Předně uveďme, že pro „skoro všechny“ distribuce ze systému $\mathbf{D}$ lze definovat pojem Laplaceova obrazu, a to tak, že v případě, kdy $f \in \mathbf{D}$ je regulární, je $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ (tj. definovaný obraz je roven obyčejnému Laplaceovu obrazu). Přitom platí obdobné vzorce jako pro Laplaceovu transformaci funkcí, například je $\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathscr{L}(f) + \beta\mathscr{L}(g)$, $\mathscr{L}(f') = p\mathscr{L}(f)$, $\mathscr{L}(f^{(-1)}) = p^{-1}\mathscr{L}(f)$, $\mathscr{L}(\delta_0) = 1$ a konečně z rovnosti $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$ plyne $f = g$.

Transformujeme-li rovnice T 1, T 2, dostaneme

$$\begin{aligned} &c'(R + pL + p^{-1}S)\,\mathscr{L}(I) = c'(\mathscr{L}(E) + LI_0 - p^{-1}Sq_0)\,, \\ &a'\mathscr{L}(I) = 0\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Poznámka: Všimněme si, že rov. (1.3) dostaneme též tak, že transformujeme formálně rovnice T 1*, T 2*, kde klademe $\mathscr{L}(\mathrm{d}I(t)/\mathrm{d}t) = p\mathscr{L}(I) - I_0$, tj. tak, jako kdybychom počítali známým způsobem s funkcemi a nikoli s distribucemi. Této okolnosti můžeme využít při výpočtu konkrétních případů.

Z rovnic (1.3) vyplývá, že v podstatě nejde o nic jiného, než o rovnice F 1, F 2. Ježto pak Laplaceova transformace zprostředkuje jedno-jednoznačné přiřazení distribuce – obraz, plyne odtud, že rovnice F 1, F 2 budou mít pro každý vektor $\bar{E}$ jednoznačné řešení právě tehdy, kdy tuto vlastnost budou mít i rovnice T 1, T 2.

Poznamenejme ještě, že Laplaceova transformace není zrovna nejelegantnějším a dostatečně obecným aparátem k exaktnímu rozboru právě naznačených souvislostí. Její nevýhodou je například to, že regulární distribuce $f = H_0 \exp t^2$ už nemá obraz, takže souvislost mezi F 1, F 2 a T 1, T 2 bychom mohli sledovat jen pro ty případy, kdy prvky vektoru E nad $\mathbf{D}$ mají obrazy. Vhodným aparátem k tomuto cíli jsou Heavisideovy operátory; poučení o tom viz například v práci [2].

Shrneme-li naznačené skutečnosti, dospíváme tak k následujícímu tvrzení: (Jeho důkaz viz [1].)

Věta 1.1. *K-síť N je t-regulární tehdy a jen tehdy, když je p-regulární.*

Jinými slovy, věta 1.1 tvrdí, že podaří-li se nám jednoznačně rozřešit algebraickou soustavu rovnic F 1, F 2 pro každé $\bar{E}$ nad $\mathbf{R}$, že potom též soustava „integrodiferenciálních" rovnic T 1, T 2 má pro každé E, I_0, q_0 jediné řešení. Proto budeme v dalším místo označení „p-, t-regulární" užívat pouze označení „regulární".

Mezi t- a p-oblastí existují další úzké souvislosti; platí totiž následující

Věta 1.2. *Buď N regulární K-síť; buď dále $\bar{E}$ r-dimensionální číselný vektor a $\bar{I}(p)$ příslušné řešení N v p-oblasti ($\bar{I}(p)$ je vektor nad $\mathbf{R}$). Potom pro každé (komplexní) číslo $\tilde{p} \neq 0$, pro které má vektor $\bar{I}(\tilde{p})$ smysl, je vektor $J = \bar{I}(\tilde{p})\, H_0 \exp(\tilde{p}t)$ řešením N v časové oblasti, které odpovídá vektoru elektromotorických sil $E = \bar{E}H_0 \exp(\tilde{p}t)$ a počátečním podmínkám $J_0 = I(\tilde{p})$, $q_0 = I(\tilde{p})/\tilde{p}$.*

Další souvislost, používající pojmu Laplaceovy transformace distribucí, je obsažena ve tvrzení:

Věta 1.3. *Buď N regulární K-síť; buď dále E_k r-dimensionální vektor, $E_k^{\backprime} = [0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ (jednotka stojí na k-tém místě), a $I_k(p)$ příslušné řešení N v p-oblasti. Pak platí: je-li $e \in \mathbf{D}$, potom pro řešení J sítě N v t-oblasti, příslušné vektoru elektromotorických sil $E_k e$ a nulovým počátečním podmínkám ($J_0 = q_0 = 0$) platí $\mathscr{L}(J) = I_k(p)\, \mathscr{L}(e)$.*

Předchozí věta zřejmě není nic jiného, než precisací známého pravidla o vztahu mezi signálem, odezvou a přenosovou funkcí.

Z hlediska aplikací v elektrotechnice je důležitá následující, další definice regularity: Buď $N = (G, R, L, S)$ K-síť. Buď $\omega > 0$. N se nazývá ω-regulární, jestliže ke každému komplexnímu r-dimensionálnímu vektoru E existuje jediný komplexní r-dimensionální vektor I tak, že jsou splněny podmínky

$$\Omega\,1: \qquad c^{\backprime}(R + i\omega L + (i\omega)^{-1} S)\, I = c^{\backprime} E$$

pro každý cykl $c`h$ grafu G,

Ω 2: $$a`I = 0 .$$

Podívejme se nejdříve na fysikální význam vyslovené definice! Mějme tedy dánu nějakou K-síť N; předpokládejme, že všechny vložené elektromotorické síly mají průběh $e_k = E_k \cos(\omega t + \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ (ω, E_k, φ_k jsou reálná čísla) a hledejme „ustálené" proudy, tj. předpokládejme, že tyto mají opět tvar $i_k = I_k \cos(\omega t + \psi_k)$. Vektor elektromotorických sil e možno zřejmě psát ve tvaru $e = \operatorname{Re} E \exp(i\omega t)$, kde E je obecně komplexní vektor, a stejně tak pro vektor proudů $\tilde{\imath}$ možno klást $\tilde{\imath} = \operatorname{Re} I \exp(i\omega t)$. Ježto však $\mathrm{d}\tilde{\imath}/\mathrm{d}t = \operatorname{Re} i\omega I \exp(i\omega t)$ a vektor q_0 je možno volit tak, že $\int_0^t \tilde{\imath}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + q_0 = \operatorname{Re}(i\omega)^{-1} I \exp(i\omega t)$, dostaneme dosazením do T 1*:

$$(1.4) \qquad c`\{R \operatorname{Re} Ie^{i\omega t} + L \operatorname{Re} i\omega Ie^{i\omega t} + S \operatorname{Re}(i\omega)^{-1} Ie^{i\omega t}\} = c` \operatorname{Re} Ee^{i\omega t} .$$

Ježto však c je reálný vektor a R, L, S jsou reálné matice, je lehko vidět, že rov. (1.4) je ekvivalentní rovnici

$$c`\{R + i\omega L + (i\omega)^{-1} S\} I = c`E ,$$

což však je Ω 1. Podobně dosazením do T 2* máme $a` \operatorname{Re} I \exp(i\omega t) = 0$, a ježto $a$ je reálná matice, plyne stejným způsobem $a`I = 0$, tj. Ω 2. Můžeme tedy říci tolik: pro zvolené $\omega > 0$ značí ω-regularita K-sítě N, že v N panuje sinusový režim proudů o kmitočtu ω, jsou-li všechny zdroje sinusové s týmž kmitočtem, ale jinak s libovolnými amplitudami a fázemi. Jinými slovy, v N nenastávají resonance pro zvolený kmitočet ω.

Abychom mohli odvodit explicitní kriteria regularity K-sítí, (srv. [1]), upravíme rovnice F 1, F 2. (Stačí uvažovat jen tyto rovnice, neboť jak už víme, jsou ekvivalentní rovnicím T 1, T 2). Protože pro každý cykl $c`h$ grafu $G$ platí $a`c = 0$, můžeme psát $c = Xv$, kde sloupce matice X tvoří nějakou úplnou soustavu lineárně nezávislých řešení rovnice $a`x = 0$, a kde v je číselný vektor dimense n (n je počet sloupců matice X).

Stejným způsobem z rovnice F 2 plyne, že

$$(1.5) \qquad \bar{I} = Xw ,$$

kde w je n-dimensionální vektor, jehož prvky jsou racionálními funkcemi proměnné p (je vektorem nad $\boldsymbol{R}$). Odtud snadno vyplývá, dosadíme-li za c a za $\bar{I}$ z (1.5), že F 1, F 2 jsou ekvivalentní rovnici

$$(1.6) \qquad X`(R + pL + p^{-1}S) Xw = X`\bar{E} .$$

Všimneme-li si konečně, že rov. Ω 1 dostaneme z F 1 formálně tak, že klademe $p = i\omega$, vidíme, že kriterium pro ω-regularitu dostaneme z kriteria regularity formální substitucí $p = i\omega$. Ježto o unicitě řešení rovnice (1.6) rozhoduje čtvercová matice $X`(R + pL + p^{-1}S) X$, dospíváme tak tvrzení:

Věta 1.4. *Buď $N = (G, R, L, S)$ K-síť, a incidenční matice grafu G. Buď dále X číselná matice, jejíž sloupce tvoří některou úplnou soustavu lineárně nezávislých řešení rovnice $a'x = 0$, a nechť $Z(p) = R + Lp + Sp^{-1}$. Potom platí*

a) *N je regulární tehdy a jen tehdy, když*

$$\det X'Z(p)\, X \not\equiv 0\,, \tag{1.7}$$

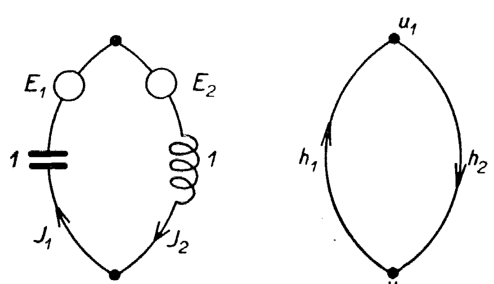
(*není roven nule identicky*)

b) *N je ω-regulární pro zvolené $\omega > 0$ tehdy a jen tehdy, když číslo*

$$\det X'Z(i\omega)\, X \neq 0\,. \tag{1.8}$$

Učiňme na tomto místě jednu důležitou poznámku. Jak víme, $c'h$ je pro každé řešení rovnice $a'c = 0$ cyklem; cyklem je však též každý obvod grafu G. Ježto podle tvrzení věty lze za X vzít libovolnou matici, jejíž sloupce tvoří úplnou soustavu lineárně nezávislých řešení rovnice $a'x = 0$, můžeme za X vzít onu matici, jejíž sloupce odpovídají úplné soustavě lineárně nezávislých obvodů grafu G. To má ten praktický význam, že v konkrétních případech můžeme matici X sestavit ihned z náčrtu grafu G (pokud ovšem tento není složitým neplanárním grafem.) Tak v příkladě z obr. 1 tvoří $h_1 + h_2 - h_3$, $h_3 + h_4$ úplnou soustavu lineárně nezávislých obvodů; můžeme tedy ihned psát

$$X = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 0 \\ -1, & 1 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$



Obr. 3.

Z věty 1.4 snadno vyplývá souvislost mezi regularitou a ω-regularitou K-sítě. Platí totiž

Věta 1.5. *Je-li K-síť N ω-regulární pro některé $\omega > 0$, pak N je regulární.*

Vskutku, podíváme-li se znovu na tvrzení věty 1.4, vidíme toto: $\det X'Z(p)\, X$ je zřejmě racionální funkcí proměnné p; je-li N ω-regulární pro některé $\omega > 0$, tj. je-li $\det X'Z(i\omega)\, X \neq 0$, nemůže být funkce $\det X'Z(p)\, X$ identicky rovná nule. Odtud zároveň vyplývá, že tvrzení věty 1.5 nelze obrátit. To ostatně ukazuje i následující jednoduchý příklad; uvažujme K-síť N_1 (dokonce pasivní), která je spolu se svým grafem znázorněna na obr. 3. Ve frekvenční oblasti můžeme podle F 1, F 2 psát rovnice

$$p^{-1}I_1 + pI_2 = E_1 + E_2\,, \quad (\text{pro obvod } h_1 + h_2)\,,$$
$$-I_1 + I_2 = 0\,, \quad (\text{pro uzel } u_2)\,.$$

Jejich řešení je $I_1 = I_2 = (E_1 + E_2)\, p/(p^2 + 1)$, a tedy síť N_1 je regulární. N_1 však není ω-regulární pro $\omega = 1$; položíme-li totiž $\omega = 1$, máme podle Ω 1, Ω 2 soustavu

$$- iI_1 + iI_2 = E_1 + E_2 \,, \quad - I_1 + I_2 = 0 \,,$$

která zřejmě nemá řešení, pokud $E_1 + E_2 \neq 0$.

Poznámka: Nechť čtenář není předchozím příkladem sveden k domněnce, že uvažovaná síť N_1 nemá řešení v t-oblasti, jestliže $E_1 + E_2 = \sin t$! Řešení přirozeně existuje (N_1 je regulární), nemá však tvar $A \sin (t + \psi)$.

Abychom mohli uvést další kritéria regularity, proveďme následující úvahu. Lze ukázat (srv. [1]), že soustava F 1, F 2 je ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} Z(p)\, \bar{I} + aV &= \bar{E} \,, \\ a'\bar{I} &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

v tom smyslu, že ke každému řešení $\bar{I}$ soustavy F 1, F 2 existuje s-dimensionální vektor V nad $\mathbf{R}$ (s je počet uzlů grafu sítě) takový, že $\bar{I}$, V je řešením soustavy (1.9) a obráceně, tj. je-li $\bar{I}$, V řešením (1.9), potom vektor $\bar{I}$ je řešením rovnic F 1, F 2. Zvolme dále nějakou úplnou soustavu $\mathfrak{S}$ lineárně nezávislých sloupců incidenční matice a; vypustíme-li z a všechny sloupce, které nepatří do $\mathfrak{S}$, dostaneme matici d. Dá se dokázat, že je-li $\bar{I}$ jediné řešení rovnic F 1, F 2, potom V v (1.9) je určeno jednoznačně, předepíšeme-li těm složkám vektoru V, které odpovídají sloupcům vypuštěným z a nulovou hodnotu.

Fysikálně vyjadřuje soustava (1.9) rovnováhu napětí v jednotlivých větvích sítě: rozdíl elektromotorické síly vložené do větve a úbytku napětí na impedanci větve se rovná potenciálnímu rozdílu mezi koncovým a počátečním uzlem větve. (Mají tedy složky vektoru V význam potenciálu v jednotlivých uzlech.) Vypuštění lineárně závislých sloupců z matice a značí pak uzemění jednoho uzlu v každé komponentě sítě. (O komponentách zmíníme se blíže později.)

Odtud je zřejmé, že regularita sítě je ekvivalentní s jednoznačnou řešitelností soustavy

$$\begin{aligned} Z(p)\, \bar{I} + \mathrm{d}\tilde{V} &= E \,, \\ d'\bar{I} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Použijeme-li navíc ještě formální souvislosti mezi regularitou a ω-regularitou, můžeme vyslovit tvrzení:

Věta 1.6. *Buď $N = (G, R, L, S)$ K-síť, a incidenční matice grafu G; buď dále d matice, jejíž sloupce tvoří úplnou soustavu lineárně nezávislých sloupců matice a. Nechť $Z(p) = R + Lp + Sp^{-1}$; pak platí:*

a) *N je regulární tehdy a jen tehdy, když*

$$\det \left[\begin{array}{c|c} Z(p) & d \\ \hline d' & 0 \end{array}\right] \neq 0 \,. \tag{1.11}$$

b) *N je ω-regulární pro zvolené* $\omega > 0$ *tehdy a jen tehdy, když číslo*

$$\det \left[\begin{array}{c|c} Z(i\omega) & d \\ \hline d' & 0 \end{array}\right] \neq 0 . \tag{1.12}$$

V dalším budeme potřebovat ještě tuto nutnou a postačující podmínku ω-regularity K-sítě:

Věta 1.7. *Buď* $N = (G, R, L, S)$ *K-síť,* $\omega > 0$. *Potom N není ω-regulární tehdy a jen tehdy, když existuje obvod* $d'h = \sum_{i=1}^{r} d_i h_i \neq 0$ *a řešení* $I = [I_1, I_2, \ldots, I_r]'$ *rovnic* Ω 1, Ω 2, *kde klademe* $E = 0$, *takové, že* $I_i \neq 0$ *právě když* $d_i \neq 0$.

Fysikálně říká věta 1.7 zhruba toto: ω-regularita sítě je ekvivalentní s tím, že v žádném obvodu sítě bez zdrojů napětí nemůže trvale téci proud (máme na mysli sinusové průběhy napětí a proudů) s kruhovým kmitočtem ω.

Až dosud hovořili jsme většinou o obecných K-sítích. Všimněme si nyní blíže pasivních K-sítí. Okolnost, že matice R, L, S, příslušné pasivní K-síti, jsou positivně semidefinitní, umožňuje vyslovit podmínky regularity v mnohem jednodušší formě, než jsou věty 1.5, 1.6, 1.7. Než tyto podmínky uvedeme, zmiňme se alespoň několika slovy o matematickém pozadí těchto skutečností! Jak jsme viděli, pro pojem regularity hraje důležitou roli matice $Z(p) = R + Lp + Sp^{-1}$. Jsou-li nyní matice R, L, S positivně semidefinitní, pak je zřejmé, že pro každé komplexní číslo p, které má kladnou reálnou část, je též číselná matice $\mathrm{Re}\,(R + Lp + Sp^{-1})$ positivně semidefinitní. Tato okolnost vede k definování jisté třídy matic $A(p)$, jejichž prvky jsou racionálními funkcemi p s reálnými koeficienty, pro které $\mathrm{Re}\,A(p)$ je positivní semidefinitní maticí pro každé $\mathrm{Re}\,p > 0$. ($Z(p)$ tedy patří do této třídy.) Rozbor vlastností takových matic $A(p)$ poskytuje pak četné užitečné výsledky, zejména podmínky, za kterých existuje $A^{-1}(p)$. Tyto vlastnosti nebudeme zde blíže uvádět (čtenář je nalezne v [1]), ale podáme hned některé výsledky jejich aplikací na problematiku pasivních K-sítí. Tak lze dokázat, že platí:

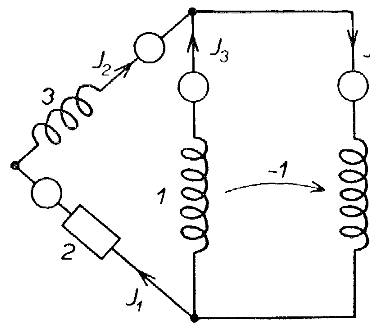
Věta 1.8. *Pasivní K-síť* (G, R, L, S) *je regulární tehdy a jen tehdy, když pro každý nenulový cykl* $c'h$ *grafu G platí*

$$c'(R + L + S)\,c > 0 . \tag{1.13}$$

Věta 1.9. *Pasivní K-síť* (G, R, L, S) *je regulární tehdy a jen tehdy, když pro každý nenulový cykl* $c'h$ *grafu G je splněna aspoň jedna z podmínek.*

$$c'Rc > 0 , \quad c'Lc > 0 , \quad c'Sc > 0 . \tag{1.14}$$

Všimněme si blíže toho, jaký je fysikální význam tvrzení věty 1.9! Jak víme, je-li $c'h$ cykl, vyhovuje vektor c rovnici $a'c = 0$. Můžeme tedy na c pohlížet jako na vektor proudů (třeba stejnosměrných), které mohou téci v síti, nepřihlížíme-li k jejím elementům R, L, C, ale jen k její struktuře. Podobně můžeme na c pohlížet jako na vektor nábojů na kondensátorech, které by byly zařazeny v každé větvi sítě a byly nabity proudy, které mohou téci danou strukturou. (Vzpomeňme, že platí $q = \int_0^t i(\tau)\, d\tau$.) Potom však číslo $c'Rc$ má význam Jouleova tepla, vyvinutého v odporech sítě za 1 sec., je-li rozdělení proudů dáno vektorem c, a $c'Lc$ má význam magnetické energie cívek. Obdobně číslo $c'Sc$ má význam elektrostatické energie kondensátorů, jejichž náboje jsou dány vektorem c. Věta 1.9 tedy tvrdí, že pasivní K-síť je regulární právě tehdy, když pro jakékoli rozdělení proudů a nábojů, dané strukturou sítě, je aspoň jedna z uvažovaných energií kladná.



Obr. 4.

Uveďme si ještě jednoduchý příklad. Máme rozhodnout, zda K-síť N_2, jejíž schéma je uvedeno na obr. 4 (která je zřejmě pasivní), je regulární. Je lehko vidět, že graf, uvedený na obr. 1, je grafem sítě N_2. Ze schématu je patrno, že

$$R + L + S = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvážíme-li cykl $h_3 + h_4$, pro který $c' = [0, 0, 1, 1]$, snadno se přesvědčíme, že $c'(R + L + S)\, c = 0$. Podle věty 1.8 síť N_2 tedy není regulární.

Poznamenejme, že ve větách 1.8, 1.9 není obecně možno nahradit slovo „cykl" slovem „obvod". Tato okolnost má svůj původ v tom, že matice L obecně není diagonální. Zavedeme-li však tento předpoklad, pak platí:

Věta 1.10. *Buď $N = (G, R, L, S)$ pasivní K-síť, a nechť L je diagonální; pak N je regulární tehdy a jen tehdy, když pro každý (nenulový) obvod $d'h$ platí jedna z podmínek*

$$d'Rd > 0\,, \quad d'Ld > 0\,, \quad d'Sd > 0\,. \tag{1.15}$$

Všimněme si nyní této okolnosti: jsou-li matice R, L, S positivně semidefinitní a diagonální, nutně platí $R_{ii} \geqq 0$, $L_{ii} \geqq 0$, $S_{ii} \geqq 0$, $i = 1, \ldots, r$. Ježto však $d'Rd = \sum_{i=1}^{r} R_{ii} d_i^2$ a podobně pro L, S, vyplývá z (1.15), že větu 1.10 můžeme formulovat v následující jednoduché formě:

Buď N pasivní K-síť, ve které nejsou vzájemné induktivní vazby; potom N je regulární tehdy a jen tehdy, když v každém jejím obvodu je zařazen aspoň jeden odpor, nebo kondensátor, nebo cívka. (Přirozeně nenulové.)

Otázku regularity pasivní K-sítě lze rozhodnout i čistě algebraickými metodami; platí totiž následující

Věta 1.11. *Buď $N = (G, R, L, S)$ pasivní K-síť, a incidenční matice grafu G; pak N je regulární tehdy a jen tehdy, když hodnost matice*

$$[a \mid R \mid L \mid S] \tag{1.16}$$

je rovna počtu jejích řádků. Nadto platí, že místo matice (1.16) lze vzít matici

$$[a \mid R + L + S]\,. \tag{1.17}$$

Tak v příkladě sítě N_2 z obr. 4, má matice (1.17) tvar

$$M = \begin{bmatrix} -1, & 1, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0, & 0, & 3, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & -1 \\ 1, & 0, & -1, & 0, & 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Z (1.18) je lehko vidět, že každý sloupec matice M je lineární kombinací čtvrtého, pátého a šestého sloupce (které jsou lineárně nezávislé), takže rank $M = 3 < 4$ a tedy podle věty 1.11 síť N_2 není regulární.

Uveďme nyní některé podmínky pro to, aby síť byla ω-regulární pro každé $\omega > 0$. Je-li $N = (G, R, L, S)$ nějaká pasivní K-síť, řekneme, že N je disipativní K-síť, jestliže pro každý nenulový obvod $d'h$ platí $d'Rd > 0$, tj. jestliže v každém obvodu sítě se vyskytuje alespoň jeden nenulový ohmický odpor.

Podívejme se zároveň na to, co značí uvedená podmínka fysikálně! Předně lze ukázat, že uvedená podmínka je ekvivalentní podmínce $c'Rc > 0$ pro každý nenulový cykl $c'h$. Ježto však vektor c možno interpretovat (srv. výše) jako vektor okamžitých hodnot proudů, značí to, že ať je v disipativní síti jakékoliv nenulové rozdělení proudů, vždy se energie spotřebovává v Jouleovo teplo.

Pak lze dokázat (srv. [1]), že platí

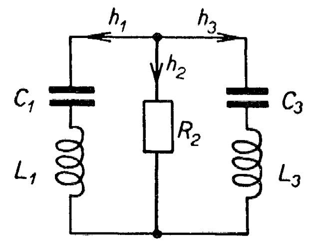
Věta 1.12. *Každá disipativní K-síť je ω-regulární pro každé $\omega > 0$.*

Všimněme si současně, že podle věty 1.5 pak platí, že *každá disipativní síť je zároveň regulární.*

V [4] bylo dokázáno, že síť je ω-regulární pro každé $\omega > 0$, jakmile matice R má v diagonále vesměs kladné prvky. Fysikálně to znamená, že v každé větvi sítě je zapojen kladný ohmický odpor. V práci [1] byl tento předpoklad oslaben podle věty 1.12, tj. k tomu, aby síť byla ω-regulární pro každé $\omega > 0$, stačí pouze to, aby v každém obvodu sítě byl zapojen kladný ohmický odpor. Následující tvrzení ukazuje že v oslabování uvedené postačující podmínky již nelze tímto směrem pokračovat.

Věta 1.13. *Buď G orientovaný graf, R diagonální matice s nezápornými prvky. Existuje-li nenulový obvod $d'h = \sum_{i=1}^{r} d_i h_i$, pro nějž $d'Rd = 0$, potom ke každému $\omega > 0$ lze najít diagonální matice L, S s nezápornými prvky takové, že pasivní K-síť (G, R, L, S) není ω-regulární, při čemž $L_{ii} > 0$, $S_{ii} > 0$, jakmile $d_i \neq 0$.*

Jako příklad vyšetřujme síť N na obr. 5. R_2 je dané kladné číslo, L_1, C_1, L_3, C_3 jsou zatím neurčená kladná čísla. N je zřejmě pasivní K-síť, jejíž obvod $h_1 - h_3$ neobsahuje ohmický odpor. Nechť je dáno $\omega > 0$. Zvolme kapacity a indukčnosti sítě tak, aby platilo: $C_1 L_1 \omega_1^2 = C_3 L_3 \omega_1^2 = 1$. Podle věty 1.7 N není ω-regulární, protože $I = [I_1, 0, -I_1]'$, kde I_1 je libovolné komplexní číslo, je zřejmě řešením sítě N pro $E = 0$. Tento příklad, kromě toho, že ilustruje větu 1.13, zároveň ukazuje, že k ω-regularitě sítě pro každé $\omega > 0$ nestačí, aby pro každý obvod z nějaké úplné soustavy lineárně nezávislých obvodů platilo $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 R_{ii} > 0$, tj. aby v každém takovém obvodu byl zapojen kladný ohmický odpor. Skutečně, obvody $h_1 - h_2$, $h_2 - h_3$ tvoří úplnou soustavu lineárně nezávislých obvodů, v každém z nich je zapojen odpor $R_2 > 0$, a přesto N není ω-regulární pro každé $\omega > 0$.



Obr. 5.

Zaveďme nyní několik pojmů, které jsou běžné v teorii grafů a jsou nezbytné pro další výklad. Nechť je dán graf G a jeho podgraf G^*. G^* se nazývá řetězcem, když všechny hrany z G^* můžeme srovnat (po případném přeorientování) v takovou posloupnost $\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_n}\}$, že $h_{i_j} \neq h_{i_k}$ pro $j \neq k$ a koncový uzel hrany h_{i_m} je začátečním uzlem hrany $h_{i_{m+1}}$ pro $m = 1, \ldots, n - 1$. (Zřejmě každý obvod je řetězcem.)

Graf G se nazývá souvislý, když každé jeho dva uzly můžeme spojit řetězcem. Maximální souvislý podgraf G^* grafu G se nazývá komponenta grafu G (maximální v tom smyslu, že jakmile $\bar{G}$ je souvislý podgraf obsahující G^*, potom $\bar{G} = G^*$).

Konečně souvislý podgraf G^* grafu G takový, že neobsahuje obvody, se nazývá stromem.

Snadno se dokáže věta, která charakterizuje disipativnost sítě.

Věta 1.14. *Buď $N = (G, R, L, S)$ pasivní K-síť. Nutná a postačující podmínka pro to, aby N byla disipativní, je, aby existoval podgraf G_1 grafu G s těmito vlastnostmi:*

1) *Komponenty podgrafu G_1 jsou stromy.*

2) *Jakmile větev h_i grafu G nepatří do G_1, potom $R_{ii} > 0$.*

Fyzikální smysl věty 1.14 spočívá v následujícím: Skutečnost, že v každém obvodu souvislé sítě je zapojen ohmický odpor, je ekvivalentní s tím, že všechny větve, které neobsahují ohmický odpor, tvoří strom. (U složitějších grafů zjistíme, zda daný podgraf je stromem, tak, že se přesvědčíme, je-li počet uzlů podgrafu roven počtu hran zvětšenému o jedničku (srv. [4]).)

Např. síť na obr. 5 není disipativní, protože podgraf sestávající z větví h_1 a h_3 není stromem.

P o z n á m k a: Čtenáři se možná bude zdát, že z praktického hlediska je nadnesena ta okolnost, že uvažujeme obecně sítě, jejichž grafy nejsou souvislé. Není však tomu tak; existují i velmi „rozumné“ případy sítí, jejichž grafy nejsou souvislé, přičemž však mezi jednotlivými částmi sítě existují induktivní vazby. Je zřejmé, že takovou síť není možno vyšetřovat tak, že by se vyšetřovala každá její část odděleně.

Uveďme ještě jednu nutnou a postačující podmínku pro ω-regularitu pasivní K-sítě, která je jakýmsi zjednodušením podmínky (1.12).

Tuto podmínku odvodíme tak, že postupně zjednodušujeme soustavu rovnic

$$(1.19)\qquad \begin{aligned} Z(i\omega)\, I + aV &= 0\,, \\ a' I &= 0\,, \end{aligned}$$

kde $Z(i\omega) = R + i\omega L + (i\omega)^{-1} S$, I, V je komplexní vektor proudů ve větvích resp. potenciálů v uzlech a a je incidenční matice grafu dané sítě. Při tom podstatně využíváme toho, že v síti bez zdrojů elektromotorických sil nemůže trvale téci proud v těch větvích, kde je zapojen ohmický odpor. Tím z první soustavy rovnic (1.19) vymizí ty, které odpovídají větvím s ohmickými odpory a bez vzájemných indukčností. Dále zmenšíme počet neznámých v rovnicích (1.19) tím, že proudy a potenciální rozdíly ve větvích s ohmickými odpory položíme rovny nule, a že v každé komponentě sítě uzemníme jeden uzel, jehož potenciál položíme rovným nule. Tak soustavu (1.19) převedeme na ekvivalentní soustavu

$$(1.20)\qquad Bx = 0\,.$$

Přesněji řečeno, matice B je definována takto: Budiž $N = (G, R, L, S)$ pasivní K-síť, a nechť a je incidenční matice grafu G. Budiž G_1 podgraf G s touto vlastností: hrana h_i patří do G_1 právě tehdy, když $R_{ii} > 0$, $L_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, r$. Nechť G_{1j}, $j = 1, 2, \dots, r_1$, jsou komponenty grafu G_1. Pro každé $j = 1, 2, \dots, r_1$ sečteme všechny sloupce matice a, pro něž odpovídající uzly leží v G_{1j}. Sloupce, které vzniknou tímto sčítáním, označme $b_1, \dots, b_{r_1}$. Označme dále $b = (b_1, \dots, b_{r_1}, b_{r_1+1}, \dots \dots, b_{r_1+r_2})$, kde b_{r_1+j}, $j = 1, \dots, r_2$, jsou sloupce matice a odpovídající těm uzlům grafu G, které nepatří do G_1.

V každé komponentě $\bar{G}_j$ grafu G zvolme jeden uzel u_{t_j}, $j = 1, \dots, r_3$. Vynecháme-li v matici b ty sloupce, které odpovídají uzlům u_{t_j}, $j = 1, \dots, r_3$, dostaneme matici $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{r_4})$ (může se stát, že množina sloupců matice $\bar{b}$ bude prázdná, tj. $r_4 = 0$).

Označme $\bar{a}$ matici, kterou dostaneme z matice a vypuštěním sloupců, které odpovídají uzlům u_{t_j}, $j = 1, \dots, r_3$.

Konečně vypusťme v matici

$$\begin{bmatrix} Z & \bar{b} \\ \bar{a}' & 0 \end{bmatrix},$$

kde $Z = R + i\omega L - i\omega^{-1} S$, i-tý řádek a i-tý sloupec $i = 1, \dots, r$, jakmile $R_{ii} > 0$, $L_{ij} = 0$ pro $j \neq i$, a vypusťme z ní i-tý sloupec, jakmile $R_{ii} > 0$.

Matici, kterou jsme tak dostali, označme B. Pak platí tvrzení:

Věta 1.15. *Buď $N = (G, R, L, S)$ pasivní K-síť, $Z = R + i\omega L - i\omega^{-1} S$, $\omega > 0$. Potom N je ω-regulární právě tehdy, jsou-li sloupce matice B lineárně nezávislé nebo je-li množina sloupců matice B prázdná.*

Vraťme se ještě k síti na obr. 5; sestrojíme-li pro tento případ matici B, dostaneme

$$B = \begin{bmatrix} i(\omega L_1 - \omega^{-1}C_1^{-1}) & 0 \\ 0 & i(\omega L_3 - \omega^{-1}C_3^{-1}) \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Je zřejmé, že sloupce matice B budou lineárně nezávislé právě tehdy, bude-li aspoň jeden z prvních dvou řádků matice B různý od nuly, tj. bude-li splněna aspoň jedna z nerovností $L_1C_1\omega^2 \neq 1$, $L_3C_3\omega^2 \neq 1$ (srv. s příkladem za větou 1.13).

Dále je vidět z konstrukce matice B, že při daném grafu sítě je B tím jednodušší, čím více ohmických odporů a čím méně vzájemných indukčností síť obsahuje. Tak např. pro síť bez vzájemných indukčností, která má v každé větvi kladný ohmický odpor, je množina sloupců matice B prázdná.

Dosud jsme se zabývali podmínkami řešitelnosti rovnic T_1, T_2 příp. F_1, F_2 příp. Ω_1, Ω_2, které se všechny vztahují na větvové proudy. Avšak v praksi se sítě častěji řeší metodami „smyčkových proudů" nebo „uzlových napětí". Ukážeme nyní, za jakých podmínek existuje jediné řešení pro smyčkové proudy nebo uzlová napětí.

Vyjdeme-li z rovnic F_1, F_2 (stejně bychom mohli vyjít z T_1, T_2 nebo Ω_1, Ω_2), je vektor w smyčkových proudů dán rovnicí $\bar{I} = Xw$, kde sloupce matice X odpovídají nějaké úplné soustavě lineárně nezávislých obvodů a $\bar{I}$ je r-dimensionální vektor (nad $\mathbf{R}$) větvových proudů. Protože sloupce matice X jsou lineárně nezávislé, odpovídá každému řešení $\bar{I}$ sítě právě jedno řešení w a obráceně, každému w odpovídá právě jedno $\bar{I}$. Odtud ihned plyne, že regularita sítě je ekvivalentní s tím, že existuje jediné řešení sítě metodou smyčkových proudů.

Metoda uzlových napětí vychází z rovnic (1.10), kde $\bar{I}$ je r-dimensionální vektor větvových proudů (nad $\mathbf{R}$), $\bar{E}$ r-dimensionální vektor elektromotorických sil (nad $\mathbf{R}$), d je matice sestavená z lineárně nezávislých sloupců matice a, jejichž počet je $s - p^*$, kde p^* je počet komponent grafu dané sítě, a složky $s - p^*$-dimensionálního vektoru $\tilde{V}$ (nad $\mathbf{R}$) představují uzlová napětí. Předpokládejme, že $\det Z(p) \neq 0$, tedy že existuje $Z^{-1}(p)$. Potom z první rovnice soustavy (1.10) můžeme vypočítat

$$\bar{I} = Z^{-1}(p)\,(\bar{E} - d\tilde{V}) \tag{1.21}$$

a dosadit jej do druhé rovnice. Tím dostaneme pro $\tilde{V}$ rovnici

$$d'Z^{-1}(p)\,d\tilde{V} = d'Z^{-1}(p)\,\bar{E}\,. \tag{1.22}$$

Snadno se přesvědčíme, že každé řešení $\bar{I}, \tilde{V}$ soustavy rovnic (1.21), (1.22) je zároveň řešením soustavy (1.10) a obráceně. Z toho plyne, že má-li soustava (1.10) jediné řešení $\bar{I}, \tilde{V}$, je toto jediným řešením i pro soustavu (1.21), (1.22) a obráceně. Tedy za předpokladu $\det Z(p) \neq 0$ rovnice (1.21), (1.22) budou mít jediné řešení nad $\mathbf{R}$ právě tehdy, když $\det d'Z^{-1}(p)\,d \neq 0$. Odtud ihned plyne, že $\det d'Z^{-1}(p)\,d \neq 0$ právě tehdy, je-li síť regulární.

2. STABILITA A KOMPATIBILITA

Přistupme nyní k některým otázkám závislosti řešení K-sítě v časové oblasti na vložených zdrojích a počátečních podmínkách, tj. k problémům stability řešení a kompatibility počátečních podmínek. Nejdříve zaveďme některá označení. Vektor x (r-dimensionální) nad $\boldsymbol{D}$ nazveme C-vektorem, jestliže jej můžeme vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i \delta_0^{(i)} + \bar{x}\,, \tag{2.1}$$

kde $k \geqq 0$ je celé číslo, a_i, $i = 1, \ldots, k$, jsou konstantní vektory a kde složky $\bar{x}_k$ vektoru $\bar{x}$ jsou regulární distribuce, přičemž odpovídající funkce $\bar{x}_k(t)$ jsou spojité v intervalu $\langle 0, \infty)$. Fyzikálně si můžeme tedy složky vektoru x představit jako veličiny, jejichž časový průběh je dán spojitou funkcí, přičemž v bodě $t = 0$ jsou soustředěny impulsy. Dále budeme x nazývat regulárním C-vektorem, jestliže je možno x představit ve tvaru (2.1), kde vymizí všechna a_i (x tedy neobsahuje impulsy).

Je-li x nějaký C-vektor, klaďme pro $t \geqq 0$

$$\|x\|_t = \max_{k=1,\ldots,r} [|\bar{x}_k(t)|]\,. \tag{2.2}$$

Je-li konečně c nějaký číselný vektor o složkách $c_1, c_2, \ldots, c_r$, klaďme $\|c\| = \max_{i=1,\ldots,r} [|c_i|]$.

Buď nyní N nějaká pasivní K-síť a nechť I je její řešení v t-oblasti, příslušné vektoru elektromotorických sil E nad $\boldsymbol{D}$ a počátečním podmínkám I_0, q_0. Řešení I nazveme stabilním podle počátečních podmínek, jestliže jsou splněny následující podmínky: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé řešení I^* (v t-oblasti) odpovídající vektoru E a počátečním podmínkám I_0^*, q_0^*, které splňují nerovnosti $\|I_0 - I_0^*\| < \delta$, $\|q_0 - q_0^*\| < \delta$, je $I - I^*$ C-vektor a platí $\|I - I^*\|_t < \varepsilon$ pro každé $t \geqq 0$. Jestliže nadto platí $\|I - I^*\|_t \to 0$ pro $t \to \infty$, nazveme řešení I asymptoticky stabilní.

Dále definujme: Buď E regulární C-vektor; řešení I odpovídající vektorům E, I_0, q_0 nazveme stabilním podle zdrojů, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jsou splněny tyto podmínky: pro každé řešení I^* odpovídající vektorům E^*, I_0, q_0, kde E^* je regulární C-vektor splňující nerovnost $\|E - E^*\|_t < \delta$ pro každé $t \geqq 0$, platí $\|I - I^*\|_t < \varepsilon$ pro každé $t \geqq 0$.

Stabilita řešení I podle počátečních podmínek zřejmě fyzikálně značí to, že změníme-li málo počáteční podmínky, potom též průběh všech proudů v síti se na celé časové ose rovněž změní málo. Jde-li dokonce o asymptotickou stabilitu, znamená to, že s rostoucím časem se průběhy proudů blíží průběhům, odpovídajícím původním počátečním podmínkám; analogicky stabilita řešení podle zdrojů značí, že změníme-li na celé časové ose málo průběhy elektromotorických sil, že totéž platí o průbězích proudů.

Pomocí metod, založených na vlastnostech matic $A(p)$, pro něž Re $A(p)$ je positivně semidefinitní pro Re $p > 0$ (srv. výše), lze dokázat platnost následujících tvrzení (srv. [1]):

Věta 2.1. *Každé řešení regulární pasivní K-sítě je stabilní podle počátečních podmínek.*

Věta 2.2. *Každé řešení disipativní K-sítě je asymptoticky stabilní, a zároveň je stabilní podle zdrojů.*

Poznamenejme, že předpoklad disipativity nelze pro zachování stability podle zdrojů vypustit. To ukazuje příklad sítě N_1 na obr. 3, která není disipativní. Položíme-li $E_1 = E_2 = 0$, $q_1 = 0$, $I_{10} = I_{20} = 0$, pak řešení je zřejmě $I_1 = I_2 = 0$. Vezmeme-li však $E_1^* = E_2^* = A \sin t$ a nulové počáteční podmínky, dostaneme snadno $I_1^* = I_2^* = A\, t \sin t$; odtud však je zřejmé, že ať zvolíme $A > 0$ jakkoliv malé, vždy je možno najít tak velké $t > 0$, že $\|I - I^*\|_t > M$, kde $M > 0$ je libovolné předem zvolené číslo.

Přistupme nyní k problému kompatibility! Vyslovíme nejprve definici. Buď N regulární pasivní K-síť; trojici (E, I_0, q_0) budeme nazývat kompatibilní, jestliže jí příslušné řešení I sítě N je regulárním C-vektorem, pro který platí $I(0_+) = I_0$ (symbol $I(0_+)$ značí $\lim_{t \to 0+} I(t)$). Fyzikálně neznamená tedy kompatibilita nic jiného, než že proudy v síti vyjdou spojitě z předepsaných počátečních hodnot. Pojmem kompatibility vracíme se tak k otázkám, které jsme rozebírali úvodem paragrafu 1. Zde ovšem nám už nepůjde o problém definice řešení, nýbrž o nalezení podmínek pro vektory E, I_0, q_0, za kterých příslušné řešení bude mít „příjemnou vlastnost" $I(0_+) = I_0$.

Je-li $N = (G, R, L, S)$ regulární pasivní K-síť, a incidenční matice grafu G, označme opět X matici, jejíž sloupce tvoří úplnou soustavu lineárně nezávislých řešení rovnice $a'x = 0$, a buď $Z(p) = R + Lp + Sp^{-1}$. Matici $A(p)$, definovanou rovnicí

$$A(p) = X(X'Z(p)\,X)^{-1}\,X'\,, \tag{2.3}$$

budeme nazývat admitanční maticí sítě N. (Tato matice existuje, srv. s větou 1.4.) Konečně řekneme, že $A(p)$ nemá pól v nekonečnu, jestliže každý její prvek (což je racionální funkce p) nemá v nekonečnu pól. (Poznamenejme ještě, že pomocí matice $A(p)$ je možno snadno napsat vzorec pro řešení I, odpovídající trojici (E, I_0, q_0); platí totiž $\mathscr{L}(I) = A(p)\,\mathscr{L}(E + LI_0\delta_0 - Sq_0H_0)$.)

Nyní můžeme již vyslovit větu:

Věta 2.3. *Buď (G, R, L, S) regulární pasivní K síť, $A(p)$ její admitanční matice; buď dále E regulární C-vektor, E' (distributivní derivace) C-vektor, a nechť $E_0 = E(0_+)$, $E_1 = F(0_+)$, kde $F = E' - E_0\delta_0$. Potom trojice (E, I_0, q_0) je kompatibilní tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\lim_{p \to \infty} A(p)\,\{E_0 + E_1p^{-1} + LI_0p - Sq_0\} = I_0\,. \tag{2.4}$$

Nadto platí: Jestliže matice $A(p)$ nemá pól v nekonečnu, pak lze vypustit předpoklad, že E' je C-vektor, a v rovnici (2.4) lze vynechat člen E_1p^{-1}.

Předchozí větu doplníme ještě tvrzením:

Věta 2.4. *Buď (G, R, L, S) pasivní K-síť, a nechť pro každý nenulový cykl $c'h$ grafu G platí $c'(L + R)\, c > 0$; potom admitanční matice $A(p)$ nemá pól v nekonečnu.*

Tato věta ve spojení s předchozí ukazuje, že je-li pro síť uvažovaného typu kompatibilní trojice (E, I_0, q_0), že je kompatibilní též každá trojice (E^*, I_0, q_0), pro kterou $E(0_+) = E^*(0_+)$, tj. kompatibilita nezávisí na tom, kterak napětí zdrojů narůstají s časem z počáteční hodnoty $E(0_+)$.

Z obecné věty 2.3 lze odvodit některé speciální, ale důležité důsledky. Tak např. platí následující tvrzení:

Věta 2.5. *Buď (G, R, L, S) pasivní K-síť a nechť pro každý nenulový cykl $c'h$ grafu G platí $c'Lc > 0$; je-li E regulární C-vektor, pak každá trojice (E, I_0, q_0), kde vektor I_0 splňuje podmínku $a'I_0 = 0$ (a je incidenční matice G), je kompatibilní.*

(Fyzikální smysl podmínek $c'Lc > 0$ a $\dot{a}\, I_0 = 0$ je čtenáři jistě jasný.)

3. ROVNICE *K*-SÍTĚ VYŘEŠENÉ VZHLEDEM K NEJVYŠŠÍ DERIVACI

V tomto odstavci ukážeme, že rovnice T_1, T_2 z odstavce 1 lze převést na normální systém obyčejných lineárních diferenicálních rovnic s konstantními koeficienty, tj. systém vyřešený vzhledem k nejvyšší derivaci. Tím bude dána možnost použít při vyšetřování sítí metod, známých z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

Buď $\bar{\mathbf{D}}$ systém všech Schwartzových distribucí na $(-\infty, \infty)$ (na rozdíl od distribucí z třídy $\mathbf{D}$ zavedených v 1. odstavci nemusí být rovny nule v intervalu $(-\infty, 0)$). Nechť $N = (G, R, L, S)$ je pasivní K-síť, a její incidenční matice. Buď $e' = [e_1, \ldots, e_r]$, $e_i \in \bar{\mathbf{D}}$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$; buď $q' = [q_1, \ldots, q_r]$, $q_i \in \bar{\mathbf{D}}$, řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} c'(Lq'' + Rq' + Sq - e) &= 0\,, \\ a'q &= 0\,, \end{aligned}$$

pro každý reálný cykl $c'h$ grafu G; q' znamená derivaci (podle času t) v distributivním smyslu.

Všimněme si vztahu mezi rovnicemi (3.1) a T_1, T_2. Formálně rovnice T_1, T_2 dostaneme z (3.1) tak, že položíme $E + LI_0 - Sq_0H_0 = e$, $I = q'$, a předpokládáme, že prvky vektorů e, q patří do $\mathbf{D}$. Fyzikálně e značí vektor elektromotorických sil, které jsou rovny nule na intervalu $(-\infty, 0)$, zmenšený o napětí na kapacitách v okamžiku $t = 0$ a zvětšený o impuls napětí $LI_0\delta_0$, kterého je zapotřebí k tomu, aby proud naskočil z nuly na předepsanou počáteční hodnotu I_0 v čase $t = 0$; složky vektoru q pak znamenají náboj, který prošel jednotlivými větvemi od okamžiku $t = 0$.

Je-li X reálná matice, jejíž sloupce tvoří nějakou úplnou soustavu n lineárně nezávislých řešení rovnice

$$(3.2) \qquad a'x = 0\,,$$

dá se obdobně jako v paragrafu 1 ukázat, že soustava (3.1) je ekvivalentní soustavě

$$X'LXw'' + X'RXw' + X'SXw = X'e\,, \tag{3.3}$$

kde $w' = [w_1, \ldots, w_n]$, $w_i \in \bar{\mathbf{D}}$, $q = Xw$.

Lze ukázat, že platí

Věta 3.1. *Matici X můžeme zvolit tak, že (3.3) se rozpadne na soustavu*

$$U'LUu'' + U'RUu' + U'RVv' + U'SXw = U'e\,, \tag{3.4}$$

$$V'RUu' + V'RVv' + V'SXw = V'e\,, \tag{3.5}$$

$$Y'SUu + Y'SVv + Y'SYy = Y'e\,, \tag{3.6}$$

kde $w' = [u', v', y']$, $u' = [u_1, \ldots, u_{k_1}]$, $u_i \in \bar{\mathbf{D}}$, $v' = [v_1, \ldots, v_{k_2}]$, $v_i \in \bar{\mathbf{D}}$, $y' = [y_1, \ldots, y_{k_3}]$, $y_i = \bar{\mathbf{D}}$, $k_1 + k_2 + k_3 = n$, $X = [U, V, Y]$, *U je matice o* k_1 *sloupcích, V matice o* k_2 *sloupcích, Y matice o* k_3 *sloupcích, při čemž* $U'LU$, $V'RV$, $Y'SY$ *jsou diagonální matice s kladnými prvky na diagonále.*

Fyzikální význam matic U, V, Y je tento: vybereme všechny cykly $c'h$ grafu dané sítě takové, že $c'Lc > 0$. Ty tvoří lineární podprostor v množině všech cyklů. Mezi nimi zvolíme jistým způsobem úplnou soustavu k_1 lineárně nezávislých cyklů $[u^1]'h, \ldots, [u^{k_1}]' h$; vektory $u^1, \ldots, u^{k_1}$ pak tvoří sloupce matice U. Je zřejmé, že každé okamžité hodnotě proudů v síti odpovídá nějaký cykl. Je-li tedy v síti $c'Lc = 0$ pro každý cykl $c'h$ znamená to, že magnetická energie sítě je rovna nule při libovolných přípustných proudech. (Tento případ může nastat i tehdy, je-li L nenulová matice; pak ovšem všechny indukčnosti v každém cyklu se navzájem ruší v účinku, tj. při průtoku proudu cyklem se nevytvoří magnetické pole.) Pro takové sítě je $k_1 = 0$, množina sloupců matice U je tedy prázdná (tj. matice U se v rovnicích (3.5), (3.6) nevyskytuje) a rovnice (3.4) vůbec vymizí.

Dále z těch cyklů, pro něž je $c'Lc = 0$, vybereme všechny takové, pro které platí $c'Rc > 0$, tedy které obsahují kladný ohmický odpor. Mezi těmi opět jistým způsobem zvolíme úplnou soustavu lineárně nezávislých cyklů $[v^1]' h, \ldots, [v^{k_2}]' h$ a sestavíme matici $V = [v^1, \ldots, v^{k_2}]$.

Konečně zvolíme speciálním způsobem úplnou soustavu lineárně nezávislých cyklů mezi těmi cykly $c'h$, pro které je $c'Lc = c'Rc = 0$, tj. s touto vlastností: Protéká-li cyklem $c'h$ v jistém okamžiku proud c, je energie magnetického pole vytvořeného tímto proudem rovna nule, Jouleovo teplo příslušné tomuto proudu rovno nule a jen elektrostatické pole kondensátorů v cyklu $c'h$ může representovat kladnou hodnotu energie. Tím dostaneme matici Y o k_3 sloupcích.

Věta 3.1 nám již umožní převést soustavu (3.3) na normální systém. Je-li $k_1 \neq 0$, $k_2 = k_3 = 0$, potom $w = u$, $X = U$ a rovnice (3.3) je ekvivalentní s rovnicí (3.4). Rovnici (3.4) můžeme vyřešit vzhledem k u'', neboť $\det U'LU \neq 0$. Odtud již lze snadno dokončit převedení na normální systém. Je-li $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 = 0$, můžeme (3.5) vyřešit vzhledem k v', neboť $\det V'RV \neq 0$ podle věty 3.1. Dosadíme-li za v' vypočtený výraz do rovnice (3.4), můžeme soustavu již snadno převést na normální tvar. Budiž $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$. Z rovnice (3.6) vypočítáme y (neboť $\det Y'SY \neq 0$) a dosadíme je do rovnice (3.4) a (3.5). Dále již postupujeme jako v předchozím případě. Postup v případech, kdy $k_1 = 0$, je zřejmý. Platí tedy

Věta 3.2. *Buď $N = (G, R, L, S)$ regulární pasivní K-síť. Pak můžeme matici X zvolit tak, že (3.3) lze psát jako normální systém*

$$\xi' = \Xi\xi + \eta \tag{3.7}$$

kde $\xi' = [\xi_1, \ldots, \xi_{2k_1+k_2}]$, $\xi_i \in \overline{\mathbf{D}}$, Ξ je konstantní reálná matice typu $(2k_1 + k_2) \times (2k_1 + k_2)$, $\eta' = [\eta_1, \ldots, \eta_{2k_1+k_2}]$, $\eta_i \in \overline{\mathbf{D}}$.

Věta 3.1 umožňuje formulovat další nutnou a postačující podmínku pro kompatibilitu sítě, která byla dokázána v [1].

Věta 3.3. *Buď $N = (G, R, L, S)$ regulární pasivní K-síť a buď $X = [U, V, Y]$ matice z věty 3.1. Budiž E v $T1$ lokálně integrovatelná vektorová funkce (tj. integrovatelná v každém omezeném intervalu), $E(t) = 0$ pro $t < 0$, a buď $V'E$ regulární C-vektor, $Y'E'$ regulární C-vektor. Potom trojice (E, I_0, q_0) je kompatibilní právě tehdy, když jsou splněny tyto podmínky:*

$$1)\ a'I_0 = 0\,;\quad 2)\ (Y'E)(0) - Y'Sq_0 = 0\,;\quad 3)\ Y'SI_0 - (Y'E')(0) = 0\,;$$
$$4)\ V'R(UI_u + VI_v) = (V'E)(0) - V'Sq_0\,,$$

kde I_u, I_v, I_y jsou jednoznačně určeny vztahem $I_0 = UI_u + VI_v + YI_y$ (neboť matice $[U, V, Y]$ má sloupcově maximální hodnost). Symbol $(V'E)(0)$ značí vektor $\lim_{t \to 0+} V'E(t)$ (limita existuje podle předpokladu, že $V'E$ je regulární C-vektor), a stejný smysl má $(Y'E)(0)$, $(Y'E')(0)$.

Fyzikálně uvedené podmínky znamenají zhruba toto: 1) Algebraický součet všech proudů tekoucí do kteréhokoliv uzlu sítě je v okamžiku $t = 0$ roven nule. Pro každý cykl $c'h$, pro který zároveň $c'Lc = 0$ a $c'Rc = 0$, platí, že 2) součet napětí na kapacitách v okamžiku $t = 0$ se rovná součtu elektromotorických sil a 3) součet derivací napětí na kapacitách v okamžiku $t = 0$ se rovná součtu derivací elektromotorických sil. 4) Pro každý cykl $c'h$, pro který $c'Lc = 0$ a zároveň $c'Rc > 0$, platí v okamžiku $t = 0$, že součet úbytků napětí na ohmických odporech zvětšený o součet elektrostatických napětí na kondensátorech se rovná součtu elektromotorických sil (lze totiž ukázat [1], že $V'RY = 0$, takže $V'R(UI_u + VI_v) = V'RI_0$).

Z uvedeného plyne, že podmínek svazujících veličiny E, I_0, q_0 je tím méně, čím síť obsahuje více cyklů s indukčnostmi. Tak např. neexistují-li v síti cykly, pro které by zároveň platilo $c'Lc = 0$ a $c'Rc = 0$, odpadnou podmínky 2) a 3). Neexistují-li cykly, pro které by zároveň platilo $c'Lc = 0$ a $c'Rc > 0$, odpadne podmínka 4).

Z věty 3.3 dále plyne, že I_u můžeme volit libovolně (to je fysikálně plausibilní, protože I_u určuje proud tekoucí v cyklech s indukčnostmi; v takových cyklech nečiní počáteční podmínky potíže vzhledem k úbytku napětí na indukčnostech, který není předepsán počátečními podmínkami a který se tedy v okamžiku $t = 0$ „samovolně nastaví“ na takovou hodnotu, aby byly splněny Kirchhoffovy zákony), I_v vypočítáme z podmínky 4) a I_y z podmínky 3) (to je možné, protože matice $V'RV$ a $Y'SY$ jsou diagonální s kladnými prvky na diagonále).

Literatura

[1] *Doležal V. — Vorel Z.:* Theory of Kirchhoff's Networks, Čas. pěst. mat., 87 (1962), č. 4.

[2] *Doležal V.:* Über die Anwendung von Operatoren in der Theorie der linearen dynamischen Systeme, Apl. mat., 6 (1961), č. 1.

[3] *Doležal V.:* O použití distribucí v teorii lineárních dynamických soustav, Apl. mat., 4 (1959), č. 6.

[4] *Knichal V.:* O Kirchhoffových zákonech, Matem.-fysikální sborník Sloven. akadémie vied, 1952, č. 2.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНИХ СВОЙСТВАХ СЕТЕЙ КИРХГОФА

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ, ЗДЕНЕК ВОРЕЛ (Václav Doležal, Zdeněk Vorel)

В статье вводится понятие сети Кирхгофа как множества, состоящего из ориентированного графа и трех квадратных матриц R, L, S, которые представляют сопротивления, индуктивности и эластанции ветвей. Затем определяется понятие решения сети в t-, p-, и ω-областях; если обеспечено существование и единственность решения в t-, (p-, ω-)области, то сеть называется t-, (p-, ω-)регулярной. Затем исследуются взаимные соотношения между введенными областями, и приводятся некоторые теоремы, дающее явные условия для регулярности. В частности, эти условия подробнее рассмотрены для пассивных сетей, т. е. для сетей, матрицы R, L, S которых положительно полуопределены. Далее приведены достаточные условия для устойчивости решения сети по Ляпунову и для совместимости начальных условий.

Наконец рассматривается более подробно система интегро-дифференциальных уравнений, описывающих поведение сети в t-области; показано, что надлежащим выбором контуров графа сети эта система сводится к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих обобщенные функции Шварца в правых частях. На основании этих рассуждений получены некоторые необходимые и достаточные условия для совместимости начальных условий.

Summary

ON SOME FUNDAMENTAL PROPERTIES OF KIRCHHOFF NETWORKS

VÁCLAV DOLEŽAL, ZDENĚK VOREL

In the present paper, the concept of a Kirchhoff network is introduced as a quadruple consisting of an oriented graph and three square matrices R, L, S representing branch resistances, inductances and elastances respectively. Then the solution of a network in the t-, p-, ω-domains is defined; if existence and uniqueness of solutions in one of the t-, p- or ω-domains is guaranteed, then the network will be called t-, p-, ω-regular, respecticely. Relations between the domains just mentioned are studied and some theorems presented, stating explicit conditions for regularity. These conditions are examined in greater detail for the so-called passive networks, i. e. for networks with R, L, S positive semidefinite.

Further, sufficient conditions for the stability of network solutions in the sense of Liapunov and for the compatibility of initial conditions are given.

Finally, the system of integro-differential equations describing the behaviour of the network in the t-domain is considered in greater detail; it is shown that by an appropriate choice of loops in the network graph, the system in question reduces to a normal system of ordinary differential equations with Schwartz distributions on the right hand sides. These considerations yield necessary and sufficient conditions for the compatibility of initial conditions.

Adresy autorů: Ing. *Václav Doležal* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1. Ing. *Zdeněk Vorel* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.