

Ivan Hlaváček

Reissnerovske algoritmy 1. druhu v teorii válcových skořepin

*Aplikace matematiky*, Vol. 7 (1962), No. 5, 344–352

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102817>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## REISSNEROVSKÉ ALGORITMY I. DRUHU V TEORII VÁLCOVÝCH SKOŘEPIN

IVAN HLAVÁČEK

(Došlo dne 19. června 1961.)

Technická teorie pružných válcových skořepin nedává u silnějších skořepin uspokojivé výsledky. V článku je na základě obecné teorie Reissnerovských algoritmů odvozena metoda, zpřesňující technické řešení kruhové, nekonečně dlouhé válcové skořepiny, zatížené rotačně symetrickým povrchovým zatížením. Výsledky jsou z několika hledisek porovnány v numerických příkladech.

### I. ÚVOD

V lineární teorii pružných tenkých skořepin se běžně užívá předpokladu o zachování normálového prvku a zanedbání vlivu normálních napětí, kolmých ke střednicové ploše. Obecně trojrozměrný problém matematické teorie pružnosti se tak převádí na problém dvojrozměrný, vztažený na střednicovou plochu skořepiny. Již analogie s případem nosníku nebo desky ukazuje však, že takový předpoklad bude oprávněn pouze v jistém omezeném oboru v závislosti na tloušťce skořepiny, její křivosti a ovšem požadované přesnosti výpočtu. Proto bylo učiněno několik pokusů o dokonalejší teorii zavedením jiných hypotéz ([1], [2], [3]). Tyto teorie nenašly však praktické uplatnění a jejich význam je spíše teoretický.

E. REISSNER ([4]) našel algoritmus pro řešení kruhové nekonečně dlouhé válcové skořepiny, zatížené pouze v jednom průřezu (na čele) rotačně symetrickými ohybovými momenty a posouvajícími silami. Problém řeší pomocí asymptotických rozvojų v řady podle vhodně zvoleného malého parametru, při čemž v nulté aproximaci vychází zachování normálového prvku a běžná technická teorie. V práci [5] tento způsob zobecňuje na skořepiny rotační, zatížené na okrajích rotačně symetricky, dále na ploché rotační a válcové skořepiny s obecně zatíženými okraji a to vždy bez povrchového zatížení.

Nové obzory objevuje i na tomto poli práce [6] I. BABUŠKY a M. PRÁGRA, v níž je navržena metoda tzv. „Reissnerovských algoritmů“ pro řešení ohybu nosníku, aplikovatelná však také např. v teorii desek a skořepin.

Přesné řešení dané úlohy matematické teorie pružnosti, formulované jako okrajový problém soustavy parciálních diferenciálních rovnic, nahrazuje se v požadovaném stupni přiblížení řešením příslušné soustavy jednodušších parciálních, případně obyčejných diferenciálních rovnic.

Tato záměna je umožněna zavedením jistých hypotéz o tvaru hledaných funkcí posuvů či napětí a užitím variačních principů minima energie. Volba právě zmíněných hypotéz je jádrem celého problému. Článek [6] obsahuje věty, z nichž plyne:

a) existence a jednoznačnost v jistém smyslu celé posloupnosti takových hypotéz, zavedeme-li kritérium tzv. „energetické chyby“ v asymptotickém smyslu;

b) konvergence posloupnosti aproximací k přesnému řešení podle normy energie.

Úkolem tohoto příspěvku je rozšířit metodu Reissnerovských algoritmů na některé jednoduché příklady z teorie skořepin.

## 2. PRVNÍ REISSNEROVSKÁ APROXIMACE PŘI ŘEŠENÍ VÁLCOVÉ SYMETRICKY ZATÍŽENÉ SKOŘEPINY

Uvažujme nekonečně dlouhou kruhovou válcovou skořepinu, rotačně symetricky zatíženou na vnějším nebo vnitřním povrchu. (obr. 1). V důsledku symetrie napjatosti i deformace redukuje se např. počet neznámých složek napětí ze 6 na 4, a sice normální  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$  a smykové  $\tau_{rz}$ , protože je  $\tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0$ .

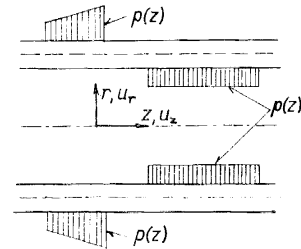
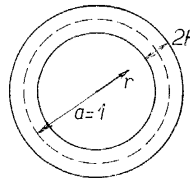
Úloha se řeší pomocí funkce napjatosti  $\chi(z, r)$ , pro kterou má platit podmínka kompatibility

$$\Delta \Delta \chi = 0$$

a podmínky rovnováhy jsou splněny automaticky. (Viz např. [7]). Zde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

značí Laplaceův operátor v cylindrických souřadnicích.



Obr. 1. Označení a volba souřadnic.

Funkce napjatosti musí dále splňovat okrajové podmínky, plynoucí ze způsobu zatížení. Např. pro vnější radiální zatížení má být

$$\begin{aligned} \tau_{zr} &= 0 & \text{pro } r &= a \pm h, \\ \sigma_r &= \begin{cases} -p(z) & \text{pro } r = a + h, \\ 0 & \text{pro } r = a - h. \end{cases} \end{aligned}$$

Tyto podmínky můžeme vyjádřit funkcí napjatosti takto:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi \quad \text{pro } r = a \pm h,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( v\Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \chi = \begin{cases} -p(z) & \text{pro } r = a + h, \\ 0 & \text{pro } r = a - h, \end{cases}$$

kde  $v$  značí Poissonovu konstantu.

Postupem analogickým, jako bylo užito v [6], najdeme 1. optimální Reissnerovskou aproximaci (v dalším  $a = 1$ )

$$(1) \quad \begin{aligned} 2Eh\tilde{u}_r &= -f(z) [\pm 1 + h(1 - v \mp v\eta)], \\ 2Eh\tilde{u}_z &= v(\pm 1 + 2h) \int_0^z f(t) dt \pm h\eta f'(z), \end{aligned}$$

omezíme-li se na řešení, vyjádřené prostřednictvím jediné funkce, a problém řešíme v posunutých  $u_r, u_z$ .

Zde patří horní znaménka k zatížení vnějšího, dolní k zatížení vnitřního povrchu. Bezrozměrný parametr  $\eta$  je definován vztahem

$$\eta = \frac{r - 1}{h}.$$

### 3. ODVOZENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE Z PRINCIPU MINIMA CELKOVÉ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Dosaďme (1) do výrazu pro celkovou potenciální energii

$$(2) \quad \begin{aligned} \varepsilon(u_r, u_z) &= \frac{\pi E}{(1+v)(1-2v)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{1-h}^{1+h} \left[ (1-v) \left( \frac{1}{r} u_r^2 + r \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + r \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2v \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (1-2v) r \left( \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right) \right] dz dr - 2(1+v)(1-2v) \frac{1 \pm h}{E} \int_{-\infty}^{\infty} p(z) \cdot u_r \Big|_{r=1 \pm h} dz \right\}. \end{aligned}$$

Po zintegrování vzhledem k parametru  $\eta$  dostaneme kvadratický funkcionál

$$\varepsilon \cdot \frac{E(1+v)(1-2v)}{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} (K_{00}f^2 + K_{02}ff'' + K_{11}f'^2 + K_{22}f''^2 + K_p \cdot f \cdot p) dz,$$

kde koeficienty závisí pouze na  $v$  a  $h$ .

Podle Lagrangeova principu má funkce  $f(z)$  vyhovovat příslušné Eulerově rovnici

$$(R_1) \quad f^{IV}(z) + k_2 f''(z) + k_0 f(z) = k_p \cdot p(z).$$

Zde koeficienty  $k_0, k_2, k_p$  jsou funkcemi pouze tloušťky  $h$  a Poissonovy konstanty  $v$  a liší se některými znaménky při zatížení vnějším a vnitřním,

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{3}{2h^2(1-v)} \left[ -2v(1+v)(2-v) \mp h \cdot 4v(1-v^2) + (1-v)((1+v)^2 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2h(1-v^2) + h^2(1-v)^2) \frac{1}{h} \lg \frac{1+h}{1-h} \right], \end{aligned}$$

$$k_2 = \frac{-3 + 16\nu - 12\nu^2 + 8\nu^3}{2(1 - \nu)} \pm h\nu(5 - 2\nu),$$

$$k_p = \frac{3(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{h^2(1 - \nu)} (1 \pm h \cdot 2(1 - \nu) + h^2(1 - 2\nu)).$$

#### 4. SROVNÁNÍ S TECHNICKOU TEORIÍ VÁLCOVÝCH SKOŘEPIN. NUMERICKÉ PŘÍKLADY ZATÍŽENÍ LINEÁRNÍHO A PERIODICKÉHO.

Technická teorie skořepin (viz např. [8]), založená na Kirchhoffově hypotéze o zachování normálového prvku a zanedbání radiálních normálních napětí  $\sigma_r$ , vede k rovnici

$$(T) \quad u_r^{IV} + \frac{3(1 - \nu^2)}{h^2} u_r = \frac{3(1 - \nu^2)}{2Eh^3} p(z),$$

kte  $u_r$  znamená radiální průhyb střednicové plochy. Je to tedy opět rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty, avšak bez členu s 2. derivací, a stejná pro vnější i vnitřní zatížení. Odpovídající koeficient  $k_2$  v rovnici  $(R_1)$  nevymizí ani při  $\nu = 0$  nebo při  $h \rightarrow 0$ . Ostatní koeficienty rovnice  $(R_1)$  odpovídají při  $h \rightarrow 0$  koeficientům rovnice  $(T)$ , vezmeme-li v úvahu též vztahy (1).

Pro malá  $h$  je koeficient  $k_0 \approx \alpha/h^2$ ,  $k_2 \approx \beta$ ,  $k_p \approx \gamma/h^2$ . Zavedeme-li novou proměnnou  $\zeta = z/\sqrt{h}$ , dostaneme diferenciální rovnici

$$f^{IV}(\zeta) + \beta h f''(\zeta) + \alpha f(\zeta) = \gamma p(\zeta),$$

z čehož je zřejmé, že vliv druhého členu je vyššího řádu.

Číselné výpočty jsme provedli v několika příkladech, u kterých lze získat přibližná i přesná řešení.

Uvažujeme-li rovnoměrné nebo lineární zatížení na vnějším nebo vnitřním povrchu, tj.  $p(z) = p_0$  nebo  $p(z) = p_0 \cdot z$ , a srovnáme-li hodnoty radiálního průhybu střednicové plochy  $u_r$ , pak rovnice  $(R_1)$  vede k podstatně lepším výsledkům, jak je patrné z tabulky 1, která udává hodnoty

$$u_s^* = \frac{2Eh}{p_0} \cdot |u_{r|_{\eta=0}}$$

Tabulka 1. Srovnání radiálních průhybů střednicové plochy pro lineární zatížení při  $\nu = 0,15$ .

| $h$   | $u_s^*$     |         |              |         | Chyby v %   |         |              |         |
|-------|-------------|---------|--------------|---------|-------------|---------|--------------|---------|
|       | vnější zat. |         | vnitřní zat. |         | vnější zat. |         | vnitřní zat. |         |
|       | přesné      | $(R_1)$ | přesné       | $(R_1)$ | $(T)$       | $(R_1)$ | $(T)$        | $(R_1)$ |
| 0,01  | 1,0083      | 1,0084  | 0,9914       | 0,9915  | -0,82       | +0,01   | +0,86        | +0,01   |
| 0,025 | 1,0208      | 0,0207  | 0,9783       | 0,9784  | -2,1        | -0,01   | +2,2         | +0,01   |
| 0,1   | 1,0796      | 1,0778  | 0,9101       | 0,9078  | -8,0        | -0,18   | +9,0         | -0,25   |

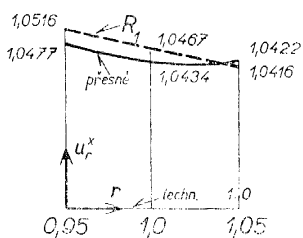
při  $\nu = 0,15$ . Technické teorii odpovídá vždy  $u_s^* = 1$ . Průběh

$$u_r^* = \frac{2Eh}{p_0} \cdot |u_r(\eta)|$$

po tloušce skořepiny ukazuje např. obr. 2, odpovídající parametrům  $\nu = 0,1$ ;  $h = 0,05$  a vnějšímu zatížení.

Výhodnost optimální volby (1) je tedy povrtzena, pokud se týče koeficientů  $k_0$  a  $k_p$  v diferenciální rovnici.

Zkoumejme dále optimalitu naší volby, jak se projevuje u ostatních členů diferenciální rovnice, tj. u 4. a 2. derivace. Za tím účelem je třeba volit zatížení tak, aby mělo řádově velkou 4. resp. 2. derivaci. Jako příklad jsme vybrali zatížení periodické  $p(z) = p_0 \cdot \cos 6z$ , při němž se relativně nejvíce uplatní i člen s 2. derivací, ve kterém se právě obě vyšetřované rovnice podstatně liší.



Obr. 2. Průběh radiálního posuvu po tloušce skořepiny při lineárním zatížení,  $\nu = 0,1$  a  $h = 0,05$ .

Relativní chyby v průhybu střednicové plochy, počítané od přesného řešení, ukazuje v procentech tabulka 2, a sice ve sloupci, označeném ( $R_1$ ). Pro vnější zatížení dává tedy Reissnerovská hypotéza průměrně 2–3krát menší chyby, než technická teorie, avšak pro vnitřní zatížení je tomu naopak.

Tabulka 2. Srovnání radiálních průhybů střednicové plochy pro periodické zatížení  $p = p_0 \cos 6z$  při  $\nu = 0,15$ .

| h     | Relativní chyby v % |           |           |                  |           |           |
|-------|---------------------|-----------|-----------|------------------|-----------|-----------|
|       | vnější zatížení     |           |           | vnitřní zatížení |           |           |
|       | (T)                 | ( $R_1$ ) | ( $R_2$ ) | (T)              | ( $R_1$ ) | ( $R_2$ ) |
| 0,01  | − 1,1               | − 0,5     | − 0,4     | + 0,6            | − 0,6     | − 0,4     |
| 0,025 | − 2,8               | − 0,9     | − 0,8     | + 1,4            | − 2,7     | − 0,9     |
| 0,10  | − 26,2              | − 11,3    | − 3,4     | − 12,2           | − 33,3    | − 3,5     |

Připomeneme-li si zákonitosti, prokázané v teorii Reissnerových algoritmů při ohybu nosníku, nemusí nás tato zdánlivá nesrovnalost překvapovat. Jak víme, univerzální optimalita pro nějakou třídu zatížení je zaručena pouze v asymptotickém smyslu pro  $h \rightarrow 0$ , kdežto při pevném  $h$  platí pouze konvergence podle normy energie pro řád aproximace rostoucí nade všechny meze. To znamená, že vyšetřujeme-li teprve 1. aproximaci, pak by se její univerzální optimalita projevila až při dostatečně malých  $h$ , kdežto při větších  $h$  nemusí R. aproximace dávat vždy pro všechny druhy zatížení lepší výsledky, než jiná, např. technická aproximace.

## 5. ŘEŠENÍ PROSTŘEDNICTVÍM DVOU FUNKCÍ

Podívejme se dále, jaký vliv bude mít jiná alternativa I. R. aproximace, a sice užití dvou nezávislých funkcí. Lze očekávat, že i zde, podobně jako u nosníku [6], tato varianta, ačkoli dává stejný asymptotický řád energetické chyby, povede při pevném  $h$  k lepším výsledkům, než dřívější varianta s jedinou volnou funkcí. Uvolnění vazby mezi posuvy  $u_r$ ,  $u_z$  umožňuje totiž více se přiblížit k hledanému minimu potenciální energie.

Volíme tedy

$$(1') \quad \begin{aligned} 2Eh\tilde{u}_r &= -f(z) [\pm 1 + h(1 - \nu) \mp hv\eta], \\ 2Eh\tilde{u}_z &= \nu(\pm 1 + 2h) \int_0^z f(t) dt \pm h\eta \cdot g(z), \end{aligned}$$

takže oproti volbě (1) je zde derivace  $f'(z)$  nahrazena další nezávislou funkcí  $g(z)$ .

Soustava příslušných Eulerových funkcí má pak tvar

$$(R_2) \quad \begin{aligned} K'_{00}f + K'_{11}f'' + K'_{12}g' &= K'_p \cdot p(z), \\ K'_{12}f' + K'_{20}g + K'_{22}g'' &= 0, \end{aligned}$$

kde koeficienty závisí opět jen na  $h$  a  $\nu$ . Můžeme ji ovšem převést na jedinou rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty pro jednu funkci, např.  $f(z)$ .

Pro srovnání bereme tentýž příklad periodického zatížení  $p = p_0 \cos 6z$  při  $\nu = 0,15$  jako u dřívější varianty. Výsledné procentuální chyby v průhybu  $u_r$  udává opět tabulka 2. ve sloupcích označených  $(R_2)$ .

Očekávané zlepšení se tedy potvrzuje a zvláště u silnějších skořepin dává tato varianta podstatně lepší výsledky než technická teorie.

## 6. SROVNÁNÍ Z HLEDISKA NORMY ENERGIE

Deformační stavy, jakožto vektorové funkce posunutí  $\mathbf{x}(u_r, u_z)$ , můžeme srovnávat z různých hledisek. Zatím jsme užívali nasnadě ležící kritérium-radiální průhyb střednicové plochy, který tvoří zřejmě rozhodující složku deformace.

Pro úplnost jsme dále vypočetli také druhou složku, axiální posuv  $u_z(r, z)$ , a to opět v příkladě periodického zatížení a pro různé tloušťky skořepiny. Absolutní velikosti tohoto posuvu vycházejí asi 20–50krát menší než radiální posuvy a relativní chyby jeví podobný charakter, jako u radiálních posuvů.

Významným hlediskem je bezesporu porovnání podle normy energie. Normu energie vektorové funkce přesného řešení  $\mathbf{x}_0(u_r, u_z)$  označme  $\|\mathbf{x}_0\|$  (viz např. [9]). Snadno odvodíme, že chyba např. našeho řešení  $\mathbf{x}_{R_1}$ , vypočteného podle rovnice  $(R_1)$ , měřená v normě energie, bude

$$\|\mathbf{x}_{R_1} - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\varepsilon_{R_1} - \varepsilon_0},$$

kde  $\varepsilon_{R_1}$  resp.  $\varepsilon_0$  jsou hodnoty funkcionálu celkové potenciální energie (2) pro řešení

podle rovnice ( $R_1$ ) resp. pro přesné řešení. Podobně chyba technického řešení  $\mathbf{x}_T$ , získaného z rovnice ( $T$ ), bude

$$\|\mathbf{x}_T - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_0},$$

kde  $\varepsilon_T$  značí energii technického řešení. Vzájemný vztah řešení  $\mathbf{x}_{R_1}$  a  $\mathbf{x}_T$  bude z hlediska normy energie udán znaménkem rozdílu  $\varepsilon_T - \varepsilon_{R_1}$ . Kladné znaménko značí, že Reissnerovské řešení je lepší než technické a obráceně.

Při příležitosti výpočtu potenciální energie technického řešení naskytá se otázka, z jaké základní volby pro  $u_r$ ,  $u_z$  lze minimalizací funkcionálu energie odvodit právě rovnici ( $T$ )? Ukazuje se, že je třeba volit hypotézu

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r &= u(z)(1 \pm h\alpha), \\ \tilde{u}_z &= -v \cdot \int_0^z u(t) dt - h\eta \cdot u'(z),\end{aligned}$$

kde  $\alpha = 2\sqrt{[v/3(1-v)]}$ , dále ve výrazu pro energii (2) brát místo Lamého konstanty  $\lambda$  pozměněnou hodnotu  $\lambda_1$ :

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}, \quad \lambda_1 = \frac{Ev}{1-v^2},$$

kteřá plyne z hypotézy o zachování normálového prvku a zanedbání vlivu radiálních napětí a užívá se též při rovinné napjatosti. Konečně je třeba pro koeficienty přejít k limitě pro  $h \rightarrow 0$ .

Z původní technické hypotézy

$$(3) \quad \begin{aligned}\tilde{u}_r &= u(z), \\ \tilde{u}_z &= -v \cdot \int_0^z u(t) dt - h\eta \cdot u'(z)\end{aligned}$$

(viz např. [8]), nelze minimalizací funkcionálu energie rovnici ( $T$ ) nijak odvodit, neboť vychází vždy nenulový koeficient  $2v$  u  $u''(z)$ .

Při výpočtu potenciální energie technického řešení dosadili jsme tedy původní technickou hypotézu (3) a řešení rovnice ( $T$ ) do funkcionálu energie při přesné hodnotě konstanty  $\lambda$ , jelikož srovnání vedeme na úrovni trojrozměrné matematické teorie pružnosti.

Rozdíl

$$\varepsilon'_T - \varepsilon'_{R_1} = \frac{Eh}{\pi^2 p_0^2} (\varepsilon_T - \varepsilon_{R_1})$$

jsme vyčíslili opět v našem příkladě periodického zatížení vnitřního povrchu a uvádíme jej v tabulce 3. V prvním řádku jsou vypočteny limity pro  $h \rightarrow 0$ . Kdežto optimální Reissnerovské aproximace zákonitě limitují v normě energie k přesnému řešení při pevném stupni aproximace a  $h \rightarrow 0$ , technická aproximace tuto konvergenci neposkytuje, jak je patrné z nenulové limity rozdílu  $\varepsilon'_T - \varepsilon'_{R_1}$ . Abychom dosáhli nulové limity, musili bychom ve výpočtu energie uvažovat pozměněnou hodnotu Lamého konstanty  $\lambda_1$ .



Tabulka 3. Rozdíly potenciální energie technické a Reissnerovských aproximací pro periodické zatížení vnitřního povrchu při  $\nu = 0,15$ .

| $h$   | $\epsilon'_T - \epsilon'_{R_1}$ | $\epsilon'_T - \epsilon'_{R_2}$ |
|-------|---------------------------------|---------------------------------|
| 0     | +0,0120                         | +0,0120                         |
| 0,01  | +0,0115                         | +0,0123                         |
| 0,025 | +0,0050                         | +0,0117                         |
| 0,1   | -0,0076                         | +0,0210                         |

Jak je zřejmé, i hledisko normy energie potvrzuje velmi příznivý vliv uvolnění druhé funkce v Reissnerovské aproximaci.

### 7. SHRNUTÍ VÝSLEDKŮ NUMERICKÝCH PŘÍKLADŮ A CELKOVÉ ZHODNOCENÍ OBOU VARIANT 1. REISSNEROVSKÉ APROXIMACE

V odstavci 4. jsme uvedli, že již nejjednodušší varianta 1. optimální R. aproximace dává při lineárním zatížení vnějšího i vnitřního povrchu mnohonásobně lepší výsledky než technická teorie. Jakmile však zatěžovací funkce má řádově velkou 4. derivaci, pak tato varianta je přesnější než technická teorie pouze při vnějším zatížení, kdežto při vnitřním zatížení a silnějších skořepinách selhává.

Zato druhá varianta s další „uvolněnou“ funkcí vede ve všech vyšetřovaných případech k podstatně lepším výsledkům než technické řešení, a to jak z hlediska radiálních průhybů, tak z hlediska normy energie. Že tomu tak je i v případech lineárního zatížení obou povrchů nebo vnějšího periodického zatížení, kde jsme energii nevyšetřovali, plyne snadno ze skutečnosti, že pro hodnotu energie je rozhodujícím faktorem funkce  $u_r$  a  $\partial u_z / \partial u_r$ , a vzhledem ke vzorcům (1'), ( $R_2$ ) tedy hodnota funkce  $u_r(\eta, z)$  při  $\eta = 0$ , tj. nakonec tabelovaný parametr  $u_s^*$ .

Závěrem můžeme tedy shrnout, že již 1. Reissnerovská aproximace vede k lepším výsledkům než technická teorie. Při zatížení vnitřního povrchu je však nutno v některých případech užít dvou volných, nezávislých funkcí. Pak dává tato varianta zvláště u silnějších skořepin velmi příznivé výsledky.

#### Literatura

- [1] E. Trefftz: Ableitung der Schalenbiegungsgleichungen mit dem Castiglianoschen Prinzip, ZAMM, H. 2., 1935.
- [2] F. Krauss: Über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie schwachdeformierter Schalen, Math. Annalen, Bd. 101, H. 1., 1929.
- [3] H. A. Kulčevskij: Обобщение современной теории оболочек, Прикл. мат. и мех., т. II, в. 4., 1939.
- [4] E. Reissner, M. W. Johnson: On the foundations of the theory of thin elastic shells, Journ. Math. Phys., vol. 37, No 4., Jan 1959.

- [5] *E. Reissner*: On some problems in shell theory, Structural Mechanics, Oxford 1960.  
[6] *I. Babuška, M. Práger*: Reissnerian algorithmus in theory of elasticity, Bull. Pol. Acad. Sci.  
[7] *J. Tranter, Craggs*: Phil. Mag. 36, 241 (1945).  
[8] *W. Z. Wlassow*: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Berlin 1958.  
[9] *С. Г. Михлин*: Вариационные методы в математической физике, Москва 1957.

## Резюме

### АЛГОРИТМЫ РЕЙССНЕРА 1-ГО РОДА В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

ИВАН ГЛАВАЧЕК (*Ivan Hlaváček*)

Техническая теория цилиндрических оболочек, обоснованная гипотезой о сохранении нормального элемента, не дает в случае оболочек средней и большой толщины удовлетворительных результатов.

В статье предлагается алгоритм, основанный на общем методе, изложенном в [6], который уточняет техническое решение круговой цилиндрической оболочки бесконечной длины, находящейся под действием симметрически распределенных сил на внешней или внутренней поверхности оболочки. Вычисления показывают выгодность второго варианта 1-го рейсснеровского приближения с точки зрения радиальных прогибов и энергетической нормы.

## Zusammenfassung

### DIE REISSNERSCHEN ALGORITHMEN DER 1-EN ART IN DER THEORIE DER ZYLINDRISCHEN SCHALEN

IVAN HLAVÁČEK

Die auf der Hypothese über die Erhaltung von dem Normalelemente gegründete technische Theorie der zylindrischen Schalen liefert im Falle der Schalen mittlerer und grosser Dicke keine befriedigenden Ergebnisse.

In dem Artikel ist auf Grund der allgemeinen Methode, die in [6] erläutert ist, ein Algorithmus angeführt, welcher die technische Lösung einer Kreiszyinderschale von unendlicher Länge präzisiert, die sich unter symmetrisch gelagerter Belastung der äusseren oder inneren Oberfläche befindet.

Die Berechnungen zeigen einen gewissen Vorteil der zweiten Variante der ersten Reissnerschen Aproximation vom Standpunkt der radialen Durchbiegungen und der energetischen Norm.

Adresa autora: Inž. *Ivan Hlaváček* C.Sc., ČVUT, Trojanova 13, Praha 2.