Jiří Likeš

Stanovení střední velikosti částic struktury kovů a slitin

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 4, 315–323

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102812

STANOVENÍ STŘEDNÍ VELIKOSTI ČÁSTIC STRUKTURY KOVŮ A SLITIN

JIŘÍ LIKEŠ

(Došlo dne 4. května 1961.)

Práce se zabývá intervaly spolehlivosti pro střední velikost kulových částic náhodně rozmístěných v prostoru vzorku. Přitom intervaly jsou funkcí výsledků měření v rovině výbrusu vedené vzorkem. Předpokládá se, že velikost částic má logaritmicko-normální rozdělení.

0. Při kvantitativní metolografické analýze struktury kovů a slitin se setkáváme též s případy, kdy částice určité dispersní fáze mají přibližně kulový tvar a jsou náhodně rozmístěny v prostoru vzorku. Podobné případy nacházíme též při studiu některých geologických [1] nebo biologických [2] problémů.

Vedle středního počtu částic κ v jednotce objemu vzorku nás zajímají též charakteristiky jejich velikosti, zejména střední velikost. V dosavadních pracích se střední velikost částic odhaduje metodou momentů. V této práci jsou sestrojeny intervaly spolehlivosti pro případ, kdy velikost částic má logaritmicko-normální rozdělení. Přitom vedle intervalů spolehlivosti závislých na průměrné velikosti kruhových řezů, náhodně vybraných v rovině výbrusu, se též uvažují intervaly, jež jsou funkcí průměrné délky tětiv, které kruhovým řezům vytínají přímky náhodně umístěné v rovině výbrusu.

1. Uvažujme vzorek kvádrového tvaru s plochou základny A a výškou B, v němž je náhodně rozmístěn velký počet kulových částic, jejichž průměr označíme ξ. Předpokládejme, že ξ je spojitá náhodná veličina nabývající hodnot $x > 0$ a že její hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je neznáma.

V důsledku neprůhlednosti kovových vzorků nemůžeme provést přímá měření velikosti částic ξ. Vedeme-li však vzorkem rovinu výbrusu, pak tato řezná rovina protne některé z částic v kruhových řezech, jejichž velikost již měřit lze. Označme η náhodnou veličinu představující průměr kruhových řezů. Veličina η nabývá hodnot $y > 0$ a její hustotu pravděpodobnosti označme $g(y)$.

Má-li náhodná veličina ξ konečnou střední hodnotu $\mathsf{E}(\xi)$, pak v případě náhodného rozmístění částic v prostoru vzorku platí mezi hustotami $g(y)$ a $f(x)$ vztah [2]

$$g(y) = \frac{y}{\mathsf{E}(\xi)} \int_y^\infty \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dx \,, \quad y > 0 \,. \tag{1}$$

Existuje-li střední hodnota $(r+1)$-vé mocniny náhodné veličiny ξ, dostaneme z (1) pro střední hodnotu r-té mocniny náhodné veličiny η

$$E(\eta^r) = a_r \frac{E(\xi^{r+1})}{E(\xi)}, \quad r \geqq -1, \tag{2}$$

přičemž

$$a_r = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{r+2}{2}\right), \quad r \geqq -1, \tag{3}$$

kde $\mathrm{B}(\frac{1}{2}, q)$ značí funkci beta $(q > 0)$.

Pro $r = -1$ dostáváme

$$\mathrm{E}(\eta^{-1}) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mathrm{E}(\xi)}. \tag{4}$$

Tohoto vztahu se používá [2, 3] k sestrojení odhadu střední velikosti částic $\mathrm{E}(\xi)$. Provedeme-li měření průměru η u dostatečně velkého počtu k řezů náhodně vybraných v rovině metalografického výbrusu a vypočteme-li průměr reciprokých hodnot těchto měření

$$m'_{-1}(y) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{y_i},$$

odhadneme $\mathrm{E}(\xi)$ pomocí vztahu

$$\mathrm{E}(\xi) \approx \frac{\pi}{2} \frac{1}{m'_{-1}(y)}. \tag{5}$$

Veličina $m'_{-1}(y)$ je nestranným odhadem $\mathrm{E}(\eta^{-1})$. Její rozptyl však není konečný, neboť výraz a_{-2} nekonverguje.

Dalšího způsobu stanovení střední velikosti kulových částic je možné použít v případě, kdy známe střední počet částic κ v jednotce objemu vzorku. Označíme-li λ střední počet kruhových řezů v jednotce plochy roviny výbrusu, odpovídající uvažované objemové jednotce, platí mezi κ, λ a $\mathrm{E}(\xi)$ známý vztah [2,3]

$$\lambda = \kappa \, \mathrm{E}(\xi). \tag{6}$$

Označíme-li $\hat{\lambda}$ odhad λ nalezený z dostatečně velkého počtu jednotkových plošek náhodně umístěných v rovině výbrusu, lze střední velikost částic odhadnout pomocí vztahu

$$\mathrm{E}(\xi) \approx \frac{\hat{\lambda}}{\kappa}. \tag{6'}$$

2. Vedle měření průměru kruhových řezů můžeme zjišťovat v rovině výbrusu hodnoty další veličiny. Umístěme na rovinu výbrusu náhodně přímky a označme ζ délku tětiv, vzniklých protnutím kruhových řezů těmito přímkami. Náhodná veličina ζ nabývá hodnot $z > 0$ a její hustotu pravděpodobnosti označme $h(z)$. Přitom existuje-li $\mathrm{E}(\eta) = (\pi/4)\,[\mathrm{E}(\xi^2)/\mathrm{E}(\xi)]$, platí mezi hustotou pravděpodobnosti délky tětiv

$h(z)$ a hustotou pravděpodobnosti průměru kruhových řezů $g(y)$ analogický vztah jako mezi hustotou $g(y)$ a hustotou pravděpodobnosti průměru kulových částic $f(x)$, t. zn.

$$(7) \qquad h(z) = \frac{z}{\mathsf{E}(\eta)} \int_z^\infty \frac{g(y)}{\sqrt{y^2 - z^2}}\, dy\,, \quad z > 0\,.$$

Existuje-li střední hodnota $(s + 1)$-své mocniny náhodné veličiny η, je

$$(8) \qquad \mathsf{E}(\zeta^s) = a_s \frac{\mathsf{E}(\eta^{s+1})}{\mathsf{E}(\eta)}\,, \quad s \geqq -1\,,$$

kde a_s je pro $s \geqq -1$ dáno výrazem (3). Použitím (2), (3) a (8) dostaneme

$$(9) \qquad \mathsf{E}(\zeta^s) = \frac{1}{a_1} a_s a_{s+1} \frac{\mathsf{E}(\xi^{s+2})}{\mathsf{E}(\xi^2)} = \frac{2}{s+2} \frac{\mathsf{E}(\xi^{s+2})}{\mathsf{E}(\xi^2)}\,, \quad s \geqq -1\,.$$

Označme δ střední počet kruhových řezů protnutých úsečkou jednotkové délky. Mezi δ a středním počtem řezů v jednotkové ploše roviny výbrusu λ platí vztah, který je analogický vztahu (6) mezi λ a κ

$$(10) \qquad \delta = \lambda\, \mathsf{E}(\eta)\,.$$

Pro $s = -1$ vyplývá z (8) a (3)

$$(11) \qquad \mathsf{E}(\eta) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mathsf{E}(\zeta^{-1})}\,.$$

Použitím (6), (10) a (11) dostaneme

$$(12) \qquad \mathsf{E}(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\kappa} \mathsf{E}(\zeta^{-1})\,.$$

Tohoto vztahu můžeme použít ke stanovení $\mathsf{E}(\xi)$ v případě, že známe střední počet částic κ v jednotce objemu vzorku. Označíme-li $\hat{\delta}$ odhad δ stanovený na základě velkého počtu jednotkových úseček náhodně umístěných v rovině výbrusu a provedeme-li měření délek velkého počtu n tětiv a vypočteme-li průměr reciprokých hodnot těchto měření

$$m'_{-1}(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j}\,,$$

lze střední velikost částic odhadnout pomocí vztahu

$$(12') \qquad \mathsf{E}(\xi) \approx \frac{2}{\pi} \frac{\hat{\delta}}{\kappa} m'_{-1}(z)\,.$$

Veličina $m'_{-1}(z)$ je nestranným odhadem $\mathsf{E}(\zeta^{-1})$, nemá však konečný rozptyl.

3. Uvedené vztahy mezi momenty náhodných veličin ξ, η, ζ platí pro libovolnou hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ v případě, že příslušné momenty existují. V některých případech však můžeme vycházet z určitého tvaru rozdělení náhodné veličiny ξ. Studiem řady struktur kovů a slitin se ukázalo (viz např. [3, 4, 5]), že rozdělení prů-

měru kulových částic se dá velmi často dobře popsat logaritmicko-normálním rozdělením, takže hustota pravděpodobnosti $f(x)$ má tvar

$$(13) \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}\, e^{-(\lg x - \lg \mu)^2/2\sigma^2}\,, \quad x > 0\,,$$

kde $\mu > 0$ a $\sigma > 0$ jsou parametry rozdělení. ν-tý moment náhodné veličiny ξ je roven

$$(14) \qquad \mathsf{E}(\xi^\nu) = \mu^\nu\, e^{(\nu^2/2)\sigma^2}\,.$$

Dosazením (14) do (2) dostaneme

$$(15) \qquad \mathsf{E}(\eta^r) = a_r\, \mathsf{E}(\xi^r)\,[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^r\,,$$

kde

$$(16) \qquad \mathsf{V}(\xi) = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

je variační koeficient náhodné veličiny ξ. Přitom pro $r = 1$ platí vztah (15) pro libovolný typ rozdělení průměru částic ξ.

Pro $r \geqq 1$ je rozptyl náhodné veličiny η^r roven

$$(17) \qquad \mathsf{D}(\eta^r) = \{\mathsf{E}(\xi^r)\,[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^r\}^2\, \{a_{2r}[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{r^2} - a_r^2\}\,.$$

Podobně dosazením (14) do (9) dostaneme

$$(18) \qquad \mathsf{E}(\zeta^s) = \frac{2}{s+2}\, \mathsf{E}(\xi^s)\,[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{2s}\,.$$

Pro $s \geqq 1$ je rozptyl náhodné veličiny ζ^s roven

$$(19) \qquad \mathsf{D}(\zeta^s) = \{\mathsf{E}(\xi^s)\,[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{2s}\}^2 \left\{\frac{1}{s+1}[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{s^2} - \frac{4}{(s+2)^2}\right\}.$$

Za předpokladu náhodného rozmístění částic dispersní fáze v prostoru vzorku a za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení průměru částic ξ jsou tedy střední hodnota i rozptyl r-tého momentu průměru kruhových řezů η funkcí r-tého momentu $\mathsf{E}(\xi^r)$ a variačního koeficientu $\mathsf{V}(\xi)$ veličiny ξ. Podobně za uvedených předpokladů jsou střední hodnota i rozptyl s-tého momentu délky tětiv ζ funkcí $\mathsf{E}(\xi^s)$ a $\mathsf{V}(\xi)$.

Přitom v reálných strukturách se $\mathsf{V}(\xi)$ většinou pohybuje v rozmezí $0{,}2 \leqq \mathsf{V}(\xi) \leqq 0{,}7$ a málo se pro daný typ struktury mění. Jestliže jsme pro určitou strukturu jednou $\mathsf{V}(\xi)$ určili, lze je v dalších měřeních velikosti částic takovéto struktury prakticky považovat za známé.

4. Nechť $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ představují k nezávislých náhodných veličin identicky rozdělených, majících hustotu pravděpodobnosti (1), přičemž $f(x)$ má tvar (13). Uvažujeme náhodnou veličinu

$$(20) \qquad \overline{\eta^r} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \eta_i^r\,, \quad r \geqq 1\,.$$

Náhodná veličina

$$\varphi_r = \frac{\overline{\eta^r}}{\mathsf{E}(\xi^r)} \tag{21}$$

má vzhledem k (15) a (17) střední hodnotu a rozptyl

$$\mathsf{E}(\varphi_r) = a_r[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^r, \tag{22}$$

$$\mathsf{D}(\varphi_r) = \frac{1}{k}[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{2r}\{a_{2r}[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{r^2} - a_r^2\}. \tag{23}$$

Uvažujeme-li pevné konečné $r \geqq 1$, pak veličina φ_r je podle Lindeberg-Lévyho limitního teorému asymptoticky normální se střední hodnotou (22) a rozptylem (23), takže pro velká k

$$P\left\{u_{\alpha_1} < \frac{\varphi_r - \mathsf{E}(\varphi_r)}{\sqrt{\mathsf{D}(\varphi_r)}} < u_{1-\alpha_2}\right\} \simeq 1 - \alpha, \tag{24}$$

kde $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 0{,}5$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ a u_ε je 100ε procentní kvantil normálního rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$.

Pro známé $\mathsf{V}(\xi)$ je tudíž pro dostatečně velká k dvoustranný $100(1 - \alpha)$ procentní interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}(\xi^r)$ prakticky dán nerovnostmi

$$\overline{\eta^r}\,\mathsf{E}_{1-\alpha_2}(\xi^r) < \mathsf{E}(\xi^r) < \overline{\eta}_r\,\mathsf{E}_{\alpha_1}(\xi^r), \quad r \geqq 1 \tag{25}$$

a jednostranné $100(1 - \alpha)$procentní intervaly spolehlivosti mají tvar

$$0 < \mathsf{E}(\xi^r) < \overline{\eta^r}\,\mathsf{E}_\alpha(\xi^r), \quad r \geqq 1, \tag{25'}$$

$$\mathsf{E}(\xi^r) > \overline{\eta^r}\,\mathsf{E}_{1-\alpha}(\xi^r), \quad r \geqq 1. \tag{25''}$$

Přitom

$$\mathsf{E}_\varepsilon(\xi^r) = \frac{1}{[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^r}\,\frac{\sqrt{k}}{a_r\sqrt{k} + u_\varepsilon\sqrt{a_{2r}[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{r^2} - a_r^2}}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{26}$$

Uvažujme nyní případ $r = 1$. Jelikož $a_1 = \pi/4$, $a_2 = \frac{2}{3}$, je

$$\mathsf{E}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{1 + \mathsf{V}^2(\xi)}\,\frac{4\sqrt{3k}}{\pi\sqrt{3k} + u_\varepsilon\sqrt{32[1 + \mathsf{V}^2(\xi)] - 3\pi^2}}. \tag{27}$$

Pro dané $\mathsf{V}(\xi)$ a velká k tedy platí

$$\begin{cases} P\{\overline{\eta}\,\mathsf{E}_{1-\alpha_2}(\xi) < \mathsf{E}(\xi) < \overline{\eta}\,\mathsf{E}_{\alpha_1}(\xi)\} \simeq 1 - \alpha, & 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 0{,}5;\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \\ P\{\mathsf{E}(\xi) < \overline{\eta}\,\mathsf{E}_\alpha(\xi)\} \simeq 1 - \alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ P\{\mathsf{E}(\xi) > \overline{\eta}\,\mathsf{E}_{1-\alpha}(\xi)\} \simeq 1 - \alpha, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{28}$$

5. Nechť $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ představují n nezávislých náhodných veličin identicky rozdělených, majících hustotu pravděpodobnosti (7), kde za $g(y)$ se dosadí (1) s $f(x)$ mající tvar (13).

Uvažujme náhodnou veličinu

$$(29) \qquad \overline{\zeta^s} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^s .$$

Náhodná veličina

$$(30) \qquad \psi_s = \frac{\overline{\zeta^s}}{\mathsf{E}(\xi^s)}$$

je pro pevné konečné $s \geqq 1$ asymptoticky normální se střední hodnotou

$$(31) \qquad \mathsf{E}(\psi_s) = \frac{2}{s+2} [1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{2s}$$

a rozptylem

$$(32) \qquad \mathsf{D}(\psi_s) = \frac{1}{n} [1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{4s} \left\{ \frac{1}{s+1} [1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{s^2} - \frac{4}{(s+2)^2} \right\},$$

vyplývajících ze vztahů (18) a (19).

Tudíž pro známé $\mathsf{V}(\xi)$ je pro dostatečně velká n dvoustranný $100(1-\alpha)$procentní interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}(\xi^s)$, kde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 0{,}5$, dán nerovnostmi

$$(33) \qquad \overline{\zeta^s}\, E'_{1-\alpha_2}(\xi^s) < \mathsf{E}(\xi^s) < \overline{\zeta^s}\, \mathsf{E}'_{\alpha_1}(\xi^s) , \quad s \geqq 1$$

a jednostranné $100(1-\alpha)$procentní intervaly spolehlivosti nerovnostmi

$$(33') \qquad 0 < \mathsf{E}(\xi^s) < \overline{\zeta^s}\, \mathsf{E}'_{\alpha}(\xi^s) \quad , \quad s \geqq 1 ,$$

$$(33'') \qquad \mathsf{E}(\xi^s) > \overline{\zeta^s}\, \mathsf{E}'_{1-\alpha}(\xi^s) , \quad s \geqq 1 ,$$

přičemž

$$(34) \quad \mathsf{E}'_{\varepsilon}(\xi^s) = \frac{1}{[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{2s}} \frac{(s+2)\sqrt{n(s+1)}}{2\sqrt{n(s+1)} + u_\varepsilon \sqrt{(s+2)^2 [1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^{s^2} - 4(s+1)}} ,$$

$$0 < \varepsilon < 1 .$$

Pro $s = 1$ je

$$(35) \qquad \mathsf{E}'_{\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{[1 + \mathsf{V}^2(\xi)]^2} \frac{3\sqrt{2n}}{2\sqrt{2n} + u_\varepsilon \sqrt{9[1 + \mathsf{V}^2(\xi)] - 8}} .$$

6. V případech, kdy jsme na pochybách, zda $\mathsf{V}(\xi)$ se neliší od předpokládané hodnoty, jíž uvažujeme ve výrazech pro hranice intervalů spolehlivosti, bude vhodné z výsledků měření průměru kruhových řezů nebo z výsledků měření délky tětiv sestrojit odhad $\mathsf{V}(\xi)$.

Snadno se přesvědčíme, že v případě logaritmicko-normálního rozdělení náhodné veličiny ξ platí

$$(36) \qquad 1 + \mathsf{V}^2(\xi) = \frac{3\pi^2}{32} [1 + \mathsf{V}^2(\eta)] ,$$

$$(37) \qquad 1 + \mathsf{V}^2(\xi) = \tfrac{8}{9} [1 + \mathsf{V}^2(\zeta)] ,$$

kde $\mathsf{V}(\eta)$ a $\mathsf{V}(\zeta)$ značí variační koeficienty veličin η a ζ.

Tudíž odhady variačního koeficientu $\mathsf{V}(\xi)$ velikosti částic, získané metodou momentů, mají tvar

$$(38) \qquad \mathsf{V}(\xi) \approx \sqrt{\frac{3\pi^2}{32} v^2(y) - \frac{32 - 3\pi^2}{32}},$$

$$(39) \qquad \mathsf{V}(\xi) \approx \tfrac{1}{3}\sqrt{8v^2(z) - 1},$$

kde

$$v(y) = \frac{\sqrt{m'_2(y) - \bar{y}^2}}{\bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i, \quad m'_2(y) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i^2,$$

$$v(z) = \frac{\sqrt{m'_2(z) - \bar{z}^2}}{\bar{z}}, \quad \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j, \quad m'_2(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j^2.$$

Nahradíme-li ve výrazech (27) resp. (35) $\mathsf{V}(\xi)$ odhady (38) resp. (39), dostáváme

$$(40) \qquad \mathsf{E}_\varepsilon(\xi) \approx \frac{128}{3\pi^3} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + u_\varepsilon v(y)} \frac{\bar{y}^2}{m'_2(y)},$$

$$(41) \qquad \mathsf{E}'_\varepsilon(\xi) \approx \frac{243}{128} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + u_\varepsilon v(z)} \frac{\bar{z}^4}{[m'_2(z)]^2}.$$

Těchto odhadů bychom zřejmě použili pro velká k resp. n v případech, kdy $\mathsf{V}(\xi$ je neznámé.

7. **Příklad.** Máme odhadnout střední velikost $\mathsf{E}(\xi)$ částic karbidů, které mají tvar prakticky kulový a jsou náhodně rozptýleny v prostoru ocelového vzorku. Z předchozích měření je známo, že variační koeficient velikosti těchto částic se pohybuje kolem hodnoty $\mathsf{V}(\xi) = 0{,}45$. Přitom chceme sestrojit pravostranný interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}(\xi)$.

Na rovině výbrusu vedené vzorkem bylo provedeno měření průměru η u $k = 200$ náhodně vybraných řezů a z výsledků měření určeny hodnoty $\bar{y} = 1{,}39 \cdot 10^{-3}$ mm, $m'_2(y) = 2{,}53 \cdot 10^{-6}$ mm^2. Pro hodnoty $k = 200$ a $\mathsf{V}(\xi) = 0{,}45$ dostaneme podle (27) pro $1 - \alpha = 0{,}95$ hodnotu $\mathsf{E}_{0,05}(\xi) = 1{,}131$, takže pravostranný 95tiprocentní interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}(\xi)$ má tvar $0 < \mathsf{E}(\xi) < 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ mm.

Pro tutéž strukturu bylo použito metody náhodných přímek. Z měření délky $n = 300$ náhodně vybraných tětiv bylo určeno $\bar{z} = 1{,}41 \cdot 10^{-3}$ mm, $m'_2(z) = 2{,}70 \cdot 10^{-6}$ mm^2. Jelikož $\mathsf{E}'_{0,05}(\xi) = 1{,}099$, má pravostranný 95tiprocentní interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}(\xi)$ tvar $0 < \mathsf{E}(\xi) < 1{,}55 \cdot 10^{-3}$ mm.

Kdybychom neznali hodnotu $\mathsf{V}(\xi)$, použili bychom pro $\mathsf{E}_{0,05}(\xi)$ a $\mathsf{E}'_{0,05}(\xi)$ odhadů (40) a (41). Jelikož $v(y) = 0{,}556$, dostáváme $\mathsf{E}_{0,05}(\xi) \approx 1{,}124$ a jelikož $v(z) = 0{,}598$, dostáváme $\mathsf{E}'_{0,05}(\xi) \approx 1{,}091$. Odhady $\mathsf{V}(\xi)$ jsou podle (38) resp. (39) $\mathsf{V}(\xi) \approx 0{,}46$ resp. $\mathsf{V}(\xi) \approx 0{,}455$.

Literatura

[1] *G. Herdan:* Small particle statistics, London, Butterworths, 1960.
[2] *S. D. Wicksell:* On the corpuscle problem, Biometrika, 17 (1925), str. 84.
[3] *С. А. Салтыков:* Стереометрическая металлография, Москва, Металлургиздат, 1959.
[4] *Vr. Horálek:* Příspěvek k otázce hodnocení struktury materiálu, Aplikace matematiky, 3 (1958), str. 376.
[5] *P. Feltham:* Grain growth in metals, Acta metallurgica, 5 (1957), str. 97.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ВЕЛИЧИНЫ ЧАСТИЦ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

ИРЖИ ЛИКЕШ (Jiří Likeš)

Работа занимается доверительными интервалами для среднего диаметра $\mathsf{E}(\xi)$ шарообразных частиц дисперсной фазы. Предполагается, что частицы случайно распределены в пространстве образца, и что их диаметр ξ имеет логарифмическо-нормальное распределение.

В плоскости шлифа, идущей образцом, определяется диаметр η у каждого из k случайно выбранных круговых сечений частиц. Для больших k определяется $100(1 - \alpha)$-процентный доверительный интервал для $\mathsf{E}(\xi)$ пир помощи соотношений (27) и (28), где $\bar{\eta}$ — средний диаметр выбранных сечений, $\mathsf{V}(\xi)$ — коэффициент изменчивости диаметра частиц ξ, и u_ε значит 100ε-процентный квантиль нормального распределения $\mathsf{N}(0, 1)$.

Вместо диаметра круговых сечений можно рассматривать длину хорд ζ, образованных пересечением круговых сечений с прямыми, случайно распределенными в плоскости шлифа. Если принимаем во внимание большое количество n хорд, то $100(1 - \alpha)$-процентный доверительный интервал определяется при помощи соотношений (33) и (34) для $s = 1$. При этом $\bar{\zeta}$ — средняя длина n хорд.

Оценки коэффициента изменчивости $\mathsf{V}(\xi)$, найденные методом моментов, даны соотношениями (38), и (39).

Summary

ON THE DETERMINATION OF MEAN PARTICLE-SIZE IN STUDIES OF STRUCTURE OF METALS AND ALLOYS

JIŘÍ LIKEŠ

This paper is concerned with the confidence intervals for the mean value $\mathsf{E}(\xi)$ of the diameter of spherical particles of the dispersed phase. The particles are assumed to be randomly located in the sample of the material, and their size ξ is assumed to be distributed according to the logarithmic-normal law.

The method of estimation is as follows: In a plane-section through the sample, k circular cross-sections of particles are selected at random and their diameter η determined. If k is large, the confidence interval for $\mathsf{E}(\xi)$ at the confidence level $1 - \alpha$ is given by the relations (27) and (28), where η denotes the average diameter of the k randomly selected cross-sections, $\mathsf{V}(\xi)$ is the coefficient of variation of particle diameter ξ and u_ε is the $100\varepsilon\%$ quantile of a normal distribution with zero mean and unit variance.

Instead of the diameter of circular cross-sections η we may base our calculations on the length of segments ζ determined on a system of lines, randomly located in the polished section of the sample by the intersections with particle boundaries. For a large number n of such segments, the confidence interval at the confidence level $1 - \alpha$ is given by (33) and (34) for $s = 1$, where $\bar{\zeta}$ denotes the average length of the n segments.

The moment-estimators of the coefficient of variation $\mathsf{V}(\xi)$ are given by (38) and (39).

Adresa autora: *Jiří Likeš*, Vysoká škola ekonomická, Praha 3 — Žižkov, nám. G. Klimenta 4.