Aplikace matematiky

Zdeněk Horák

Planimetry jako neholonomní mechanické soustavy

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 4, 282–291

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102810

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

PLANIMETRY JAKO NEHOLONOMNÍ MECHANICKÉ SOUSTAVY

ZDENĚK HORÁK

(Došlo dne 1. června 1961.)

Autor ukazuje, že planimetry jsou neholonomní mechanické soustavy s konfigurací určenou dvěma souřadnicemi bodu na uzavřené křivce, jejíž plošný obsah měříme, a dalším parametrem, jehož přírůstek je neintegrabilní lineární formou diferenciálů zmíněných souřadnic. Nenulový bilineární kovariant této formy je úměrný elementu měřené plochy a jeho matematickým vyjádřením se v článku odvozují známé vzorce pro běžné planimetry (Prytzův, Sandenův, lineární a pólový).

Planimetr je obecně soustava tuhých těles o dvou stupních volnosti, která koná rovinný pohyb, při čemž jeden bod soustavy opisuje křivku v rovině. Pohyb tohoto bodu, který nazveme *snímač* (je to bod dotyku hrotu nebo skleněné čočky s rovinou), určuje jednoznačně pohyb celé soustavy. Kdyby tato soustava byla holonomní, vrátila by se po oběhu snímače po uzavřené čáře celá soustava do původní polohy, bez ohledu na velikost plochy oběhnuté snímačem. Holonomní soustavy o dvou stupních volnosti nelze tedy užít k měření velikosti rovinné plochy. Je-li však aspoň jeden parametr určující polohu soustavy vázán se souřadnicemi snímače neintegrabilním vztahem, je soustava neholonomní a zmíněný parametr je *neholonomní funkcí*[1]) souřadnic snímače. Neholonomní funkce n proměnných x^k se liší od „obyčejné" funkce (holonomní) tím, že její diferenciál $d\varphi$ je lineární formou diferenciálů dx^k

$$d\varphi = \varphi_k \, dx^k , \quad k = 1, 2, \ldots, n , \tag{1}$$

jejíž koeficienty nesplňují podmínky integrability, takže

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k} \neq 0 . \tag{2}$$

Přitom jsme ve výraze (1) vynechali sčítací značku $\sum$ ve smyslu známé tensorové *sumační konvence Einsteinovy*, podle níž se bez vyznačení sčítá podle každého indexu, který se opakuje v témže členu. Tuto dohodu dodržíme v celém článku.

[1]) Tento název zavedl autor v r. 1927 v práci [1].

Neholonomní funkce φ proměnných x^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ je pak definována rovnicí

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{(x_0^k)}^{(x^k)} d\varphi = \int_{(x_0^k)}^{(x^k)} \varphi_i \, dx^i , \tag{3}$$

kde x_0^k a φ_0 jsou pevně zvolené stálé veličiny. Hodnota integrálu (3) je ovšem jednoznačně určena integrační cestou a proto není nelogické pokládat φ za „funkci“ bodu (x^k) v širším smyslu, i když změna φ závisí nejen na jeho počáteční a konečné poloze, ale obecně také na všech polohách, kterými bod (x^k) prošel.

Z toho vyplývá, že integrál $d\varphi$ po uzavřené cestě je obecně různý od nuly

$$\oint d\varphi \neq 0$$

a jeho hodnotu můžeme vypočítat z bilineárního kovariantu diferenciální formy (1)

$$d_{21}\varphi = (d_2 d_1 - d_1 d_2)\, \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k}\right) d_1 x^k \, d_2 x^l , \tag{4}$$

který je rovněž obecně nenulový [2]. Operace (4) dává změnu hodnoty φ při oběhu infinitesimálního uzavřeného čtyřúhelníka o stranách $d_1 x^k$, $d_2 x^l$, která je pro holonomní funkci rovna nule. Pro neholonomní funkci však je změna $d_{21}\varphi \neq 0$ a proto může φ v každém bodě (x^k) nabýt nekonečně mnoha různých hodnot podle toho, po jaké uzavřené dráze se do výchozího bodu vrátíme.

V některých případech může závislost φ na integrační cestě být zvlášť jednoduchá, jak je tomu právě u planimetrů. U nich je konfigurace soustavy určena dvěma souřadnicemi snímače a jedním dalším parametrem, který je jejich neholonomní funkcí. Jeho změna při oběhu uzavřené křivky v rovině závisí tu jen na plošném obsahu oběhnuté křivky a je nezávislá na jejím tvaru.

Na této typické vlastnosti neholonomních soustav jsou skutečně založeny všechny známé mechanické planimetry. Neholonomní vazbová podmínka je fysikálně realisována působením tření, jak ukážeme na jednoduchých příkladech planimetru Prytzova, Sandenova, přímkového a pólového.

Prytzův neboli *sekyrkový* či *nožový* planimetr (který je možno improvisovat kapesním nožem s pootevřenými želízky) je v podstatě tyč tvaru sekyrky opatřená na jednom konci ostřím s konvexní hranou a na druhém konci hrotem, kterým objíždíme měřenou rovinnou plochu, udržujíce osu AC hrotu kolmou k rovině objížděné plochy. Předpokládáme-li, že konstrukcí je zaručeno, že ostří leží v rovině ABC, je podle obr. 1

$$\xi - x = l \cos \chi , \quad \eta - y = l \sin \chi .$$

Protože ostrá hrana sekyrky nedovoluje příčný posuv dotykového bodu B, klouže konec B po papíře v každém okamžiku ve směru ostří, tedy ve směru spojnice AB. Bod B o souřadnicích ξ, η opisuje tedy křivku se směrnicí

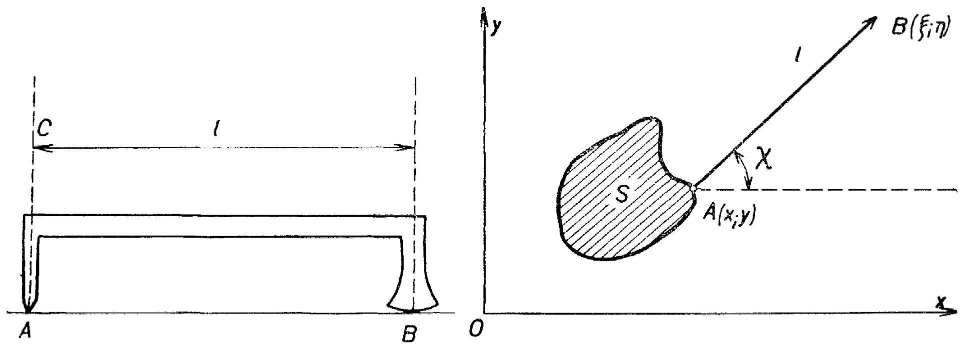
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \chi .$$

Dosadíme-li sem za $d\xi$, $d\eta$ diferenciály vypočtené z hořejších rovnic, dostaneme

$$\frac{dy + l \cos \chi \, d\chi}{dx - l \sin \chi \, d\chi} = \operatorname{tg} \chi$$

a po úpravě

$$\sin \chi \, dx - \cos \chi \, dy - l \, d\chi = 0 \,. \tag{5}$$



Obr. 1. Prytzův planimetr.

Tato podmínka, kterou splňuje rovinný pohyb tyče, je neintegrabilní, takže můžeme pokládat úhel χ za neholonomní funkci proměnných $x^1 = x$, $x^2 = y$ a psát

$$d\chi = \frac{\sin \chi}{l} dx^1 - \frac{\cos \chi}{l} dx^2 \,. \tag{6}$$

Jestliže se zřetelem k (1) označíme

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^1} = \chi_1 = \frac{\sin \chi}{l}\,, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x^2} = \chi_2 = -\frac{\cos \chi}{l}\,, \tag{7}$$

pak skutečně výrazy (2) jsou různé od nuly a podle (4)

$$d_{21}\chi = \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \chi_l}{\partial x^k}\right) d_1 x^k \, d_2 x^l \,, \quad k, l = 1, 2 \,, \tag{8}$$

kde $d_1 x^k$ a $d_2 x^l$ jsou dva libovolné délkové prvky v rovině Oxy. Zvolíme-li

$$d_1 x^1 = dx \,, \quad d_1 x^2 = 0 \,; \quad d_2 x^1 = 0 \,, \quad d_2 x^2 = dy \,, \tag{9}$$

bude v součtu (8) různý od nuly jediný člen, který dostaneme kladouce $k = 1$, $l = 2$, a změna χ při oběhu v záporném smyslu obvyklém u planimetrů

$$d_{12}\chi = - d_{21}\chi = \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x^2}\right) d_1 x^1 \, d_2 x^2 \,.$$

Avšak

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x^1} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x^1} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \chi} \chi_1 \,; \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \chi_1}{\partial \chi} \chi_2$$

a podle (7)

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x^1} = \frac{\sin^2 \chi}{l^2}, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial x^2} = -\frac{\cos^2 \chi}{l^2},$$

takže vzhledem k (9)

$$d_{12}\chi = \left(\frac{\sin^2 \chi}{l^2} + \frac{\cos^2 \chi}{l^2}\right) d_1 x^1\, d_2 x^2 = \frac{1}{l^2}\, dx\, dy\,.$$

Při oběhu elementárního obdélníčku o ploše

$$dS = dx\, dy$$

nevrátíme se do výchozího bodu s původní hodnotou úhlu χ, ale s hodnotou zvětšenou o

$$(d\chi)_{dS} = \frac{1}{l^2}\, dS\,.$$

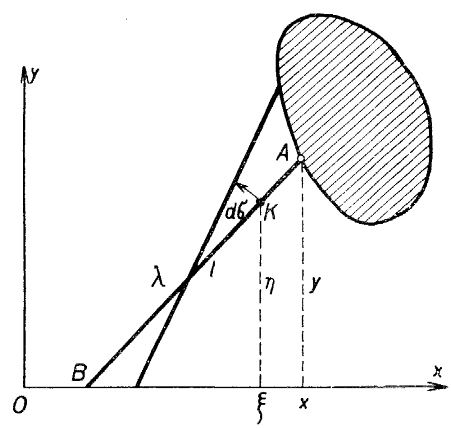
Změnu úhlu χ při objetí konečné části roviny plošného obsahu S pak dostaneme sečtením změn při obězích kolem všech elementárních obdélníčků $dx\, dy$ obsažených uvnitř rovinné plochy S, takže

(10) $$S = l^2(\chi - \chi_0)\,,$$

značí-li χ_0 počáteční sklon planimetu k ose Ox. Tak jsme z vlastností neholonomní funkce došli k rovnici, které se skutečně pro Prytzův planimetr v praxi užívá ([3], rovn. (12) na str. 900).

Primitivní konstrukci Prytzova planimetru zdokonalil Sanden tím, že nahradil ostří sekyrky dvěma stejnými ostrými kolečky volně otáčivými kolem osy kolmé k l a souměrně položenými vzhledem k AB. Pak lze místo změny úhlu χ číst vzájemné pootočení koleček, která se při změně χ otáčí proti sobě. Snadno zjistíme, že toto pootočení je úměrné změně χ. [Srovn. [3], čl. 623,3) a podle (10) také velikosti objeté plochy, kterou však tímto zařízením změříme přesněji než planimetrem Prytzovým.

Sandenova úprava Prytzova planimetru, jehož úhel sklonu je přímo hledanou neholonomní funkcí souřadnic snímače, ukazuje, že také pootočení kolečka kolem vhodně volené osy je možno užít k měření ploch, jak je tomu u planimetru přímkového a pólového.



Obr. 2. Přímkový planimetr.

Přímkový (*lineární, vozíkový*) **planimetr** je v podstatě tyč délky l, na jejímž jednom konci je snímač A a jejíž druhý konec B je vázán na pevnou přímku (pojíždí na vozíku po pravítku), kterou volíme za osu Ox. (Obr. 2). Poloha tyče je zcela určena polohou snímače (úhel χ je tu holonomní funkcí souřadnic x, y). Připevníme-li však k tyči v místě K „integrační" kolečko se zaoblenou hranou, otáčivé kolem osy rovnoběžné se spojnicí AB, je jeho odvalení, vyjádřené počtem n setin obvodu kolečka,

$$\sigma = \frac{2\pi r}{100}\, n\,, \tag{11}$$

kde r je poloměr kolečka. Odvalení σ měří kolmé posunutí tyče v bodě $K(\xi, \eta)$ a píšeme-li $X = OB$, platí podle obr. 2 vztahy

$$\begin{gathered} x - X = l \cos \chi\,, \quad y = l \sin \chi\,, \\ \mathrm{d}\sigma = -\sin \chi\, \mathrm{d}\xi + \cos \chi\, \mathrm{d}\eta\,, \end{gathered} \tag{12}$$

takže

$$\mathrm{d}\sigma = -\frac{y}{l}\, \mathrm{d}\xi + \frac{x - X}{l}\, \mathrm{d}\eta\,. \tag{13}$$

Dále

$$(x - X)^2 + y^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad (x - X)\, \mathrm{d}x - (x - X)\, \mathrm{d}X + y\, \mathrm{d}y = 0\,, \tag{14}$$

čili

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}x + \frac{y}{x - X}\, \mathrm{d}y\,. \tag{15}$$

Označíme-li $\lambda = BK$, bude podle obr. 2

$$\begin{gathered} \xi = X + \frac{\lambda}{l}(x - X)\,, \quad \eta = \frac{\lambda}{l}\, y\,, \\ \mathrm{d}\xi = \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right) \mathrm{d}X + \frac{\lambda}{l}\, \mathrm{d}x\,. \end{gathered} \tag{16}$$

Z (15) a (16) plyne

$$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right) . \frac{y}{x - X}\, \mathrm{d}y\,, \quad \mathrm{d}\eta = \frac{\lambda}{l}\, \mathrm{d}y$$

a podle (13)

$$\mathrm{d}\sigma = -\frac{y}{l}\, \mathrm{d}x - \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right) \frac{y^2}{l(x - X)}\, \mathrm{d}y + \frac{x - X}{l} . \frac{\lambda}{l}\, \mathrm{d}y\,,$$

takže vzhledem k (14)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= -\frac{y}{l}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{l^2(x - X)} \left[(x - X)^2 \lambda - (l - \lambda)\, y^2\right] \mathrm{d}y = \\ &= -\frac{y}{l}\, \mathrm{d}x + \frac{\lambda(l^2 - y^2) - (l - \lambda)\, y^2}{l^2 \sqrt{l^2 - y^2}}\, \mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Píšeme-li tedy

$$(17) \qquad d\sigma = -\frac{y}{l}\,dx + \frac{l\lambda - y^2}{l\sqrt{l^2 - y^2}}\,dy = \sigma_x\,dx + \sigma_y\,dy\,,$$

dostaneme podle (4)

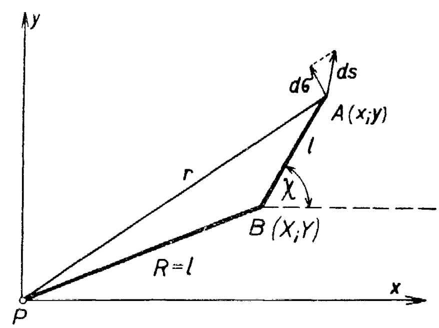
$$(18) \qquad d_{12}\sigma = \left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)dx\,dy = \frac{1}{l}\,dx\,dy\,,$$

$$dS = dx\,dy = l\,d_{12}\sigma\,,$$

$$(19) \qquad S = l(\sigma - \sigma_0) = \frac{2\pi r}{100}\,l(n - n_0)\,,$$

kde $n - n_0$ je změna čtení na kolečku při oběhu plochy S vyjádřená v dílcích rovných setině obvodu kolečka (viz např. [4], čl. 34).

Obdobným postupem plyne, že stejný vzorec platí i pro planimetr pólový (*polární*), ovšem za předpokladu, že měřenou plochu lze vytvořit jako součet elementárních plošek, z nichž každou je možno snímačem skutečně objet. Vzorec (19) platí tedy jen pro plochy, vzhledem k nimž je pól P planimetru vnějším bodem.



Obr. 3. Pólový planimetr.

V obecném případě je odvození vzorce (19) dosti pracné a proto se omezíme na jednoduchý případ, kdy $l = R$ (což zhruba odpovídá skutečnosti) a kdy kromě toho $\lambda = l$. Této poslední volby se sice při konstrukci neužívá, ale λ stejně ve výsledném vzorci ani v obecném případě nevystupuje (pokud leží pól vně měřené plochy). Podle obr. 3 je složka $d\sigma$ posuvu ds hrotu A, který objíždí měřenou plochu, kolmá k tyči AB a má velikost

$$(20) \qquad d\sigma = \cos(\chi + \pi/2)\,dx + \cos\chi\,dy = -\sin\chi\,dx + \cos\chi\,dy\,,$$

kde χ je úhel sevřený tyčí délky l s osou Px. Jsou-li X, Y souřadnice kloubu B, spojeného s pevným pólem P planimetru tyčí délky $R = l$, platí vztahy

$$(21) \qquad x - X = l\cos\chi\,, \qquad y - Y = l\sin\chi\,,$$

$$(22) \qquad X^2 + Y^2 = R^2 = l^2\,,$$

$$(23) \qquad (x - X)^2 + (y - Y)^2 = l^2\,,$$

odkud

$$(24) \qquad 2(xX + yY) = x^2 + y^2 = r^2\,.$$

Dosazením za Y podle (22) dostaneme

$$2xX + 2y\sqrt{l^2 - X^2} = r^2$$

a po úpravě

$$4r^2X^2 - 4r^2xX + r^4 - 4y^2l^2 = 0,$$

takže

$$2X = x \pm y\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\,. \tag{25}$$

Podle (22) tedy

$$\begin{aligned} 4Y^2 &= 4l^2 - 4X^2 = 4l^2 - \left[x^2 + y^2(4l^2/r^2 - 1) \pm 2xy\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\right] = \\ &= y^2 - x^2 + 4l^2x^2/r^2 \mp 2xy\sqrt{4l^2/r^2 - 1} = \\ &= y^2 + x^2(4l^2/r^2 - 1) \mp 2xy\sqrt{4l^2/r^2 - 1} = \\ &= (y \mp x\sqrt{4l^2/r^2 - 1})^2\,. \end{aligned}$$

Protože pak pro $r = 2l$ musí být $Y = +\frac{1}{2}y$, je třeba položit

$$2Y = y \mp x\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\,. \tag{26}$$

Dosadíme-li do (20) z (21), (25) a (26), získáme vztah

$$\begin{aligned} 2l\,\mathrm{d}\sigma &= 2(Y - y)\,\mathrm{d}x + 2(x - X)\,\mathrm{d}y = \\ &= (-y \mp x\sqrt{4l^2/r^2 - 1})\,\mathrm{d}x + (x \mp y\sqrt{4l^2/r^2 - 1})\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Položíme-li jako dříve

$$\mathrm{d}\sigma = \sigma_x\,\mathrm{d}x + \sigma_y\,\mathrm{d}y\,,$$

bude

$$2l\sigma_x = -y \mp x\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\,, \quad 2l\sigma_y = x \mp y\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\,,$$

$$2l\frac{\partial\sigma_x}{\partial y} = -1 \mp x\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,,$$

$$2l\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} = 1 \mp y\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{4l^2/r^2 - 1}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,.$$

Poněvadž pak

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\,, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\,,$$

dostaneme

$$2l\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right) = 2$$

a podle (4)

$$\mathrm{d}_{12}\sigma = \left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{l}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{l}\,\mathrm{d}S\,.$$

Za učiněných předpokladů platí tedy i pro pólový planimetr vzorec (18) a ovšem i vzorec (19), který jak známo, dává velikost libovolné plochy, která neobsahuje pól P planimetru, i když nejsou splněny podmínky $R = \lambda = l$ (srovn. [4], čl. 34).

Všechny uvedené planimetry jsou neholonomní dynamické systémy, jejichž konfigurační prostor je neholonomní dvojrozměrný Riemannův prostor V_3^2 vymezený v trojrozměrném holonomním Riemannově prostoru V_3 jednou neintegrabilní podmínkou. V každém okamžiku má planimetr jen dva stupně volnosti, může však zaujmout libovolnou konfiguraci v trojrozměrném holonomním prostoru V_3. To je charakteristická vlastnost neholonomních prostorů. Obecný neholonomní prostor V_n^m má $m(< n)$ stupňů volnosti, ale jeho body jsou rozptýleny po celém n-rozměrném holonomním prostoru V_n, v němž je prostor V_n^m vymezen $n - m$ neintegrabilními podmínkami.

Závěrem připomeňme, že běžné pozemní dopravní prostředky (kromě kolejových vozidel) od Prytzovy „brusle“, trakaře a Sandenovy „dvojkolky“ až po motocykl a automobil jsou neholonomní mechanické soustavy, které mohou zaujmout libovolnou orientaci v rovině, ačkoli mají při jízdě (beze smyku) jen dva stupně volnosti.

Literatura

[1] *Z. Horák:* Zobecnění pojmu variety. Spisy vyd. Přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 86, Brno 1927.

[2] *V. Trkal:* Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. NČSAV, Praha 1956 (str. 307).

[3] *V. Hruška:* Počet grafický a graficko mechanický. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.

[4] *Z. Horák:* Praktická fysika, SNTL, Praha 1958.

Резюме

ПЛАНИМЕТРЫ КАК НЕГОЛОНОМНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ЗДЕНЕК ГОРАК (Zdeněk Horák)

Автор показывает, что планиметры представляют собой неголономные механические системы с двумя степенями свободы. Конфигурация этих систем определена двумя координатами $x^k (k = 1, 2)$ точки на замкмутой плоской кривой, ограничивающей измеряемую плоскость, и третьим параметром χ, дифференциал которого является неинтегрируемой линейной формой

$$\mathrm{d}\chi = \chi_1\,\mathrm{d}x^1 + \chi_2\,\mathrm{d}x^2 \tag{1}$$

дифференциалов координат точки на этой кривой. Следовательно, билинейный ковариант формы (1)

$$\underset{21}{\mathrm{d}\chi} = \left(\frac{\partial\chi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial\chi_l}{\partial x^k}\right)\underset{1}{\mathrm{d}x^k}\,\underset{2}{\mathrm{d}x^l}\,, \quad k, l = 1, 2 \tag{2}$$

отлигается от нуля и дает изменение значения параметра χ при вращении по контуре замкнутого параллелепипеда с грапями $\underset{1}{\mathrm{d}}x^k$, $\underset{2}{\mathrm{d}}x^l$. Значение билинейного коварианта (2) пропорционально поверхности параллелепипеда, и фактор пропорциональности известных планиметров является постоянным. Поэтому и окончательное изменение параметра χ пропорционально измеряемой плоскости.

Для планиметра Прытза и Сандена параметр χ представляет угол между осью прибора и постоянным направлением.

Для линейного или полярного планиметра роль параметра χ играет угол вращения интегрирующего ролика.

При помощи конкретного математического выражения билинейного коварианта (2) приходит автор к известным формулам, которыми можно пользоваться для выше указанных четырех типов планиметра.

Résumé

LES PLANIMÈTRES COMME SYSTÈMES MÉCANIQUES NON HOLONOMES

Zdeněk Horák

L'auteur montre que les planimètres sont des systèmes mécaniques non-holonomes à deux degrés de liberté. Leur configuration est déterminée par les deux coordonnées $x^k (k = 1, 2)$ d'un point de la courbe plane fermée, limitant l'aire mesurée, et par un troisième paramètre χ dont la différentielle est une forme linéaire

$$\mathrm{d}\chi = \chi_1 \,\mathrm{d}x^1 + \chi_2 \,\mathrm{d}x^2 \tag{1}$$

non intégrable des différentielles des coordonnées du point de la courbe. Le covariant bilinéaire de la forme (1)

$$\underset{21}{\mathrm{d}}\chi = (\underset{21}{\mathrm{dd}} - \underset{12}{\mathrm{dd}})\,\chi = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \chi_l}{\partial x^k}\right) \underset{1}{\mathrm{d}}x^k \,\underset{2}{\mathrm{d}}x^l \tag{2}$$

est donc différent de zéro et donne le changement du paramètre χ, causé par la circulation autour d'un parallélogramme fermé engrendré par les deux éléments linéaires $\underset{1}{\mathrm{d}}x^k$, $\underset{2}{\mathrm{d}}x^l$. La valeur du covariant bilinéaire est proportionnelle à la surface du dit parallélogramme élémentaire, le facteur de proportionnalité étant constant pour les planimètres connus, de sorte que cette proportionnalité se conserve encore pour les surfaces finies.

Pour les planimètres de Prytz et de Sanden, le paramètre χ est égal à l'angle d'écart de l'axe de l'appareil par rapport à sa direction initiale.

Dans le cas des planimètres linéaire et polaire, c'est l'angle de déroulement de la roulette d'intégration qui joue le rôle du paramètre χ.

Partant de l'expression (2) du covariant bilinéaire et poussant les calculs jusqu'au bout, l'auteur arrive aux formules bien connues dont on se sert pour les quatre types de planimètres mentionnés plus haut.

Adresa autora: Prof. dr. *Zdeněk Horák*, Katedra fysiky strojní fakulty ČVUT, Praha 2, Karlovo nám. 13.