Václav Vodička

O použití výrazu $\alpha^n + \beta^n$

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 4, 272–281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102809

O POUŽITÍ VÝRAZU $\alpha^n + \beta^n$

VÁCLAV VODIČKA

(Došlo dne 25. května 1961.)

V různých otázkách čisté i aplikované matematiky má značný význam výraz $\alpha^n + \beta^n$. Článek ukazuje na řadě typických příkladů zajímavé důsledky, k nimž dospějeme tak, že chápeme zmíněný výraz jako symetrickou funkci veličin α, β.

1. ODVOZENÍ ZÁKLADNÍCH VZORCŮ

a) Úkolem tohoto odstavce je vyjádřit symetrickou funkci

$$s_n = s_n(\alpha, \beta) = \alpha^n + \beta^n\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha\beta \neq 0 \tag{1}$$

veličin α, β s pomocí základních symetrických funkcí

$$p = \alpha + \beta\,, \quad q = \alpha\beta \tag{2}$$

těch veličin. Protože zřejmě platí

$$s_{-n} = q^{-n} s_n\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3}$$

stačí řešit právě zmíněnou úlohu jen pro celá $n \geqq 0$.

Postupné vyjádření potenčních součtů s_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ s pomocí veličin p, q se snadno provádí s použitím základních hodnot $s_0 = 2$, $s_1 = p$ a očividných rekurentních vztahů

$$s_{n+2} - p s_{n+1} + q s_n = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

b) Obecný vzorec pro s_n ($n \geqq 0$, n celé) jako funkci veličin p, q najdeme s pomocí Waringovy formule, kterou nyní uvádíme pouze v tom rozsahu a za těch předpokladů, jichž budeme potřebovat při dalších úvahách.

Má-li rovnice

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu x^{m-\mu} = 0\,, \quad a_0 a_1 a_2 \ldots a_m \neq 0,\ m \geqq 1 \tag{5}$$

kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_m$ a zavedeme-li označení

$$t_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n\,, \tag{5.1}$$

platí tzv. Waringovy vzorce

$$(6)\qquad \frac{1}{n}\,t_n = \sum \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m - 1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_m!}\,\frac{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots a_m^{\lambda_m}}{(-a_0)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m}}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

sčítá se přes všechny soustavy celých nezáporných čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ s vlastností

$$(6.1)\qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + m\lambda_m = n\,.$$

c) Při $m = 2$ dostaneme s označením $a_1 = -pa_0$, $a_2 = qa_0$ podle (6) pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{n}\,(x_1^n + x_2^n) = \sum (-1)^{\lambda_2}\,\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!}\,p^{\lambda_1}q^{\lambda_2}\,.$$

V každém sčítanci přitom je podle (6.1)

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = n$$

a proto lze psáti dále

$$(7)\qquad \frac{1}{n}\,(x_1^n + x_2^n) = \sum_{\lambda_2=0}^{[n/2]} (-1)^{\lambda_2}\,\frac{(n - \lambda_2 - 1)!}{\lambda_2!(n - 2\lambda_2)!}\,p^{n-2\lambda_2}q^{\lambda_2}\,;$$

Gaussova celistvá část $[n/2]$ čísla $n/2$ je ovšem určena předpisem

$$(7.1)\qquad [n/2] = n/2 \text{ pro } n \text{ sudá}\,, \quad [n/2] = \tfrac{1}{2}(n - 1) \text{ pro } n \text{ lichá}\,.$$

Píšeme-li α místo x_1, β místo x_2 a uvážíme-li, že pak je

$$p = -\frac{a_1}{a_0} = x_1 + x_2 = \alpha + \beta\,, \quad q = \frac{a_2}{a_0} = x_1x_2 = \alpha\beta\,,$$

dává nám vzorec (7) právě žádané vyjádření

$$(8)\qquad s_n = \alpha^n + \beta^n = n \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\lambda}{n - \lambda} \binom{n - \lambda}{\lambda} p^{n-2\lambda}q^\lambda$$

potenčních součtů s_n s pomocí veličin (2).

Omezující předpoklady, při nichž jsme napsali Waringovy vzorce (6), omezují platnost právě získané formule (8) zprvu jen na případ $pq \neq 0$ a na hodnoty $n = 1, 2, 3, \ldots$ Čtenář se však snadno přesvědčí přímým výpočtem o tom, že platí vyjádření (8) při každém celém $n \geqq 1$ i v případě $pq = 0$. Ke vzorci správnému pro všechna celá $n \geqq 0$ pak dospějeme tím, že píšeme formuli (8) ve tvaru

$$(8.1)\qquad s_n = \alpha^n + \beta^n = \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} (-1)^\lambda \left[\binom{n - \lambda - 1}{n - 2\lambda} + \binom{n - \lambda}{n - 2\lambda}\right] p^{n-2\lambda}q^\lambda\,.$$

Symboly $\binom{r}{k}$ ve vzorcích (8), (8.1) ovšem znamenají obvyklá kombinační čísla. Z jejich vlastností připomínáme výslovně jen formuli

$$(8.2)\qquad \binom{r}{0} = 1\,, \quad r = -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Souhrnem předešlých úvah a zároveň řešením úlohy formulované v odst. a) je základní

Věta 1. *Za označení* (2) *platí pro libovolná* α, β *při všech celých* $n \geqq 1$ *vzorec* (8) *a při každém celém* $n \geqq 0$ *formule* (8.1); *význam symbolu* $\binom{r}{0}$ *je přitom určen předpisem* (8.2). *Za předpokladu* $\alpha\beta \neq 0$ *můžeme počítat výrazy* $s_n = \alpha^n + \beta^n$ *i pro celá záporná* n *a to podle vzorců*

$$s_n = q^n s_{-n}, \quad n = -1, -2, -3, \ldots \tag{8.3}$$

Další úvahy budou už věnovány použití právě odvozené základní věty v různých otázkách čisté i aplikované matematiky.

2. NĚKTERÉ IDENTITY

Speciální volbou hodnot α, β dostáváme ze vzorců (8), (8.1) zajímavé vztahy. Některé z nich se vyskytují v literatuře poměrně zřídka.

a) Pro $\alpha = \cos^2 \varphi$, $\beta = \sin^2 \varphi$ je $p = 1$, $q = \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi$ a formule (8) nabude tvaru

$$\frac{1}{n}(\cos^{2n}\varphi + \sin^{2n}\varphi) = \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\lambda}{4^\lambda(n-\lambda)} \binom{n-\lambda}{\lambda} \sin^{2\lambda} 2\varphi\,. \tag{9}$$

Dosadíme-li sem $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, vychází vztah

$$\sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\lambda}{4^\lambda(n-\lambda)} \binom{n-\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2^{n-1}n}\,, \tag{9.1}$$

který má význam v teorii Čebyševových polynomů — viz dále bod c).

Bez zajímavosti není ani důsledek, k němuž vede náš základní vzorec (8) pro $\alpha = \cos^2 \varphi$, $\beta = -\sin^2 \varphi$. Dostaneme

$$\frac{\cos^{2n}\varphi + (-1)^n \sin^{2n}\varphi}{n\cos^n 2\varphi} = \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{1}{4^\lambda(n-\lambda)} \binom{n-\lambda}{\lambda} \operatorname{tg}^{2\lambda} 2\varphi \tag{10}$$

a podobné identity bychom mohli napsat i s hyperbolickými funkcemi.

b) Dosadíme-li do vzorce (8) $\beta = 1/\alpha$ při libovolném $\alpha \neq 0$, vychází

$$\frac{\alpha^{2n}+1}{n(\alpha^2+1)^n} = \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\lambda}{n-\lambda} \binom{n-\lambda}{\lambda} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\right)^{2\lambda} \tag{11}$$

a odtud např. pro $\alpha = e^{i\varphi}$ známý vztah

$$\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1} n \cos^n \varphi} = \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\lambda}{4^\lambda(n-\lambda)} \binom{n-\lambda}{\lambda} \frac{1}{\cos^{2\lambda}\varphi}\,. \tag{11.1}$$

c) Přímé použití má náš základní vzorec (8) při vyjádření Čebyševových polynomů v normálním tvaru, tj. podle rostoucích mocnin proměnné x. Obvykle se k tomu používá příslušné diferenciální rovnice, formule (8) však dává přímo

$$(12)\qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2}\{[x + \sqrt{(x^2-1)}]^n + [x - \sqrt{(x^2-1)}]^n\} =$$

$$= 2^{n-1} n \sum_{\lambda=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\lambda}{4^\lambda(n-\lambda)} \binom{n-\lambda}{\lambda} x^{n-2\lambda};$$

pro $x = 1$ odtud dostáváme opět dřívější skutečnost (9.1).

d) Při dalších úvahách budeme potřebovat vyjádřit výrazy

$$(13)\qquad S_r = \sum_{\rho=0}^{[r/2]} q^\varrho s_{r-2\rho}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

s pomocí veličin p, q. Použijeme k tomu vzorce (8.1).

Uvážíme-li, že je za daných poměrů vždy $\varrho + [\frac{1}{2}(r - 2\varrho)] = [r/2]$, máme podle (8.1) předně

$$s_{r-2\varrho} = \sum_{\lambda=0}^{[\frac{1}{2}(r-2\rho)]} (-1)^\lambda \left[\binom{r-\lambda-2\varrho-1}{r-2\lambda-2\varrho} + \binom{r-\lambda-2\varrho}{r-2\lambda-2\varrho}\right] p^{r-2\lambda-2\rho} q^\lambda =$$

$$= (-1)^\rho q^{-\rho} \sum_{\kappa=\rho}^{[r/2]} (-1)^\kappa \left[\binom{r-\kappa-\varrho-1}{r-2\kappa} + \binom{r-\kappa-\varrho}{r-2\kappa}\right] p^{r-2\kappa} q^\kappa.$$

Součet v tomto výrazu je však možno vésti už od hodnoty $\kappa = 0$, ježto jsou pro $0 \leqq \kappa < \varrho$ kombinační čísla v něm figurující rovna vesměs nule. Máme tedy dále

$$q^\varrho s_{r-2\rho} = (-1)^\rho \sum_{\kappa=0}^{[r/2]} (-1)^\kappa \left[\binom{r-\kappa-\varrho-1}{r-2\kappa} + \binom{r-\kappa-\varrho}{r-2\kappa}\right] p^{r-2\kappa} q^\kappa$$

a formule (13) lze psát ve tvaru

$$S_r = \sum_{\kappa=0}^{[r/2]} (-1)^\kappa p^{r-2\kappa} q^\kappa \sum_{\rho=0}^{[r/2]} (-1)^\varrho \left[\binom{r-\kappa-\varrho-1}{r-2\kappa} + \binom{r-\kappa-\varrho}{r-2\kappa}\right],$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

Vnitřní součet má hodnotu

$$\binom{r-\kappa}{\kappa} + (-1)^{[r/2]} \binom{r-[r/2]-\kappa-1}{r-2\kappa}$$

a předešlé vzorce pro S_r nabudou tvaru

$$S_r = \sum_{\kappa=0}^{[r/2]} (-1)^\kappa \binom{r-\kappa}{\kappa} p^{r-2\kappa} q^\kappa + (-1)^{[r/2]} T_r,$$

$$T_r = \sum_{\kappa=0}^{[r/2]} (-1)^\kappa \binom{r-[r/2]-\kappa-1}{r-2\kappa} p^{r-2\kappa} q^\kappa, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Nyní však nahlédneme snadno, že jsou pro lichá r všechna kombinační čísla figurující ve výraze T_r rovna nule a proto je při každém lichém r také $T_r = 0$. Při sudých

$r \geqq 0$ je mezi kombinačními čísly z výrazu T_r pouze jedno různé od nuly, totiž kombinační číslo ze sčítance odpovídajícího hodnotě $\kappa = [r/2]$. Pro sudá r tedy máme $T_r = (-1)^{[r/2]} q^{[r/2]}$.

Celkem tudíž vychází

$$T_r = (-1)^{r/2} q^{r/2} \cos^2 \frac{r\pi}{2}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

a výše uvedené vzorce pro výrazy S_r nabudou konečného tvaru

$$(14) \quad S_r = \sum_{\rho=0}^{[r/2]} q^\rho s_{r-2\rho} = (-1)^r q^{r/2} q^{r2} \cos^2 \frac{r\pi}{2} + \sum_{\kappa=0}^{[r/2]} (-1)^\kappa \binom{r-\kappa}{\kappa} p^{r-2\kappa} q^\kappa, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

3. LUCASOVY POSLOUPNOSTI

a) Jde tu o posloupnosti definované za předpokladů $\alpha - \beta \neq 0$, $\alpha\beta \neq 0$ předpisem

$$(15) \qquad L_r = \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a důležité třeba v geodesii (Bergstrandova triangulační metoda), v teorii diferenčních rovnic a vůbec při mnoha otázkách, jež se týkají tzv. řetězových procesů.

Z definičního vzorce (15) je vidět, že jsou Lucasova čísla L_r symetrickými funkcemi veličin α, β a proto se dají vyjádřit s pomocí základních symetrických funkcí (2). To je úkolem nynějšího odstavce.

b) Především je jasné, že platí vztahy

$$(16) \qquad L_{-r} = -q^{-r} L_r, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a proto se můžeme v dalším omezit jen na čísla L_r s celými nezápornými indexy r. Jejich postupný výpočet se nejsnáze provádí s pomocí základních hodnot $L_0 = 0$, $L_1 = 1$ z rekurentních relací

$$(17) \qquad L_{r+2} - pL_{r+1} + qL_r = 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Tímto způsobem jsme získali tabulku výrazů $L_0, L_1, L_2, \dots, L_{10}$:

$$(17.1) \quad L_0 = 0, \quad L_1 = 1, \quad L_2 = p, \quad L_3 = p^2 - q, \quad L_4 = p^3 - 2pq,$$
$$L_5 = p^4 - 3p^2q + q^2, \quad L_6 = p^5 - 4p^3q + 3pq^2, \quad L_7 = p^6 - 5p^4q +$$
$$+ 6p^2q^2 - q^3, \quad L_8 = p^7 - 6p^5q + 10p^3q^2 - 4pq^3, \quad L_9 = p^8 - 7p^6q +$$
$$+ 15p^4q^2 - 10p^2q^3 + q^4, \quad L_{10} = p^9 - 8p^7q + 21p^5q^2 - 20p^3q^3 + 5pq^4.$$

c) Nyní se obrátíme ke zmíněnému hlavnímu úkolu, totiž k vyjádření libovolného Lucasova čísla s pomocí veličin p, q. Začneme s čísly L_{r+1}, $r = 0, 1, 2, \dots$, která můžeme snadno napsat s pomocí potenčních součtů $s_n = \alpha^n + \beta^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Stačí totiž provést dělení naznačené v definičním předpisu (15) a vychází

$$L_{r+1} = -q^{r/2}\cos^2\frac{r\pi}{2} + \sum_{\rho=0}^{[r/2]} q^\rho s_{r-2\rho}\,, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Použijeme-li nyní předešlého výsledku (14) a připojíme-li ještě hodnotu $L_0 = 0$, dostáváme vyjádření

$$(18) \qquad L_0 = 0\,, \quad L_{r+1} = \sum_{\kappa=0}^{[r/2]}(-1)^\kappa \binom{r-\kappa}{\kappa} p^{r-2\kappa} q^\kappa\,, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

každého Lucasova čísla s nezáporným indexem s pomocí výrazů p, q; čísla L_r se zápornými indexy r se převedou na veličiny (18) s pomocí formulí (16).

Souhrnem právě provedených úvah je

Věta 2. *Lucasova čísla $L_r = L_r(\alpha, \beta)$, definovaná pro $(\alpha - \beta)\,\alpha\beta \neq 0$ předpisem (15), se vyjadřují při nezáporných indexech r s pomocí veličin (2) podle vzorců (18). Obdobné vyjádření čísel L_r se záporným indexem se převede na případ čísel s indexem kladným s pomocí vztahů (16).*

4. HOMOGENNÍ DIFERENČNÍ PROBLÉMY 2. ŘÁDU

Souvislost předešlých úvah s teorií i s použitím diferenčních rovnic je zřejmá už z dřívějších rekurentních vztahů (4) a (17). V tomto odstavci si blíže všimneme základního problému lineární diferenční rovnice 2. řádu a s konstantními koeficienty. V technické praxi se řešení zpravidla vyjadřuje trigonometrickými či hyperbolickými funkcemi. Ukážeme, jak je možno s použitím předchozích výsledků vyjádřit řešení přímo s pomocí koeficientů příslušné rovnice a s pomocí daných počátečních hodnot.

a) Jak už pověděno, bude předmětem našich úvah problém, který lze obecně formulovat vztahy

$$(19) \qquad y_{x+2} - py_{x+1} + qy_x = 0\,, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \qquad y_h = a_h\,, \quad y_k = a_k\,;$$

$h < k$ jsou libovolná celá čísla, a_h, a_k dané konstanty a p, q rovněž dané konstanty s vlastností

$$(19.1) \qquad q\sqrt{(p^2 - 4q)} \neq 0\,.$$

Určíme-li výrazy α, β ze vztahů (2), tj. podle vzorců

$$(20) \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}[p + \sqrt{(p^2 - 4q)}]\,, \quad \beta = \tfrac{1}{2}[p - \sqrt{(p^2 - 4q)}]\,,$$

má obecné řešení diferenční rovnice (19) tvar

$$(21) \qquad y_x = C_1\alpha^x + C_2\beta^x\,.$$

Pro konstanty C_1, C_2 vyjdou v našem případě z podmínek (19) rovnice

$$C_1\alpha^h + C_2\beta^h = a_h\,, \quad C_1\alpha^k + C_2\beta^k = a_k\,.$$

Determinant D této soustavy má hodnotu — viz (15) —

$$D = \alpha^h\beta^k - \alpha^k\beta^h = \alpha^h\beta^h(\beta^{k-h} - \alpha^{k-h}) = -(\alpha - \beta)\, q^h L_{k-h}$$

a pro zmíněné konstanty C_1, C_2 dostáváme

$$DC_1 = a_h\beta^k - a_k\beta^h\,, \quad DC_2 = -a_h\alpha^k + a_k\alpha^h\,.$$

Dosazením do vzorce (21) vyjde s použitím Lucasových čísel (15) řešení y_x problému (19) ve tvaru

(22) $$y_x = \frac{1}{L_{k-h}}\left(-a_h q^{k-h} L_{x-k} + a_k L_{x-h}\right), \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Právě získaný výsledek vyjádříme s přihlédnutím k větě 2 předešlého odstavce základní

Větou 3. *Při označení (20) a za předpokladů (19.1) lze řešení diferenčního problému (19) vyjádřit s pomocí Lucasových čísel (15) podle vzorce (22). Odtud pak s použitím věty 2 snadno vyjádříme řešení y_x úlohy (19) s pomocí koeficientů p, q výchozí diferenční rovnice (19) a s pomocí daných konstant a_h, a_k.*

b) Pro $h = 0$, $k = 1$, $a_h = 2$, $a_k = p$ odpovídá problém (19) naší základní úloze o potenčních součtech $s_x = \alpha^x + \beta^x$ — viz dřívější vztahy (1) a (4). Vzorec (22) nám tedy dává vyjádření

(23) $$s_x = \alpha^x + \beta^x = pL_x - 2qL_{x-1}\,, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

výrazů s_x s pomocí Lucasových čísel $L_r = L_r(\alpha, \beta)$.

c) Také n-řadový kontinuant ($n \geqq 1$)

(24) $$K_n = K_n(p, q) = \begin{vmatrix} p, & q, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 1, & p, & q, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & p, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & p, & q \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & p \end{vmatrix}$$

bezprostředně souvisí s úlohou (19). Platí totiž rekurentní vzorce

(24.1) $$K_{n+2} - pK_{n+1} + qK_n = 0\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a kromě toho je zřejmě $K_1 = p$, $K_2 = p^2 - q$.

Podle formulí (22) a (17) tedy vychází pro všechna celá $n \geqq 2$

$$K_n = -pqL_{n-2} + (p^2 - q)\, L_{n-1} = -qL_{n-1} + pL_n = L_{n+1}\,;$$

tento vzorec dává správný výsledek také při $n = 1$ a s použitím dřívějšího vyjádření (18) lze tudíž psáti

(25) $$K_n(p, q) = L_{n+1} = \sum_{\kappa=0}^{[n/2]} (-1)^\kappa \binom{n-\kappa}{\kappa} p^{n-2\kappa} q^\kappa\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

S teorií kontinuantů úzce souvisí třeba známá Fibonacciova posloupnost

$$(26)\qquad F_n = (-1)^n K_n(-1, -1) = \sum_{\kappa=0}^{[n/2]} \binom{n-\kappa}{\kappa}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a dále i Čebyševovy polynomy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, které se dají vyjádřit ve tvaru

$$(27)\qquad T_n(x) = K_n(2x, 1) - xK_{n-1}(2x, 1), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

5. NEHOMOGENNÍ DIFERENČNÍ PROBLÉMY 2. ŘÁDU

a) Nyní se budeme zabývat ještě nehomogenní diferenční úlohou

$$(28)\qquad f_{x+2} - pf_{x+1} + qf_x = A + Bx, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$f_h = a_h, \quad f_k = a_k;$$

A, B jsou libovolné konstanty, p, q rovněž konstanty s vlastnostmi

$$(28.1)\qquad q \neq 0, \quad p^2 - 4q \neq 0, \quad p - q - 1 \neq 0,$$

$h < k$ jsou nějaká dvě celá čísla, a_h, a_k dané konstanty.

Obecné řešení rovnice (28) zní

$$(29)\qquad f_x = C_1\alpha^x + C_2\beta^x + F(x), \quad \alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = q,$$

$$(29.1)\quad F(x) = \frac{1}{(1 - p + q)^2}\left[(1 - p + q)A + (2 - p)B\right] + \frac{B}{1 - p + q}x.$$

Pro integrační konstanty C_1, C_2 dostáváme v našem případě z daných hodnot $f_h = a_h$, $f_k = a_k$ rovnice

$$C_1\alpha^h + C_2\beta^h = a_h - F(h), \quad C_1\alpha^k + C_2\beta^k = a_k - F(k),$$

jichž řešením a dosazením do vztahu (29) dospíváme obdobným výpočtem jako při homogenní úloze (19) k řešení

$$(30)\qquad f_x = \frac{1}{L_{k-h}}\{[a_k - F(k)]\,L_{x-h} - [a_h - F(h)]\,q^{k-h}L_{x-k}\} + F(x),$$
$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

daného diferenčního problému (28).

Používajíce dřívějších vztahů (16) můžeme ovšem zavésti do vzorce (30) Lucasova čísla s vesměs nezápornými indexy. Tím dostaneme řešení (30) v novém tvaru

$$(31)\quad f_x = \frac{q^{h-x}}{L_{k-h}}\{[a_h - F(h)]\,L_{k-x} - [a_k - F(k)]\,L_{h-x}\} + F(x), \quad x < h,$$

$$f_x = \frac{1}{L_{k-h}}\{[a_k - F(k)]\,L_{x-h} + [a_h - F(h)]\,q^{x-h}L_{k-x}\} + F(x), \quad h \leqq x \leqq k,$$

$$f_x = \frac{1}{L_{k-h}}\{[a_k - F(k)]\,L_{x-h} - [a_h - F(h)]\,q^{k-h}L_{x-k}\} + F(x), \quad k < x;$$

čísla L_r lze přitom počítat podle předpisu (18), výraz $F(x)$ je definován formulí (29.1).

b) Jako příklad technického problému, kde lze použít předešlých výsledků, uvádíme častý případ spojitého nosníku celkové délky nl a na $n + 1$ stejně od sebe vzdálených podporách. Nosník nechť nese lichoběžníkové obtížení intensity

$$q(s) = q_0 + (q_n - q_0)\frac{s}{nl}, \quad 0 \leqq s \leqq nl. \tag{32}$$

Pro ohybové momenty M_x v místech podpor lze odvodit obvyklou elementární cestou Clapeyronovu rovnici

$$M_x + 4M_{x+1} + M_{x+2} = -\frac{1}{2}\left[q_0 + (q_n - q_0)\frac{x+1}{n}\right] l^2, \tag{33}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, n - 2.$$

Přitom ovšem musí platit $M_0 = M_n = 0$.

S použitím hodnot

$$p = -4, \quad q = 1, \quad A = -\frac{1}{2}\left[q_0 + \frac{1}{n}(q_n - q_0)\right] l^2, \quad B = -\frac{1}{2n}(q_n - q_0)\, l^2,$$

$$h = 0, \quad k = n, \quad a_h = 0, \quad a_k = 0$$

dává pak prostřední skupina vzorců (31) přímo řešení

$$M_x = -\frac{1}{L_n}\left[F(0)\, L_{n-x} + F(n)\, L_x\right] + F(x), \tag{34}$$

$$F(x) = -\frac{1}{12}\left[q_0 + \frac{1}{n}(q_n - q_0)(x + 2)\right] l^2, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

našeho problému; Lucasova čísla mají v tomto případě hodnoty

$$L_0 = 0, \quad L_r = \sum_{\kappa=0}^{[\frac{1}{2}(r-1)]} (-1)^{r-\kappa-1} 4^{r-2\kappa-1} \binom{r-\kappa-1}{\kappa}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{34.1}$$

Řešení (34) je možno psáti také ve tvaru

$$\frac{12}{l^2} M_x = \frac{1}{L_n}\left\{\left[q_0 + \frac{2}{n}(q_n - q_0)\right] L_{n-x} + \left[q_n + \frac{2}{n}(q_n - q_0)\right] L_x\right\} - \tag{35}$$

$$- q_0 - \frac{1}{n}(q_n - q_0)(x + 2), \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Zvláštní případy. a) Jde-li o nosník s rovnoměrným zatížením o celkové hodnotě Q, dostaneme ze vzorce (35) známý výsledek

$$M_x = \frac{Ql}{12n}\left[\frac{1}{L_n}(L_x + L_{n-x}) - 1\right], \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{36}$$

b) Také při trojúhelníkovém zatížení o celkové hodnotě Q dává formule (35) dosti známý výsledek

$$M_x = \frac{Ql}{6n^2}\left\{\frac{1}{L_n}\left[2L_{n-x} + (n + 2)\, L_x\right] - x - 2\right\}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{37}$$

Резюме

К ПРИЛОЖЕНИЯМ ВЫРАЖЕНИЯ $\alpha^n + \beta^n$

ВАЦЛАВ ВОДИЧКА (Václav Vodička)

В журнале ZAMM 35 (1955), No 12 имеется формула для разложения выражения $\alpha^n + \beta^n$ по постепенным степеням $\alpha\beta$ при условии, что $\alpha + \beta = 1$. Не взирая на то, что это ограничение несущественно, является выше приведенный пример самым простым из частных случаев уже 200 лет известной формулы Варинга (Waring, Miscellanea analytica, 1762), находящей применение в теории симметрических функций. Эти вопросы и их многостороннее применение в различных дисциплинах теоретической и прикладной математики не являются, как кажется, общеизвестными. Собранный в настоящей статье материал по комплексу этих вопросов, предназначенный для инженеров, может дать читателю достаточно хорошее представление о дальнейших возможностях приложений.

Zusammenfassung

ZUR ANWENDUNG DES AUSDRUCKES $\alpha^n + \beta^n$

VÁCLAV VODIČKA

In der ZAMM, Bd. 35, H. 12, Dez. 1955, befindet sich eine Formel zur Entwicklung des Ausdruckes $\alpha^n + \beta^n$ nach fortschreitenden Potenzen von $\alpha\beta$ und zwar unter der Voraussetzung $\alpha + \beta = 1$. Abgesehen davon, dass diese Einschränkung unwesentlich ist, erscheint das oben erwähnte Ergebnis als der allereinfachste Spezialfall der schon 200 Jahre alten Waringschen Formel (Waring, Miscellanea analytica, 1762) aus der Theorie symmetrischer Funktionen. Diese Sachen und ihre vielseitige Bedeutung in verschiedenen Fragen der reinen und angewandten Mathematik scheinen jedoch in technischen Kreisen nicht allgemein bekannt zu sein. In einer für Ingenieure bestimmten Auswahl von Tatsachen aus dem nämlichen Fragenkomplex bringt unser Aufsatz hoffentlich eine hinreichende Vorstellung von etwaiger weiterer Anwendungsmöglichkeit.

Adresa autora: Dr. *Václav Vodička*, Moskevská 52, Plzeň.