Aplikace matematiky

Jaroslav Fuka

Řešení druhého problému pružností v excentrickém mezikruží pro nestlačitelné těleso

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 3, 171–185

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102800`

ŘEŠENÍ DRUHÉHO PROBLÉMU PRUŽNOSTI V EXCENTRICKÉM MEZIKRUŽÍ PRO NESTLAČITELNÉ TĚLESO

JAROSLAV FUKA

(Došlo dne 27. června 1961.)

V tomto článku je použito homografického zobrazení k odvození explicitních vzorců pro řešení druhého problému pružnosti v excentrickém mezikruží pro nestlačitelné prostředí.

1. T bude všude v této práci znamenat excentrické mezikruží, ohraničené kružnicemi $c_0 : z = z_0 + r_0 e^{i\Theta}$, $c_1 : z = z_1 + r_1 e^{i(2\pi - \Theta)}$, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$, $z_0 \neq z_1$, $0 < r_1 < r_0 - |z_1 - z_0|$. Budeme se zabývat touto úlohou:

Problém I. *Nechť na c_0 je dána po částech dostatečně hladká* (viz [1] str. 109, def. 2.11.3) *komplexní funkce $g_0(z)$ a na c_1 po částech dostatečně hladká funkce $g_1(z)$, při čemž platí*

$$\operatorname{Im}\left[\int_{c_0} \overline{g_0(t)}\, \mathrm{d}t + \int_{c_1} \overline{g_1(t)}\, \mathrm{d}t\right] = 0\,. \tag{1}$$

Jest určiti funkce $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ holomorfní v T a konstantu A tak, aby splňovaly tyto podmínky:

1. *Funkce $\varphi_0(z)$, $\varphi_0'(z)$, $\psi_0(z)$* a $G_0(z) = \varphi_0(z) - z\overline{\varphi_0'(z)} - \overline{\psi_0(z)}$ *jsou spojité v $\overline{T}$ (tj. v uzávěru T) s výjimkou konečného počtu bodů t_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ na hranici T, v jejichž okolí se funkce $\varphi_0(z)$* a $G_0(z)$ *chovají tak, že*

$$|\varphi_0(z)| \leqq \left|\frac{1}{z - t_k}\right|^{\frac{1}{2} - \sigma}, \quad |G_0(z)| \leqq \left|\frac{1}{z - t_k}\right|^{\frac{1}{2} - \sigma}, \quad \sigma > 0\,. \tag{2}$$

2. *Je-li $z \neq t_k$, je na c_i $(i = 0, 1)$*

$$G_0(z) = g_i(z) + \frac{A}{4\pi} \lg |z - \zeta|^2 - \frac{z}{4\pi} \cdot \frac{\overline{A}}{\overline{z - \zeta}}\,, \tag{3}$$

kde ζ je pevně zvolený bod, ležící ve vnitřku c_1.

Fysikální interpretace problému I jest tato: jde o řešení druhého problému pružnosti pro homogenní isotropní nestlačitelné těleso (tj. na hranici jsou dána posunutí). V každém bodě ležícím v T platí

$$\frac{2E}{3}(u + iv) = \varphi - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\,, \quad \tfrac{1}{2}(Y_y - X_x) + iX_y = \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\,,$$

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z)\,,$$

kde

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - \frac{A}{4\pi}\lg(z - \zeta)\,, \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \frac{\bar{A}}{4\pi}\lg(z - \zeta)\,,$$

X_x, X_y, Y_y jsou komponenty tensoru napětí, u, v komponenty vektoru posunutí a E modul pružnosti.

V [2] je dokázána existence a jednoznačnost řešení problému I. Připomeňme, že konstanta A je určena jednoznačně, funkce $\varphi_0(z)$ až na lineární funkci tvaru $Cz + D$, kde C je reálná, D komplexní konstanta, $\psi_0(z)$ až na konstantu $\bar{D}$, a že podmínka (1) fysikálně znamená, že se plocha tělesa T deformací nezmění, což je v souhlase s nestlačitelností T.

Řešení problému I převedeme na řešení nekonečného systému lineárních rovnic; ten dostaneme v podstatě řešením jistého problému v mezikruží (koncentrickém), který určitým způsobem souvisí s řešením problému I. Metoda je táž jako v [3], proto budeme postupovat rychleji.

2. V tomto odstavci uvedeme některá pomocná tvrzení.

Lemma 1. *Buďtež $\varphi(z)$, $\chi(z)$ funkce holomorfní v tělese S. Budiž* $2iV(z) = \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) - (z\overline{\varphi(z)} + \overline{\chi(z)})$. *Potom platí*

$$-\frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \varphi - z\overline{\varphi'} - \overline{\chi'}\,. \tag{4}$$

Probíhá-li oblouk $\widehat{z_0 z}$ v S, platí

$$2i(V(z) - V(z_0)) = 2i\,\mathrm{Im}\int_{\widehat{z_0 z}}(\bar{z}\varphi' + \chi' - \bar{\varphi})\,\mathrm{d}z\,. \tag{5}$$

Důkaz: (4) se lehce spočítá. Z (4) pak plyne $\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = \overline{i(\varphi - z\overline{\varphi'} - \overline{\chi'})}$ a tedy

$$2i(V(z) - V(z_0)) = 2i\int_{\widehat{z_0 z}}\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 2i\,\mathrm{Im}\int_{\widehat{z_0 z}}(\bar{z}\varphi' + \chi' - \bar{\varphi})\,\mathrm{d}z\,.$$

Lemma 2. *Budiž S těleso, jež neobsahuje bod $z = -c$, S_1 těleso, které vznikne z S transformací $w = \dfrac{az + b}{z + c}$, $ac - b \neq 0$, reálné. Budiž* $V(z) = \mathrm{Im}\,(\bar{z}\varphi + \chi)$

funkce biharmonická v S, $V_1(w) = \operatorname{Im}(\bar{w}f + h)$ *funkce biharmonická v* S_1. *Nechť funkce* $f(w)$, $h(w)$ *jsou s funkcemi* $\varphi(z)$, $\chi(z)$ *svázány vztahy*

$$(6) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{w - a}\left[h(w) + \bar{a}f(w)\right], \quad \chi(z) = \frac{1}{w - a}\left[\bar{c}h(w) + \bar{b}f(w)\right].$$

Potom platí

$$(7) \qquad f(w) - w\,\overline{\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}} - \overline{\frac{\mathrm{d}h(w)}{\mathrm{d}w}} =$$

$$= \frac{w - a}{\overline{w - a}}\left[\overline{\frac{w - a}{b - ac}}\, 2iV(z) - \left(\varphi(z) - z\,\overline{\frac{\mathrm{d}\varphi(z)}{\mathrm{d}z}} - \overline{\frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}}\right)\right]$$

a

$$(8) \qquad V(z) = \frac{b - ac}{|w - a|^2}\, V_1(w).$$

Důkaz: Vzorce (6), (7), (8) vzniknou ze vzorců (14), (15), (16) v [3] str. 52, klademe-li $\varphi^*(z) = i\varphi(z)$, $\chi^*(z) = i\chi(z)$, $f^*(w) = if(w)$ a $h^*(w) = ih(w)$.

Poznámka 1. Jak známo, existuje homografické zobrazení $w_1 = (a_1 z + b_1)/(c_1 z + d_1)$, převádějící T v (koncentrické) mezikruží T_1 se středem v počátku, ohraničené kružnicemi $k_0^{(1)}$, $k_1^{(1)}$ ($k_1^{(1)}$ leží ve vnitřku $k_0^{(1)}$), při čemž obrazem kružnice c_0 je $k_0^{(1)}$. Transformací $w_2 = c_1 e^{-i\arg(a_1c_1d_1 - b_1c_1)}\, w_1$ dostaneme tedy homografické zobrazení $w = (az + b)/(z + c)$, $ac - b \neq 0$, reálné, jež převádí T v mezikruží $T_1 : 0 < R_1 < |w| < R_0$ tak, že vnějšek kružnice c_0 přejde ve vnějšek kružnice $k_0 : w = R_0 e^{i\Theta}$, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$ (a tedy vnitřek kružnice c_1 ve vnitřek kružnice $k_1 : w_1 = R_1 e^{i(2\pi - \Theta)}$, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$). Při tom platí

$$(9) \qquad |w| < |a|$$

pro w z T_1, neboť bod $w = a$ leží ve vnějšku k_0, poněvadž je obrazem bodu $z = \infty$, který leží ve vnějšku c_0. Naopak bod $z = -(b/a)$ je vzorem bodu $w = 0$ a leží tedy ve vnitřku c_1.

3. Tvrzení 1. *Nechť je v excentrickém mezikruží* T *dán problém I. Budiž* $w = (az + b)/(z + c)$, $ac - b \neq 0$, *reálné, homografické zobrazení z poznámky* 1, *převádějící* T *v mezikruží* T_1, *ohraničené kružnicemi* k_0, k_1, *při čemž* k_0 *je obrazem* c_0. *Potom řešení problému I je ekvivalentní s řešením problému* $\tilde{I}$: *Jest určiti funkce* $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$ *holomorfní v* T *a komplexní konstanty* A, α *tak, aby platilo*

1. *Funkce* $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\varphi}_0'(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$ *a* $\tilde{G}_0(z) = \tilde{\varphi}_0(z) - z\overline{\tilde{\varphi}_0'(z)} - \overline{\tilde{\psi}_0(z)}$ *jsou spojité v* T *s výjimkou konečného počtu bodů* t_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) *na hranici* T, *v jejichž okolí se funkce* $\tilde{\varphi}_0(z)$ a $\tilde{G}_0(z)$ *chovají tak, že platí* (2).

2. *Je-li* $z \neq t_k$, *je*

$$(10) \quad \tilde{G}_0(z) = \tilde{g}_i(z) = g_i(z) + \frac{A}{4\pi}\lg R_i^2 - \frac{\bar{A}}{4\pi}\frac{z}{\bar{w}}\overline{\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}}\overline{\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)} \quad na\ c_i\ (i = 0, 1).$$

3. *Funkce* $\tilde{\chi}_0(z)$ $(d\tilde{\chi}_0(z)/dz = \tilde{\psi}_0(z))$ *je holomorfní v T.*

Důkaz: Nechť $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ jsou řešením problému I. Zvolme bod z^* v T. Budiž $\chi_0(z)$ funkce primitivní k funkci $\psi_0(t)$, tj. $\psi_0(z) = d\chi_0(z)/dz$. Snadno zjistíme, že funkce $\chi^*(w) = \chi_0(z)$ bude tvaru

$$\chi^*(w) = \int_{z^*}^{z} \psi_0(z)\, dz = \chi_0^*(w) + \alpha \lg w\,,$$

kde $\chi_0^*(w)$ je holomorfní v T_1 a α je komplexní číslo. Definujeme-li tedy funkce $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$ vztahy

$$(11) \qquad \varphi_0(z) = \tilde{\varphi}_0(z) + \frac{A}{4\pi} \lg \frac{z + c}{a}\,, \quad \psi_0(z) = \tilde{\psi}_0(z) - \frac{\bar{A}}{4\pi} \lg \frac{z + c}{a} + \frac{\alpha}{w} \frac{dw}{dz}\,,$$

kde $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, A jsou řešením problému I, jsou funkce $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, $\tilde{\chi}_0(z)$ $[d\tilde{\chi}_0(z)/ /dz = \tilde{\psi}_0(z)]$ zřejmě holomorfní v T (neboť bod $z = -c$ leží podle poznámky 1 vně c_0). Zvolíme-li v definici problému I $\zeta = -b/a$, spočteme snadno, že funkce $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, $\tilde{\chi}_0(z)$ řeší problém Ĩ. Naopak splňují-li $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, $\tilde{\chi}_0(z)$, A a α podmínky 1.–3. problému Ĩ, jsou funkce $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, definované vztahy (11), a konstanta A zřejmě řešením problému I, v němž klademe $\zeta = -b/a$.

V dalším se tedy omezíme na vyšetřování problému Ĩ.

Poznámka 2. Označme (12) $2V_0^*(z) = 2i\tilde{V}_0(z) = \bar{z}\tilde{\varphi}_0 + \tilde{\chi}_0 - (z\bar{\tilde{\varphi}}_0 - \bar{\tilde{\chi}}_0)$. Potom na každé kružnici soustředné s c_0 a s poloměrem ϱ, jež leží v T, platí vzhledem k (5)

$$2V_0^*(z) = \gamma_\varrho^* + 2i \operatorname{Im} \int_{z_\varrho}^{z} (\bar{z}\tilde{\varphi}_0'(z) + \tilde{\psi}_0(z) - \overline{\tilde{\varphi}_0(z)})\, dz\,,$$

neboť podle podmínky 3. z definice problému Ĩ je $\tilde{\chi}_0(z)$ holomorfní v T. Užijeme-li vzhledem k (2) věty o záměně limity a integrálu, dostaneme pro $\varrho \to r_0$

$$(12_0) \qquad 2V_0^*(z) = \gamma_0 + 2i \operatorname{Im} \int_{z_0^*}^{z} (\bar{z}\tilde{\varphi}_0' + \tilde{\psi}_0 - \bar{\tilde{\varphi}}_0)\, dz$$

na c_0, kde γ_0 je ryze imaginární konstanta. Podobně na c_1

$$(12_1) \qquad 2V_0^*(z) = \gamma_1 + 2i \operatorname{Im} \int_{z_1^*}^{z} (\bar{z}\tilde{\varphi}_0' + \tilde{\psi}_0 - \bar{\tilde{\varphi}}_0)\, dz\,,$$

kde γ_1 je ryze imaginární konstanta. Body z_0^*, z_1^* můžeme zřejmě zvolit tak, že $w(z_0^*) = = R_0$, $w(z_1^*) = R_i$

Tvrzení 2. *Nechť funkce* $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, $\tilde{\chi}_0(z)$ *a konstanty* A, α *jsou řešením problému* Ĩ. *Nechť body* z_0^*, z_1^* *a funkce* $2V_0^*(z)$ *jsou zvoleny podle poznámky* 2 *a* $\tilde{\chi}_0(z)$ *je zvolena tak, aby ve* (12_0) *bylo* $\gamma_0 = 0$. *Definujme v* T_1 *funkce* $f_0(w)$, $h_0(w)$ *pomocí vztahů*

$$(13) \quad f_0(w) = (z + c)(-\bar{c}\tilde{\varphi}_0(z) + \tilde{\chi}_0(z))\,, \qquad h_0(w) = (z + c)(\bar{b}\tilde{\varphi}_0(z) - \bar{a}\tilde{\chi}_0(z))\,,$$

$$w = \frac{az + b}{z + c}\,.$$

Potom platí

1. *Funkce* $f_0(w)$, $f_0'(w)$, $\mathrm{d}h_0(w)/\mathrm{d}w$ a $\Gamma_0(w) = f_0(w) - w\,\overline{[\mathrm{d}f_0(w)/\mathrm{d}w]} - \overline{[\mathrm{d}h_0(w)/\mathrm{d}w]}$ *jsou spojité v* $\overline{T}_1$ *s výjimkou konečného počtu bodů* τ_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *na hranici* T_1, *v jejichž okolí platí*

$$(14) \qquad |\Gamma_0(w)| \leqq \left|\frac{1}{w - \tau_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}, \quad \beta > 0\,.$$

2. *Je-li* $w \neq \tau_k$, *je*

$$(15) \qquad \Gamma_0(w) = \frac{w - a}{\overline{w - a}}\left[\frac{\overline{w - a}}{b - ac}\, 2V_0^*(w) - G_0^*(w)\right] \quad na\ k_0,\ k_1,$$

kde

$$(16_0) \qquad 2V_0^*(w) = 2i\,\mathrm{Im}\int_{R_0}^{w}\left(\bar{z}\,\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}_0(z)}{\mathrm{d}z} + \tilde{\psi}_0(z) - \overline{\tilde{\varphi}_0(z)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\,\mathrm{d}w \quad na\ k_0\,,$$

$$(16_1) \qquad 2V_0^*(w) = \gamma_1 + 2i\,\mathrm{Im}\int_{R_1}^{w}\left(\bar{z}\,\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}_0(z)}{\mathrm{d}z} + \tilde{\psi}_0(z) - \overline{\tilde{\varphi}_0(z)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\,\mathrm{d}w \quad na\ k_1,$$

$G_0^*(w) = \tilde{G}_0(z)$, *kde* w *je bod na* k_i, z *jeho vzor na* c_i, $\tilde{G}_0(z) = \tilde{g}_i(z)$ *na* c_i $(i = 0, 1)$, $\tilde{g}_i(z)$ *je dána vztahem* (10).

D ů k a z: Poněvadž jsme volili $\gamma_0 = 0$, je γ_1 ve (12_1) zřejmě jednoznačně určena. Funkce $f_0(w)$, $h_0(w)$ jsou zvoleny tak, aby platilo (6), takže podle (7) platí uvnitř T (15). Poněvadž funkce $\tilde{G}_0(z)$ je spojitá v T s výjimkou bodů t_k, v nichž platí (2), dostaneme stejnou úvahou, jíž jsme dokázali (12_0) a (12_1), že $2V_0^*(z)$ je spojitá v $\overline{T}$ a tedy z podmínek 1.—3. problému $\tilde{\mathrm{I}}$ plynou body 1. a 2.

Tvrzení 3. *Nechť* $f_0(w)$, $h_0(w)$ *jsou funkce* (13), $g_0(w) = \mathrm{d}h_0(w)/\mathrm{d}w$. *Nechť*

$$f_0(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k w^k, \quad g_0(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k w^k$$

a nechť

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\Theta} \quad resp. \quad \sum_{-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\Theta}$$

jsou Fourierovy rozvoje pravé strany vztahu (15) *na* k_0 *resp.* k_1. *Potom platí*

a) *Koeficienty* a_k, b_k *vyhovují systému*

$$(17) \qquad \begin{aligned} A_k &= a_k R_0^k - (2 - k)\,\bar{a}_{2-k} R_0^{2-k} - \bar{b}_{-k} R_0^{-k}\,,\\ B_k &= a_k R_1^k - (2 - k)\,\bar{a}_{2-k} R_1^{2-k} - \bar{b}_{-k} R_1^{-k}\,. \end{aligned}$$

b) *Jsou splněny tyto další vztahy*

$$(18_0) \qquad \mathrm{Re}\, R_0 \bar{A}_1 = 0\,,$$

$$(18_1) \qquad \mathrm{Re}\, R_1 \bar{B}_1 = 0\,,$$

$$(19) \qquad A_1 R_1 - B_1 R_0 = 0\,,$$

$$(20) \qquad A_0 - B_0 = -\,2\,\frac{\bar{A}_2 R_0^2 - \bar{B}_2 R_1^2}{R_0^2 + R_1^2}\,,$$

$$(21_0) \qquad w_0 = A_1 R_0 + 2i\varepsilon\,,$$

$$(21_1) \qquad w_1 = A_1 R_1 + 2i\varepsilon\,,$$

kde w_0 resp. w_1 je absolutní člen Fourierova rozvoje funkce

$$(22) \qquad 2W_0(w) = \bar{w} f_0(w) + h_0(w) - (\overline{w f_0(w)} + \overline{h_0(w)})$$

na k_0 resp. k_1, ε je imaginární část absolutního členu Laurentova rozvoje funkce $h_0(w)$ v T_1.

Důkaz: Ze splnění podmínky (14) plyne, že $\Gamma_0(w)$ je integrovatelná na k_i, $i = 0, 1$. Poněvadž $\Gamma_0(w)$ je spojitá uvnitř T_1, plyne odtud podle věty o záměně limity a integrálu

$$\lim_{\varrho \to R_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(R_0, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,,$$

$$\lim_{\varrho \to R_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(R_1, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,,$$

kde $w = \varrho e^{i\Theta}$. Poněvadž se však $\Gamma_0(R_0, \Theta)$ resp. $\Gamma_1(R_1, \Theta)$ liší od pravých stran vztahu (15) jen v konečném počtu bodů, platí

$$(23_0) \qquad A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(R_0, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \lim_{\varrho \to R_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,,$$

$$(23_1) \qquad B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Gamma_0(R_1, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \lim_{\varrho \to R_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_0(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,.$$

Ze vztahů (23_0) a (23_1) pak stejným způsobem jako v [3] str. 39 a 40 dostaneme vztahy (17). Tím je a) dokázáno.

Poněvadž funkce $f_0(w)$, $h_0(w)$ jsou jednoznačné v T_1, je v T_1 jednoznačná i funkce (22). Podle (5) je tedy

$$(24) \qquad \operatorname{Im} \int_{k_\varrho} \left(\bar{w} \frac{\mathrm{d} f_0(w)}{\mathrm{d}w} + g_0(w) - \overline{f_0(w)} \right) \mathrm{d}w = 0\,,$$

kde k_ϱ je kružnice se středem v počátku o poloměru ϱ, $R_1 < \varrho < R_0$. Stejným limitním přechodem jako při důkazu bodu a) dostaneme

$$\operatorname{Re}(R_0 \bar{A}_1) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_0 \overline{\Gamma_0(R_0, \Theta)\, e^{-i\Theta}}\, \mathrm{d}\Theta\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{k_0} (\bar{w} f_0'(w) + g_0(w) - \overline{f_0(w)})\, \mathrm{d}w =\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{k_0} (\bar{w} f_0'(w) + g_0(w) - \overline{f_0(w)})\, \mathrm{d}w = 0\,,$$

což jest (18_0). Stejně dokážeme i (18_1).

Vypišme nyní vztahy (17) pro $k = 0, 1, 2$:

$$(25_0) \qquad a_0 - 2\bar{a}_2 R_0^2 - \bar{b}_0 = A_0\,; \qquad a_0 - 2\bar{a}_2 R_1^2 - \bar{b}_0 = B_0\,,$$

$$(25_1) \qquad R_0(a_1 - \bar{a}_1) - \bar{b}_{-1} R_0^{-1} = A_1\,; \quad R_1(a_1 - \bar{a}_1) - \bar{b}_{-1} R_1^{-1} = B_1\,,$$

$$(25_2) \qquad a_2 R_0^2 - \bar{b}_{-2} R_0^{-2} = A_2\,; \qquad a_2 R_1^2 - \bar{b}_{-2} R_1^{-2} = B_2\,.$$

Poněvadž $h_0(w)$ jest holomorfní, musí nutně být $b_{-1} = 0$. Aby pak bylo možno vypočíst $a_1 - \bar{a}_1$, musí být

$$\operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} B_1 = 0\,,$$

což jest podle (18_0) a (18_1) splněno. Odtud a porovnáním vztahů (25_1) pak dostáváme (19). Dále z (25_0) vypočteme

$$(26) \qquad A_0 - B_0 = -\,2\bar{a}_2(R_0^2 - R_1^2)\,.$$

Z rovnic (25_2) vypočteme

$$a_2 = \frac{A_2 R_0^2 - B_2 R_1^2}{R_0^4 - R_1^4}\,,$$

což dosazeno do (26) dává (20). Dokažme konečně (21_0), (21_1). Z Laurentova rozvoje funkce $f_0(w)$ v T_1 plyne

$$w_\varrho = \bar{w} a_1 w + i\varepsilon - w \bar{a}_1 \bar{w} - \bar{i\varepsilon} = \varrho^2(a_1 - \bar{a}_1) + 2i\varepsilon\,,$$

kde w_ϱ je absolutní člen Fourierova rozvoje funkce (22) na kružnici k_ϱ se středem v počátku, $R_1 < \varrho < R_0$. Limitním přechodem pro $\varrho \to R_0$ resp. $\varrho \to R_1$ dostáváme odtud (21_0) resp. (21_1).

Tvrzení 4. *Konstanty A, $\operatorname{Im} \alpha$, γ_1 splňují systém*

$$(27) \qquad 2i \operatorname{Im}\left[\frac{\bar{A}}{4\pi}\left(\frac{\lg R_0^2}{R_0 - a} - \frac{\lg R_1^2}{R_1 - a} - \frac{1}{a} \lg \frac{a - R_0}{a - R_1}\right)\right] -$$
$$-\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right)\frac{a\bar{a}}{b - ac}\, i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right] - \frac{2\gamma_1}{b - ac} = P\,,$$

$$\frac{aA}{4\pi}\left[\frac{2(R_0^2 - R_1^2)}{R_0^2 + R_1^2} - \lg \frac{\bar{a} - R_0}{\bar{a} - R_1}\right] - \frac{\bar{a}\bar{A}}{4\pi}\left[\lg \frac{R_0^2}{R_1^2} - \lg \frac{a - R_0}{a - R_1}\right] +$$
$$+\, a\bar{a}\, 2i \operatorname{Im}\left[\frac{A}{4\pi}\left(\frac{\lg R_0^2}{R_0 - \bar{a}} - \frac{\lg R_1^2}{R_1 - \bar{a}}\right)\right] + \frac{a\bar{a}}{b - ac}\,\frac{2(R_0^2 - R_1^2)}{R_0^2 + R_1^2}\, i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right] +$$
$$+\, \frac{a\bar{a}}{b - ac}\, 2\gamma_1 = Q = Q_x + iQ_y\,,$$

$$2i \operatorname{Im}\left[\frac{a\bar{a}A}{4\pi}\left(\frac{\lg R_0^2}{R_0 - \bar{a}} - \frac{\lg R_1^2}{R_1 - \bar{a}}\right) + \frac{aA}{4\pi}\left(\lg \frac{R_0^2}{R_1^2} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{a\bar{a}} - \lg \frac{\bar{a} - R_0}{\bar{a} - R_1}\right)\right] +$$
$$+\, i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right]\frac{R_0^2 - R_1^2}{b - ac} + \frac{a\bar{a}}{b - ac}\, 2\gamma_1 = R\,,$$

při čemž pravé strany P, Q, R nezávisí na A, $\operatorname{Im} \alpha$, γ_1. *Systém* (27) *má jediné řešení.*

Důkaz: Podle tvrzení 3 jsou splněny vztahy (18_0) až (21_1). To jsou vlastně vztahy mezi konstantami A, α, γ_1, ε, které nyní stanovíme.

K tomu cíli spočtěme $\Gamma_0(w)$ na k_i $(i = 0, 1)$. Poněvadž $\tilde{\chi}_0(z)$ je jednoznačná v T, je i funkce (12) jednoznačná a tedy podle (12_1), (16_1) platí

$$\operatorname{Im} \int_{k_1} (\bar{z}\tilde{\varphi}_0' + \tilde{\psi}_0 - \tilde{\varphi}_0) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \, \mathrm{d}w = 0 \,,$$

tj. vzhledem k (10), označíme-li

$$\operatorname{Im} \int_{k_1} - \overline{g_1(z)} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \, \mathrm{d}w = 2\pi p_1 \,, \tag{28}$$

$$p_1 + \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \frac{A}{4\pi} + \alpha\right) = 0 \,.$$

Neboť pomocí residuové věty zjistíme

$$\int_{k_1} - \frac{\bar{A}}{4\pi} \lg R_1^2 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \, \mathrm{d}w = 0 \,, \tag{29}$$

$$\operatorname{Im} \int_{k_1} \frac{A}{4\pi} \frac{\bar{z}}{w} \, \mathrm{d}w = - \operatorname{Im} 2\pi i \left(- \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \frac{A}{4\pi}\right) = 2\pi \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \frac{A}{4\pi}\right),$$

a konečně

$$\operatorname{Im} \int_{k_1} - \frac{\alpha}{w} \, \mathrm{d}w = \operatorname{Im} 2\pi i \alpha = 2\pi \operatorname{Re} \alpha \,. \tag{30}$$

Z (29), (30) a (10) plyne (28).

Užívajíce $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = (w - a)^2/(ac - b)$, snadno vypočteme na k_i $(i = 0, 1)$

$$\int_{Ri}^{w} - \frac{\bar{A}}{4\pi} \lg Ri^2 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \, \mathrm{d}w = - \frac{\bar{A}}{4\pi} (b - ac) \lg Ri^2 \left(\frac{1}{w - a} - \frac{1}{Ri - a}\right), \tag{31}$$

$$\int_{Ri}^{w} \left(\frac{A}{4\pi} \frac{\bar{z}}{w} - \frac{\alpha}{w}\right) \mathrm{d}w = - \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}} \frac{A}{4\pi} + \alpha\right) \lg \frac{w}{Ri} - \frac{A}{4\pi} \frac{b - ac}{\bar{a}} \lg \frac{1 - \dfrac{w}{\bar{a}}}{1 - \dfrac{Ri}{\bar{a}}} \,. \tag{32}$$

Pomocí (31) a (32) a za podstatného použití (28) dostaneme z (16_0) a (16_1)

$$\frac{w - a}{b - ac} 2V_0^*(w) = \frac{w - a}{b - ac} 2\tilde{V}_0(w) - \frac{\bar{A}}{4\pi} \lg R_0^2 \left(1 - \frac{w - a}{R_0 - a}\right) + \tag{33_0}$$

$$+ (w - a) 2i \operatorname{Im} \left[\frac{\bar{A}}{4\pi a} \lg \frac{1 - \dfrac{w}{a}}{1 - \dfrac{R_0}{a}}\right] + \frac{A}{4\pi} \lg R_0^2 \left(\frac{\overline{w - a}}{w - a} - \frac{w - a}{R_0 - \bar{a}}\right) \quad \text{na } k_0 \,,$$

$$(33_1)\qquad \frac{w-a}{b-ac}\,2V_0^*(w)=\frac{w-a}{b-ac}\,2\tilde{V}_1(w)-\frac{\bar{A}}{4\pi}\lg R_1^2\left(1-\frac{w-a}{R_1-a}\right)+$$

$$+(w-a)\,2i\,\mathrm{Im}\left[\frac{\bar{A}}{4\pi a}\lg\frac{1-\dfrac{w}{a}}{1-\dfrac{R_1}{a}}\right]+\frac{A}{4\pi}\lg R_1^2\left(\frac{w-a}{\overline{w-a}}-\frac{w-a}{R_1-\bar{a}}\right)+\frac{w-a}{b-ac}\,2\gamma_1 \quad \text{na } k_1.$$

Podle (9) je funkce $\lg(1-w/a)$ jednoznačná v T_1, funkce $\tilde{V}_i(w)$ nezávisí na A, α, γ_1.
Dále snadno zjistíme

$$(34)\qquad -\frac{w-a}{\overline{w-a}}\,G_0^*(w)=-\frac{w-a}{\overline{w-a}}\,\tilde{G}_i(w)-\frac{w-a}{\overline{w-a}}\frac{A}{4\pi}\lg R_i^2-$$

$$-\frac{\bar{A}}{4\pi}\frac{1}{\bar{w}}\frac{(-cw+b)\overline{(w-a)}}{b-ac}+\frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}}\frac{(w-a)\overline{(w-a)}}{b-ac}\quad \text{na } k_i\ (i=0,1),$$

kde $\tilde{G}_i(w)$ nezávisí na A, α.
Z (33_0), (33_1) a (34) konečně zjistíme

$$(35_0)\qquad \Gamma_0(w)=\tilde{\Gamma}_0(w)-\frac{\bar{A}}{4\pi}\lg R_0^2\left(1-\frac{w-a}{R_0-a}\right)-\frac{A}{4\pi}\lg R_0^2\frac{w-a}{R_0-\bar{a}}-$$

$$-\frac{\bar{A}}{4\pi\bar{w}}\frac{(-cw+b)\overline{(w-a)}}{b-ac}+\frac{\bar{\alpha}}{w}\frac{(w-a)\overline{(w-a)}}{b-ac}+$$

$$+(w-a)\,2i\,\mathrm{Im}\left[\frac{\bar{A}}{4\pi a}\lg\frac{1-\dfrac{w}{a}}{1-\dfrac{R_0}{a}}\right]\quad \text{na } k_0,$$

$$(35_1)\qquad \Gamma_0(w)=\tilde{\Gamma}_1(w)-\frac{\bar{A}}{4\pi}\lg R_1^2\left(1-\frac{w-a}{R_1-a}\right)-\frac{A}{4\pi}\lg R_1^2\frac{w-a}{R_1-\bar{a}}-$$

$$-\frac{\bar{A}}{4\pi w}\frac{(-cw+b)\overline{(w-a)}}{b-ac}+\frac{\bar{\alpha}}{w}\frac{(w-a)\overline{(w-a)}}{b-ac}+$$

$$+(w-a)\,2i\,\mathrm{Im}\left[\frac{\bar{A}}{4\pi a}\lg\frac{1-\dfrac{w}{a}}{1-\dfrac{R_1}{a}}\right]+\frac{w-a}{b-ac}\,2\gamma_1\quad \text{na } k_1,$$

kde $\tilde{\Gamma}_0(w)$, $\tilde{\Gamma}_1(w)$ nezávisí na A, α, γ_1. Z (35_0) a (35_1) pak dostáváme po jednoduchých úpravách, v nichž užíváme vztahů $b-ac=\overline{b-ac}$ a (28)

$$(36_0)\quad A_0=\tilde{A}_0-\frac{\bar{A}}{4\pi}\lg R_0^2\left(1+\frac{a}{R_0-a}\right)+\frac{A}{4\pi}\lg R_0^2\frac{a}{R_0-\bar{a}}+\frac{\bar{A}}{4\pi}\lg\left(1-\frac{R_0}{a}\right)+$$

$$+\frac{A}{4\pi}\left[\frac{R_0^2}{\bar{a}^2}-\frac{a}{\bar{a}}\lg\left(1-\frac{R_0}{a}\right)\right]-\frac{a}{b-ac}\,i\,\mathrm{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi}+\bar{\alpha}\right],$$

$$(36_1)\quad B_0 = \tilde{B}_0 - \frac{\bar{A}}{4\pi} \lg R_1^2\left(1 + \frac{a}{R_1 - a}\right) + \frac{A}{4\pi} \lg R_1^2 \frac{a}{R_1 - \bar{a}} + \frac{\bar{A}}{4\pi} \lg\left(1 - \frac{R_1}{a}\right) +$$

$$+ \frac{A}{4\pi}\left[\frac{R_1^2}{\bar{a}^2} - \frac{a}{\bar{a}} \lg\left(1 - \frac{R_1}{a}\right)\right] - \frac{a}{b - ac}\, i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right] - \frac{a}{b - ac} 2\gamma_1 ,$$

$$(37_0)\quad A_1 = \tilde{A}_1 + \frac{R_0}{b - ac}\left[1 + \frac{a\bar{a}}{R_0^2}\right] i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right] +$$

$$+ 2i \operatorname{Im}\left[R_0 \frac{\bar{A}}{4\pi}\left(\lg \frac{R_0^2}{R_0 - a} - \frac{1}{a} \lg\left(1 - \frac{R_0}{a}\right)\right)\right],$$

$$(37_1)\quad B_1 = \tilde{B}_1 + \frac{R_1}{b - ac}\left[1 + \frac{a\bar{a}}{R_1^2}\right] i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right] +$$

$$+ 2i \operatorname{Im}\left[R_1 \frac{\bar{A}}{4\pi}\left(\lg \frac{R_1^2}{R_1 - a} - \frac{1}{a} \lg\left(1 - \frac{R_1}{a}\right)\right)\right] + \frac{R_1}{b - ac} 2\gamma_1 ,$$

$$(38_0)\quad A_2 = \tilde{A}_2 + \frac{\bar{a}\bar{A}}{4\pi a} - \frac{R_0^2}{2a^2}\frac{\bar{A}}{4\pi} - \frac{\bar{a}}{b - ac}\, i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right],$$

$$(38_1)\quad B_2 = \tilde{B}_2 + \frac{\bar{a}\bar{A}}{4\pi a} - \frac{R_1^2}{2a^2}\frac{\bar{A}}{4\pi} - \frac{\bar{a}}{b - ac}\, i \operatorname{Im}\left[\frac{b}{a}\frac{\bar{A}}{4\pi} + \bar{\alpha}\right].$$

Zde $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ nezávisejí na A, α, γ_1. Dále podle (8) platí uvnitř T_1

$$2W_0(w) = \frac{|w - a|^2}{b - ac} 2V_0^*(z) = \overline{w - a}\, \frac{w - a}{b - ac} 2V_0^*(z) ,$$

kde $2W_0(w)$ je funkce (22), $2V_0^*(z) = 2i\tilde{V}_0(z) = \bar{z}\tilde{\varphi}_0(z) + \tilde{\chi}_0(z) - (\overline{z\tilde{\varphi}_0(z)} + \overline{\tilde{\chi}_0(z)})$. Limitním přechodem zjistíme platnost tohoto vztahu i na hranici T, T_1 a tedy užitím (33_0) a (33_1) lehce vypočteme

$$(39_0)\qquad w_0 = \tilde{w}_0 + 2i \operatorname{Im}\left[\frac{\bar{A}}{4\pi} \lg R_0^2\left(\bar{a} + \frac{R_0^2 + a\bar{a}}{R_0 - a}\right) + R_0^2 \frac{\bar{A}}{4\pi a} + \right.$$

$$\left. + (R_0^2 + a\bar{a}) \frac{A}{4\pi\bar{a}} \lg\left(1 - \frac{R_0}{\bar{a}}\right)\right],$$

$$(39_1)\qquad w_1 = \tilde{w}_1 + 2i \operatorname{Im}\left[\frac{\bar{A}}{4\pi} \lg R_1^2\left(\bar{a} + \frac{R_1^2 + a\bar{a}}{R_1 - a}\right) + R_1^2 \frac{\bar{A}}{4\pi a} + \right.$$

$$\left. + (R_1^2 + a\bar{a}) \frac{A}{4\pi\bar{a}} \lg\left(1 - \frac{R_1}{\bar{a}}\right)\right] + \frac{R_1^2 + a\bar{a}}{b - ae} 2\gamma_1 ,$$

kde w_0 resp. w_1 označují levou stranu (21_0) resp. (21_1), $\tilde{w}_0$ resp. $\tilde{w}_1$ nezávisí na A, α, γ_1, ε. Dosazením vztahů (36_0) až (39_1) do (18_0) až (21_1) a odečtením (21_1) od (21_0) dostaneme po úpravách systém (27). Vztahy (18_0) a (18_1) zaručují, že v rovnicích (19), (21_0) a (21_1) vystupují jen ryze imaginární veličiny a tedy že P a R jsou ryze imaginární čísla. Máme tedy po oddělení reálné a imaginární části čtyři reálné rovnice pro čtyři reálné neznámé A_x, A_y, α_y, γ_y, kde $A/4\pi = A_x + iA_y$, $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$, $\gamma_1 = i\gamma_y$. Označme dále

$$\frac{b}{a} = \beta_x + i\beta_y\,, \quad a = a_x + ia_y\,,$$

$$\lambda_1 + i\lambda_2 = \frac{\lg R_0^2}{R_0 - a} - \frac{\lg R_1^2}{R_1 - a} - \frac{1}{a}\lg\frac{a - R_0}{a - R_1}\,, \quad \lambda_3 = \frac{2(R_0^2 - R_1^2)}{R_0^2 + R_1^2} - \lg\frac{R_0^2}{R_1^2}\,,$$

$$\lambda_4 = \frac{2(R_0^2 - R_1^2)}{R_0^2 + R_1^2} + \lg\frac{R_0^2}{R_1^2}\,, \quad \lambda_5 = \lg\frac{R_0^2}{R_1^2} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{a\bar{a}}\,, \quad \lambda_6 = \frac{a\bar{a}}{b - ac}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right),$$

$$\lambda_7 = \frac{a\bar{a}}{b - ac}\,\frac{2(R_0^2 - R_1^2)}{R_0^2 + R_1^2}\,.$$

Potom determinant matice soustavy (27) jest

(40)

$$\begin{vmatrix} 2\lambda_2 - \beta_y\lambda_6\,, & -2\lambda_1 + \beta_x\lambda_6\,, & \lambda_6\,, & -\dfrac{1}{b-ac} \\ a_x\lambda_3\,, & -a_y\lambda_3\,, & 0\,, & 0 \\ a_y\lambda_4 - 2a\bar{a}\lambda_2 + \lambda_7\beta_y\,, & a_x\lambda_4 + 2a\bar{a}\lambda_1 - \lambda_7\beta_x\,, & -\lambda_7\,, & \dfrac{a\bar{a}}{b-ac} \\ 2a_y\lambda_5 - 2a\bar{a}\lambda_2 + \dfrac{R_0^2 - R_1^2}{b-ac}\beta_y\,, & 2a_x\lambda_5 + 2a\bar{a}\lambda_1 - \dfrac{R_0^2 - R_1^2}{b-ac}\beta_x\,, & -\dfrac{R_0^2 - R_1^2}{b-ac}\,, & \dfrac{a\bar{a}}{b-ac} \end{vmatrix}.$$

Přičtením třetího sloupce vynásobeného β_y resp. $-\beta_x$ k prvnímu resp. druhému sloupci a dalšími zřejmými úpravami dostáváme

$$D = \frac{2\lambda_3(a\bar{a})^2}{(b - ac)^2}\,D_1\,,$$

kde

$$D_1 = \lambda_4\lambda_9 - \lambda_5\lambda_8\,,$$

$$\lambda_8 = a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) - 2\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 + R_1^2}\,, \quad \lambda_9 = a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) - \frac{R_0^2 - R_1^2}{a\bar{a}}\,.$$

Ukažme, že platí

(41) $$\lambda_3 < 0\,.$$

Označíme-li totiž $f(x) = 2\,\dfrac{x - 1}{x + 1} - \lg x$, jest $\lambda_3 = \dfrac{1}{R_1^2}\,f\left(\dfrac{R_0^2}{R_1^2}\right)$. Nyní však $f(1) = 0$, $f'(x) = -\dfrac{(x - 1)^2}{x(x + 1)^2} \leqq 0$ pro $x \geqq 1$. Odtud plyne $f(x) < 0$ pro $x > 1$, z čehož plyne (41). Dále platí vzhledem k (9)

$$(42) \qquad D_1 = (R_0^2 - R_1^2)\left[\frac{2}{R_0^2 + R_1^2} - \frac{1}{a\bar{a}}\right]\left[\lg\frac{R_0^2}{R_1^2} + a\bar{a}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 R_1^2}\right] > 0\,.$$

Tedy $D \neq 0$ a systém (27) má jediné řešení.

Poznámka 3. Z (39_0) a (21_0) resp. (39_1) a (21_1) je určena konstanta ε. Re α vypočteme z (28). Do vztahů (36_0) až (38_1) dosadíme A, α, γ_1 a z (25_2) určíme a_2, b_{-2}. Im a_1 určíme z (25_1) a $a_0 - \bar{b}_0$ z (25_0). Budiž konečně $k \neq 0, 1, 2$. Napíšeme-li rovnice (17) pro k a $2 - k$, dostaneme pro neznámé a_k, $\bar{a}_{2-k}$, $\bar{b}_{-k}$, b_{k-2} systém

$$(43) \qquad \begin{aligned} a_k R_0^k - (2-k)\,\bar{a}_{2-k} R_0^{2-k} - \bar{b}_{-k} R_0^{-k} &= A_k\,,\\ a_k R_1^k - (2-k)\,\bar{a}_{2-k} R_1^{2-k} - \bar{b}_{-k} R_1^{-k} &= B_k\,,\\ \bar{a}_{2-k} R_0^{2-k} - k a_k R_0^k - b_{k-2} R_0^{k-2} &= \bar{A}_{2-k}\,,\\ \bar{a}_{2-k} R_1^{2-k} - k a_k R_1^k - b_{k-2} R_1^{k-2} &= \bar{B}_{2-k}\,. \end{aligned}$$

Rozvineme-li determinant matice soustavy (43) podle prvních dvou řádků, zjistíme, že je roven d_k (viz vzorec (7_k) v [3]) a je tedy různý od nuly, jak bylo v [3] dokázáno. Systém (43) má tedy pro každé $k \neq 0, 1, 2$ jediné řešení pro každou pravou stranu. Na pravých stranách systému (43) se vyskytuje vzhledem k (35_0), (35_1) konstanta A, ta je však již určena ze systému (27).

Konečně stejně jako v [3] str. 47 se ukáže, že vztahy (17) až (21_1) můžeme dostat formálním porovnáním koeficientů Fourierových rozvojů obou stran vztahu (14) na k_i, $i = 0, 1$.

Z tvrzení 2, 3, 4 a poznámky 3 plyne

Věta. *Funkce $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, jež jsou řešením problému $\tilde{I}$, jsou určeny funkcemi $f_0(w)$, $h_0(w)$ $(\mathrm{d}h_0(w)/\mathrm{d}w = g_0(w))$ pomocí vztahů (6), kde $\tilde{\psi}_0(z) = \mathrm{d}\tilde{\chi}_0(z)/\mathrm{d}z$. Koeficienty Laurentových rozvojů funkcí $f_0(w)$, $g_0(w)$ dostaneme řešením systému (17), který se sestaví tak, že se funkce $\Gamma_0(w)$ a pravá strana (14) rozvinou ve Fourierovu řadu a porovnají se koeficienty těchto rozvojů. Neznámé konstanty A,* Im α, *γ_1 se určí předem ze systému* (27), Re α *z* (28), *ε z* (39_0) *resp.* (39_1) *a* (21_0) *resp.* (21_1).

4. Podívejme se nyní, jak dalece funkce $f_0(w)$, $h_0(w)$ určují funkce $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$. Dosazením

$$f_0(w) = a_1 w + a_0\,, \quad h_0(w) = b_0 w + \eta + i\varepsilon$$

do (6) zjistíme

$$(44) \qquad \tilde{\varphi}_0(z) = \frac{z}{b - ac}\left[a b_0 + a\bar{a}a_1 + \eta + i\varepsilon + a_0\bar{a}\right] + \\ + \frac{(b_0 + \bar{a}a_1)\,b}{b - ac} + \frac{(\eta + i\varepsilon + a_0\bar{a})\,c}{b - ac}\,,$$

$$(45) \qquad \tilde{\psi}_0(z) = \bar{c}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_0(z)}{\mathrm{d}z} + a_0 + a a_1\,.$$

Avšak

$$\mathrm{Im}\,(a b_0 + a\bar{a}a_1 + \eta + i\varepsilon + a_0\bar{a}) = a\bar{a}\,\mathrm{Im}\,a_1 + \varepsilon + \mathrm{Im}\left[\bar{a}(a_0 - \bar{b}_0)\right],$$

takže imaginární část koeficientu u z funkce $\tilde{\varphi}_0(z)$ je jednoznačně určena, neboť $\operatorname{Im} a_1$, ε, $a_0 - \bar{b}_0$ jsme vypočetli. Z (45) pak plyne, že $\psi_0(z)$ je určena jednoznačně až na konstantu.

Složky tensoru napětí X_x, Y_y jsou tedy vzhledem k

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) = 4 \operatorname{Re} \tilde{\varphi}_0'(z) - 4 \operatorname{Re}\left(\frac{A}{4\pi} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)$$

určeny až na touž konstantu (neboť jejich rozdíl je plně určen), mající fysikální význam hydrostatického tlaku. Za předpokladu, že krajové podmínky $g_0(z)$, $g_1(z)$ mají dvě spojité derivace, jej lze podle [2] určit fysikálně přirozeným způsobem ze vztahu

$$\operatorname{Im} \int_{c_0 \cup c_1} z \overline{\varphi'(z)} \, \mathrm{d}\bar{z} = 0 , \tag{46}$$

kde

$$\varphi(z) = \tilde{\varphi}_0(z) - \frac{A}{4\pi} \lg w .$$

Podle (44) pak stačí pomocí vztahu (46) určit konstantu $\operatorname{Re}(ab_0 + a\bar{a}a_1 + \eta + i\varepsilon + a_0\bar{a})$, což bude úkolem tohoto odstavce.

Snadno zjistíme, že

$$\operatorname{Im} \int_{c_0 \cup c_1} \frac{\bar{A}}{4\pi} \frac{z}{\bar{w}} \overline{\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)} \mathrm{d}\bar{z} = 0 ,$$

takže ze (46) plyne

$$\operatorname{Im} \int_{c_0 \cup c_1} z \overline{\tilde{\varphi}_0'(z)} \, \mathrm{d}\bar{z} = 0 ,$$

odkud integrací per partes

$$\operatorname{Im} \int_{c_0 \cup c_1} \overline{\tilde{\varphi}_0(z)} \, \mathrm{d}z = 0 . \tag{47}$$

Avšak podle (6) $\tilde{\varphi}_0(z) = [h_0(w) + \bar{a} f_0(w)]/(w - a)$ a tedy

$$\int_{c_0 \cup c_1} \overline{\tilde{\varphi}_0(z)} \, \mathrm{d}z = \int_{k_0 \cup k_1} \frac{\overline{h_0(w) + a f_0(w)}}{\overline{w - a}} \frac{ac - b}{(w - a)^2} \mathrm{d}w . \tag{48}$$

Dále snadno vypočteme pomocí residuové věty ($i = 0, 1$)

$$\int_{k_i} \frac{\bar{w}}{\overline{(w - a)}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = \int_{k_i} \frac{R_i^2}{(R_i^2 - \bar{a}w)} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = -2\pi i \bar{a} \frac{R_i^2}{(R_i^2 - a\bar{a})^2} , \tag{49}$$

$$\int_{k_i} \frac{1}{\overline{(w - a)}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = \int_{k_i} \frac{w}{(R_i^2 - \bar{a}w)} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = -2\pi i \frac{R_i^2}{(R_i^2 - a\bar{a})^2} . \tag{50}$$

Snadno zjistíme, že funkce $x/(a\bar{a} - x)^2$ je rostoucí pro $0 < x < a\bar{a}$, takže číslo

$$R = \frac{R_0^2}{(a\bar{a} - R_0^2)^2} - \frac{R_1^2}{(a\bar{a} - R_1^2)^2} \tag{51}$$

je kladné, neboť podle (9) $0 < R_1 < R_0 < a\bar{a}$. Je tedy podle (49) a (50)

$$\int_{k_0 \cup k_1} \frac{\bar{w}}{\overline{w - a}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = - 2\pi i \bar{a} R\,, \quad \int_{k_0 \cup k_1} \frac{1}{\overline{w - a}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = - 2\pi i R\,,$$

odkud

$$\int_{k_0 \cup k_1} \frac{\overline{\eta + i\varepsilon + b_0 w + \bar{a}(a_0 + a_1 w)}}{\overline{w - a}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} =$$

$$= - 2\pi i R\,\overline{(\eta + i\varepsilon + \bar{a}a_0 + ab_0 + a\bar{a}a_1)}\,,$$

a tedy

$$\operatorname{Im} \int_{k_0 \cup k_1} \frac{\overline{\eta + i\varepsilon + b_0 w + \bar{a}(a_0 + a_1 w)}}{\overline{w - a}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} = \tag{52}$$

$$= - 2\pi \operatorname{Re} (\eta + i\varepsilon + \bar{a}a_0 + ab_0 + a\bar{a}a_1)\,.$$

Avšak podle (47) a (48)

$$0 = \operatorname{Im} \int_{c_0 \cup c_1} \overline{\varphi_0(z)}\, \mathrm{d}z = \operatorname{Im} \int_{k_0 \cup k_1} \frac{\overline{\eta + i\varepsilon + b_0 w + \bar{a}(a_0 + a_1 w)}}{\overline{w - a}} \frac{\mathrm{d}w}{(w - a)^2} +$$

$$+ \operatorname{Im} \int_{k_0 \cup k_1} \frac{\overline{h_0(w) - (\eta + i\varepsilon + b_0 w) + \bar{a}(f_0(w) - a_0 - a_1 w)}}{\overline{w - a}(w - a)^2} \mathrm{d}w\,,$$

při čemž integrand ve druhém integrálu je, jak víme, jednoznačně určen. Odtud a z (52) konečně máme (podle (51) je $R > 0$)

$$\operatorname{Re} (\eta + i\varepsilon + \bar{a}a_0 + ab_0 + a\bar{a}a_1) = \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \operatorname{Im} \int_{k_0 \cup k_1} \frac{\overline{h_0(w) - (\eta + i\varepsilon + b_0 w) + \bar{a}(f_0(w) - a_0 - a_1 w)}}{\overline{(w - a)}\,(w - a)^2} \mathrm{d}w\,,$$

čímž je hledaná konstanta určena.

Literatura

[1] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo:* Matematická teorie rovinné pružnosti, Praha 1955.

[2] *J. Fuka:* Das zweite Problem der ebenen Elastizitätstheorie für inkompressible Körper, Aplikace matematiky 1962, 7, 21–36.

[3] *J. Fuka:* Řešení prvního problému pružnosti v excentrickém mezikruží, Aplikace matematiky 1958, 3, 45–66.

Резюме

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЛА

ЯРОСЛАВ ФУКА (Jaroslav Fuka)

В статье выведены при помощи гомографического отображения явные формулы для решения второй задачи упругости в эксцентрическом кольце (т. е. на границе кольца заданы смешения) для однородного изотропного несжимаемого тела. При этом компоненты тензора напряжения X_x, Y_y определены вплоть до одной и той же постоянной, которая с физической точки зрения означает гидростатическое давление. Эта постоянная, согласно [2], определена явно физически естественным образом, а именно так, что напряженность, определенная решением второй задачи для $\sigma = \frac{1}{2}$, является пределом напряженностей для $\sigma \to \frac{1}{2}$ при одном и том же краевом условии.

Zusammenfassung

LÖSUNG DES ZWEITEN ELASTIZITÄTSPROBLEMS IN EINEM EXZENTRISCHEN KREISRING FÜR EINEN UNZUSAMMENDRÜCKBAREN KÖRPER

JAROSLAV FUKA

In diesem Artikel werden mit Hilfe homographischer Abbildungen explizite Formeln zur Lösung des zweiten Elastizitätsproblems in einem exzentrischen Kreisring (d. h. am Rande des Kreisringes sind die Verschiebungen vorgeschrieben) für einen homogenen isotropen unzusammendrückbaren Körper abgeleitet. Die Komponenten des Tensors X_x, Y_y sind bis auf diseselbe Konstante bestimmt, welche physikalisch den hydrostatistischen Druck bedeutet. Nach [2] ist diese Konstante auf physikalisch natürliche Art derart bestimmt, sodass die durch die Lösung des zweiten Problems für $\sigma = \frac{1}{2}$ gegebene Spannung ein Grenzwert der Spannung für $\sigma \to \frac{1}{2}$ bei denselben Randbedingungen ist.

Adresa autora: *Jaroslav Fuka* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.