Aplikace matematiky

Vladimír Fiřt
Příspěvek k výpočtu vlastních (charakteristických) čísel

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 1, 51–75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102786

PŘÍSPĚVEK K VÝPOČTU VLASTNÍCH (CHARAKTERISTICKÝCH) ČÍSEL

VLADIMÍR FIŘT

(Došlo dne 11. ledna 1961.)

V článku se navrhují čtyři metody výpočtu vlastních (charakteristických) čísel založené na transformaci homogenního systému algebraických rovnic. Dvě z těchto metod, tzv. dvojnásobná a trojnásobná iterace, jsou kombinacemi iterační metody podané autorem v práci „Výpočet vlastních čísel na základě transformace homogenního systému algebraických rovnic", Apl. mat. 1961, No 2, a dvou metod, o nichž je pojednáno v tomto článku. Jsou uvedeny dva numerické příklady a přibližné rovnice, jejichž kořeny určují přibližnou hodnotu vlastního čísla.

1. OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ

Mějme homogenní systém n algebraických rovnic lineárních vzhledem k neznámým x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} & + a_{1,n}x_n & = 0\,, \\ a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} & + a_{2,n}x_n & = 0\,, \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1}x_1 & + a_{n-1,2}x_2 & + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + a_{n-1,n}x_n & = 0\,, \\ a_{n,1}x_1 & + a_{n,2}x_2 & + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} & + a_{n,n}x_n & = 0\,, \end{array} \tag{1}$$

kde koeficienty $a_{i,k} = f_{i,k}(\lambda)$ jsou dané funkce argumentu λ. Pro vlastní číslo λ_0 platí podmínka, že hodnota funkce

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{2}$$

je rovna nule, tj. platí rovnice

$$\Delta(\lambda_0) = 0\,. \tag{3}$$

Utvořme dále homogenní systém n rovnic tak, že přičteme k součiniteli při libovolné neznámé x_r u jedné rovnice systému (1) člen $-A(\lambda)$ (kde $A(\lambda)$ je funkce argumentu λ, kterou budeme níže definovat) a ostatní rovnice systému (1) ponecháme beze změny. Přičteme-li $-A(\lambda)$ např. k činiteli $a_{n,n}$ při x_n dostaneme tento systém rovnic

(4)
$$\begin{array}{llllll}
a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} & + a_{1,n}x_n & & = 0\,, \\
a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} & + a_{2,n}x_n & & = 0\,, \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & & \dots \\
a_{n-1,1}x_1 & + a_{n-1,2}x_2 & + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + a_{n-1,n}x_n & & = 0\,, \\
a_{n,1}x_1 & + a_{n,2}x_2 & + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} & + [a_{n,n} - A(\lambda)]x_n & & = 0\,.
\end{array}$$

Rovnice, které tvoří homogenní systém (4), jsou stejně jako rovnice systému (1) lineární vzhledem k neznámým x_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Protože rovnice (3) platí za předpokladu, že existuje netriviální řešení systému rovnic (1) (tj. alespoň jedna neznámá $x_r \neq 0$), musí být také determinant systému (4) roven nule. Tedy platí rovnice

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n-1}, & a_{1,n} \\
a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,n-1}, & a_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots, & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1,n} \\
a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots, & a_{n,n-1}, & a_{n,n} - A(\lambda)
\end{vmatrix} = 0\,,$$

z níž plyne, že

(5)
$$\Delta(\lambda) - A(\lambda)\, D_n(\lambda) = 0\,,$$

kde

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n-1} \\
a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots, & a_{n-1,n-1}
\end{vmatrix}.$$

Ze vztahů (3) a (5) vyplývá, že *rovnice*

(5a)
$$A(\lambda)\,.\,D_n(\lambda) = 0$$

platí tehdy a jen tehdy, když λ je vlastním číslem ($\lambda = \lambda_0$). Rovnice (5a) se rozpadá na dvě samostatné rovnice

(6)
$$A(\lambda) = 0\,,$$

(6a)
$$D_n(\lambda) = 0\,.$$

U metody, o níž níže pojednáme, použijeme pro výpočet vlastního čísla λ_0 systému (1) rovnic (6) a (6a) místo běžně používané rovnice (3).

Nejdříve uveďme výpočet čísla λ_0 z rovnice (6). Transformujme homogenní systém rovnic (4) na nehomogenní systém rovnic dělením neznámou $x_r \neq 0$. Dělíme-li poslední rovnici systému (4) např. $x_n \neq 0$, dostáváme následující rovnici funkce $A(\lambda)$

(7)
$$A(\lambda) = a_{n,1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n,2}\frac{x_2}{x_n} + \dots + a_{n,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} + a_{n,n}\,.$$

Prvních $n - 1$ rovnic systému (1) nebo (4) transformovaných stejným způsobem zní

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & a_{1,1}\frac{x_1}{x_n} + a_{1,2}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{1,n}\,, \\
& a_{2,1}\frac{x_1}{x_n} + a_{2,2}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{2,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{2,n}\,, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{n-1,1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n-1,2}\frac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{n-1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{n-1,n}\,.
\end{aligned}
$$

Rovnici (6) lze splnit, postupujeme-li následujícím způsobem.

1. Zvolíme bod $\lambda^{(I)}$ a vypočítáme hodnoty koeficientů $a_{i,k}^{(I)} = f_{i,k}(\lambda^{(I)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, vyskytujících se v rovnicích (7) a (8).

2. Určíme poměry $(x_i/x_n)^{(I)}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, řešením $n - 1$ lineárních rovnic (8).

3. Dosazením hodnot $a_{n,k}^{(I)} = f_{n,k}(\lambda^{(I)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, a $(x_i/x_n)^{(I)}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, do rovnice (7) určíme hodnotu funkce $A(\lambda^{(I)})$ v bodě $\lambda^{(I)}$. Stejným postupem určíme hodnoty funkce $A(\lambda)$ pro zvolené body $\lambda^{(II)}, \lambda^{(III)}, \ldots, \lambda^{(N)}$ a sestrojíme graf této funkce v závislosti na λ (obr. 2). Bodu, v němž graf funkce $A(\lambda)$ protíná osu λ, odpovídá vlastní číslo λ_0 systému rovnic (1). Protože při této metodě určujeme vždy pro každé zvolené λ poměry x_i/x_n, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, můžeme současně sestrojit kromě křivky $A(\lambda)$ také křivky x_i/x_n v závislosti na λ.

Zbývá určit ještě vlastní číslo $\bar{\lambda}_0$ jako kořen rovnice (6a). Levou stranu rovnice (6a) tvoří determinant systému rovnic (8), jehož řešení existuje tehdy a jen tehdy, když $D_n(\lambda) \neq 0$. Tedy, když

$$\lim_{\lambda \to \bar{\lambda}_0} D_n(\lambda) = 0\,,$$

z (8) plyne, že při $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, je

$$\lim_{\lambda \to \bar{\lambda}_0} \frac{x_i}{x_n} = \pm\,\infty \tag{9}$$

a při $x_i = 0$ představuje poměr x_i/x_n neurčitý výraz tvaru 0/0. Systém rovnic (8) nemá pak žádné řešení nebo má nekonečně mnoho řešení. Protože grafy křivek x_i/x_n, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, lze sestrojit již při konstrukci grafu funkce $A(\lambda)$, můžeme z průběhu křivek x_i/x_n vyšetřit bod $\bar{\lambda}_0$ pro který platí podmínky (9), a tedy i rovnice (6a).

Chceme-li se vyhnout podmínkám (9), můžeme v okolí bodu $\bar{\lambda}_0$ sestrojit graf funkce $A_r(\lambda)$, jejíž rovnici dostaneme dělením poslední rovnice systému (4) neznámou $x_r \neq 0$. Bod $\bar{\lambda}_0$, vyhovující rovnici (6a), je pak kořenem rovnice $A_r(\lambda) = 0$. Tímto obratem můžeme vyšetřit všechna vlastní čísla systému (1) bez použití rovnice (6a), viz odst. 3.

Proto se při dalším vyšetřování nebudeme rovnicí (6a) zvlášť zabývat a budeme hledat jen kořeny rovnice (6).

Poznámka. Ze vztahů (3) a (5) plyne, že v bodě $\bar{\lambda}_0$, který je kořenem rovnice (6a), funkce (7) není definována ($x_n = 0$).

Pro kontrolu vypočtených hodnot $A(\lambda^{(k)})$ a $A(\lambda^{(k-1)})$, odpovídajících dvěma libovolným sousedním bodům $\lambda^{(k)}$ a $\lambda^{(k-1)}$, lze užít rovnice

$$\nabla^* A^{(k)} = \nabla A^{(k)},$$

kde $\nabla^* A^{(k)} = A(\lambda^{(k)}) - A(\lambda^{(k-1)})$ a $\nabla A^{(k)}$ určíme diferencováním rovnice (7)

$$\nabla A^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{n,i}^{(k)} \nabla \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k)} + \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k)} \nabla a_{n,i}^{(k)} \right],$$

při čemž

$$a_{n,i}^{(k)} = f_{n,i}(\lambda^{(k)}), \quad \nabla a_{n,i}^{(k)} = f_{n,i}(\lambda^{(k)}) - f_{n,i}(\lambda^{(k-1)}),$$

$$\nabla \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k)} = \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k)} - \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k-1)},$$

kde $(x_i/x_n)^{(k)}$ a $(x_i/x_n)^{(k-1)}$ jsou hodnoty odpovídající bodům $\lambda^{(k)}$ a $\lambda^{(k-1)}$.

Lze-li průběh křivek x_i/x_n, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, mezi body $\lambda^{(k)}$ a $\lambda^{(k-1)}$ nahradit úsečkami, tj. když

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x_i}{x_n} \right)}{\mathrm{d}\lambda} \doteq \frac{\nabla \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k)}}{\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

pak můžeme ke křivce $A(\lambda)$ sestrojit v bodě $\lambda^{(k)}$ tečnu pomocí směrnice

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{n,i}^{(k)} \frac{\mathrm{d}(x_i/x_n)}{\mathrm{d}\lambda} + \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{(k)} \frac{\mathrm{d}a_{n,i}}{\mathrm{d}\lambda} \right]. \tag{10}$$

Kdybychom řešili systém $n - 1$ rovnic (8) pro určité λ pomocí determinantů, museli bychom vyčíslit n determinantů $(n-1)$-ho řádu, což představuje stejnou námahu jako vyčíslení determinantu n-tého řádu (2). K sestrojení grafu funkce $A(\lambda)$ by bylo tedy třeba vynaložit stejnou práci jako k sestrojení grafu funkce $\Delta(\lambda)$. A proto také určení vlastního čísla λ_0 z rovnice (3) nebo (6) by bylo stejně namáhavé. Avšak řešíme-li systém rovnic (8) vyhodnějšími způsoby než determinanty, pak je výhodnější použít rovnice (6) místo (3).[1])

S určením vlastní čísla λ_0 homogenního systému rovnic (1) se setkáváme při vyšetřování kritického zatížení a vlastních frekvencí inženýrských konstrukcí [2], [4], [5]. Použijeme-li k tomuto vyšetření matic, pak úloha vede v některých případech k určení charakteristických čísel $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ ze zobecněné charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - \kappa\beta_{1,1}, & \alpha_{1,2} - \kappa\beta_{1,2}, & \ldots, & \alpha_{1,n} - \kappa\beta_{1,n} \\ \alpha_{2,1} - \kappa\beta_{2,1}, & \alpha_{2,2} - \kappa\beta_{2,2}, & \ldots, & \alpha_{2,n} - \kappa\beta_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} - \kappa\beta_{n,1}, & \alpha_{n,2} - \kappa\beta_{n,2}, & \ldots, & \alpha_{n,n} - \kappa\beta_{n,n} \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

[1]) Analytické vyjádření derivace funkce $\Delta(\lambda)$ a tedy i použití tečen ke konstrukci grafu této funkce je téměř vyloučeno, když determinant (2) je vysokého řádu. Ke konstrukci grafu funkce $A(\lambda)$ lze použít jak tečen tak i přibližných rovnic této funkce, viz odst. 5 a 6.

tj. rovnice

$$\boldsymbol{A} - \kappa \boldsymbol{B} = 0 ,$$

kde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou matice řádu n [3]

$$\boldsymbol{A} = \|\alpha_{i,j}\| , \quad \boldsymbol{B} = \|\beta_{i,j}\| , \quad i, j = 1, 2, \ldots, n .$$

Protože rovnice (11) odpovídá homogennímu systému rovnic

$$\text{(11a)} \quad \begin{aligned} (\alpha_{1,1} - \kappa\beta_{1,1})\, x_1 + (\alpha_{1,2} - \kappa\beta_{1,2})\, x_2 + \ldots + (\alpha_{1,n} - \kappa\beta_{1,n})\, x_n &= 0 , \\ (\alpha_{2,1} - \kappa\beta_{2,1})\, x_1 + (\alpha_{2,2} - \kappa\beta_{2,2})\, x_2 + \ldots + (\alpha_{2,n} - \kappa\beta_{2,n})\, x_n &= 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_{n,1} - \kappa\beta_{n,1})\, x_1 + (\alpha_{n,2} - \kappa\beta_{n,2})\, x_2 + \ldots + (\alpha_{n,n} - \kappa\beta_{n,n})\, x_n &= 0 , \end{aligned}$$

když alespoň jedna neznámá $x_r \neq 0$, lze charakteristická čísla $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ určit z podmínky

$$A(\kappa) = 0 ,$$

při čemž graf funkce $(x_n \neq 0)$

$$A(\kappa) = (\alpha_{n,1} - \kappa\beta_{n,1}) \frac{x_1}{x_n} + \ldots + (\alpha_{n,n-1} - \kappa\beta_{n,n-1}) \frac{x_{n-1}}{x_n} + \alpha_{n,n} - \kappa\beta_{n,n}$$

sestrojíme stejným způsobem jako graf funkce (7).

Poznámka. K systému (11a) dospějeme také použitím metody Ritzovy a Galerkinovy [9].

2. ŘEŠENÍ SPECIÁLNÍCH PŘÍPADŮ

Zvlášť výhodnou je uvedená metoda tehdy, když první rovnice systému (1) obsahuje jen první dva členy a u každé následující rovnice přibývá postupně po jednom členu, tj. když homogenní systém má tento tvar

$$(12)^{2)} \quad \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= 0 , \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2,1} + a_{n-2,2}x_2 + \ldots + a_{n-2,n-1}x_{n-1} &= 0 , \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= 0 , \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n &= 0 . \end{aligned}$$

V tomto případě je výhodné transformovat prvních $n - 1$ homogenních rovnic systému (12) na nehomogenní rovnice tak, že dělíme tyto rovnice neznámou $x_1 \neq 0$. Po převedení absolutních členů $a_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, na pravou stranu dostáváme tento nehomogenní systém rovnic

---

[2]) S takovým systémem rovnic se setkáváme při výpočtu kritického zatížení a vlastních frekvencí spojitých nosníků na pevných podporách, sdružených rámů s neposuvnými styčníky, při výpočtu kritického zatížení souměrných a souměrně zatížených patrových rámů o jednom poli ap., viz odst. 3, [4], str. 166–170 a [5], str. 109.

$$
(13)\quad
\begin{array}{lr}
a_{1,2}\dfrac{x_2}{x_1} & = -a_{1,1}\,, \\[2mm]
a_{2,2}\dfrac{x_2}{x_1} + a_{2,3}\dfrac{x_3}{x_1} & = -a_{2,1}\,, \\[2mm]
a_{3,2}\dfrac{x_2}{x_1} + a_{3,3}\dfrac{x_3}{x_1} + a_{3,4}\dfrac{x_4}{x_1} & = -a_{3,1}\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{n-2,2}\dfrac{x_2}{x_1} + a_{n-2,3}\dfrac{x_3}{x_1} + \dots + a_{n-2,n-1}\dfrac{x_{n-1}}{x_1} & = -a_{n-2,1}\,, \\[2mm]
a_{n-1,2}\dfrac{x_2}{x_1} + a_{n-1,3}\dfrac{x_3}{x_1} + \dots + a_{n-1,n-1}\dfrac{x_{n-1}}{x_1} + a_{n-1,n}\dfrac{x_n}{x_1} & = -a_{n-1,1}\,.
\end{array}
$$

Je zřejmé, že funkce

$$
(14)\qquad A_1(\lambda) = a_{n,1} + a_{n,2}\frac{x_2}{x_1} + a_{n,3}\frac{x_3}{x_1} + \dots + a_{n,n}\frac{x_n}{x_1}\,,
$$

jejíž rovnice vznikla dělením levé strany poslední rovnice systému (12) neznámou $x_1 \neq 0$, má hodnotu rovnou nule ($A_1(\lambda) = 0$) při λ vyhovujícím podmínce (3), tj. když λ je vlastním číslem ($\lambda = \lambda_0$).

Pro grafické znázornění funkce (14) je nutné opět určit poměry x_i/x_1, $i = 2, 3, \dots, n$, pro určitý počet zvolených hodnot λ stejným počtem řešení systému rovnic (13) (viz odst. 1). Avšak řešení systému (13) o $n - 1$ lineárních rovnicích vede na řešení $n - 1$ rovnic o jedné neznámé, dosazujeme-li postupně do každé následující rovnice poměry x_i/x_1 vypočtené z předcházejících rovnic, což podstatně usnadňuje řešení. Tímto způsobem je řešen numerický příklad v odst. 3.

Jako druhý speciální případ, se kterým se velmi často setkáváme při stanovení kritického zatížení a vlastních frekvencí různých konstrukcí pomocí matic [3], uveďme výpočet charakteristických čísel $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ matice $\boldsymbol{A} = \|\alpha_{i,j}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, z charakteristické rovnice

$$
(15)^{3)}\qquad
\begin{vmatrix}
\alpha_{1,1} - \kappa, & \alpha_{1,2}, & \alpha_{1,3}, & \dots, & \alpha_{1,n} \\
\alpha_{2,1}, & \alpha_{2,2} - \kappa, & \alpha_{2,3}, & \dots, & \alpha_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{n,1}, & \alpha_{n,2}, & \alpha_{n,3}, & \dots, & \alpha_{n,n} - \kappa
\end{vmatrix} = 0\,.
$$

Způsobem, uvedeným v [3] na str. 78–82 lze determinant (15) upravit na determinant, jehož tvar je shodný s tvarem determinantu systému rovnic (12). Vynásobíme-li každý sloupec takového determinantu postupně neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ a položíme-li součet takto obdržených členů v každém řádku determinantu rovný nule,

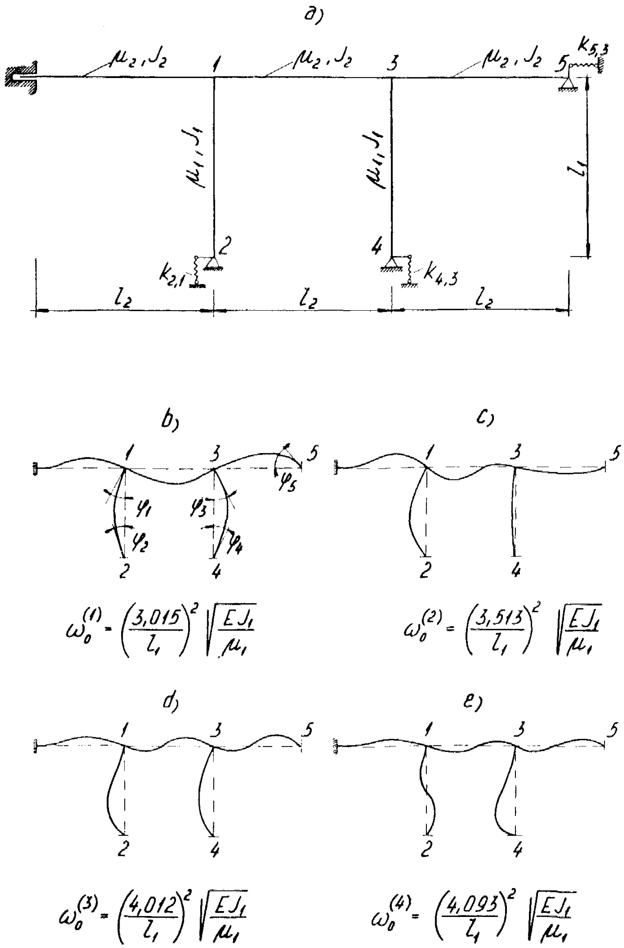
[3]) Obdobný tvar rovnice dostaneme při výpočtu vlastních frekvencí soustav *metodou pohybových rovnic*, *metodou příčinků* [2], část I, str. 81–96, a při řešení okrajových úloh *metodou diferenční* [9].

dostaneme homogenní systém rovnic ve tvaru (12), z něhož určíme charakteristická čísla $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ stejným způsobem jako vlastní číslo λ_0. Je ovšem možné řešit rovnici (15) přímo, tj. jako rovnici (11).

O bodech, v nichž funkce (14) není definována, se zmíníme při řešení konkrétní úlohy v následujícím odstavci.

3. NUMERICKÝ PŘÍKLAD

Stanovme uvedenou metodou první čtyři vlastní kruhové frekvence $\omega_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ rámové soustavy, jejíž tři pruty jsou pružně vetknuty do podpor a jeden prut je dokonale vetknut co do pootočení a volně uložen co do posunutí (obr. 1a).



Obr. 1.

Pružnost vetknutí je vyjádřena hodnotami $k_{2,1}$, $k_{4,3}$, $k_{5,3}$ (k značí moment, který způsobí jednotkové pootočení konce prutu — $\varphi = 1$).

Dáno:

$$K_{2,1} = \frac{k_{2,1} l_1}{EJ_1} = 1\,, \quad K_{4,3} = \frac{k_{4,3} l_1}{EJ_1} = 2\,, \quad K_{5,3} = \frac{k_{5,3} l_2}{EJ_2} = 0{,}5,$$

$$l_1 = l_2\,, \quad \frac{J_2}{J_1} = 4\,, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = 6\,,$$

kde J_1 (J_2) je moment setrvačnosti průřezu stojky (příčle) k ose kolmé k rovině kmitající soustavy, E je modul pružnosti materiálu, l_1 (l_2) je délka stojky (příčle), μ_1 (μ_2) je hmota připadající na délkovou jednotku stojky (příčle). Označíme-li

$$\lambda_1 = l_1 \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{EJ_1}}\,, \quad \lambda_2 = l_2 \sqrt[4]{\frac{\mu_2 \omega^2}{EJ_2}}\,, \tag{16}$$

(kde ω je kruhová frekvence), pak mezi λ_1 a λ_2 platí vztah

$$\lambda_2^4 = 1{,}5 \lambda_1^4$$

neboli

$$\lambda_2 = 1{,}10668\,.\,\lambda_1 \quad \text{a} \quad c = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2} = 4\,.$$

Deformační rovnice, které tvoří systém homogenních rovnic, jsou uvedeny v tab. I, kde neznámými φ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, které jsou v odstavcích 1 a 2 obecně označeny jako x_i, jsou úhly pootočení konců 2, 4, 5 prutů $\overline{21}$, $\overline{43}$, $\overline{53}$ a úhly pootočení styčníků 1 a 3 (obr. 1) a $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ jsou dané funkce kmitočtu, viz [2]. Kladný smysl úhlů pootočení φ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, je shodný se smyslem otáčení hodinových ručiček. Jak je z tab. I zřejmé, lze při vhodném uspořádání deformačních rovnic dostat systém rovnic ve tvaru (12). Je tedy výhodné transformovat první čtyři homogenní rovnice uvedené v tab. I na nehomogenní tak, že dělíme tyto rovnice neznámou $\varphi_1 \neq 0$ (viz odst. 2). Takto transformované rovnice v bezdimensionálním tvaru jsou uvedeny v tab. II. Transformujeme-li stejným způsobem poslední rovnici v tab. I jako předcházející rovnice, dostaneme z její levé strany funkci o rovnici

$$A_1(\lambda) = c\, F_1(\lambda_2) + \left[F_2(\lambda_1) + 2c\, F_2(\lambda_2)\right] \frac{\varphi_3}{\varphi_1} + F_1(\lambda_1) \frac{\varphi_4}{\varphi_1} + c\, F_1(\lambda_2) \frac{\varphi_5}{\varphi_1}\,. \tag{17}$$

Graf funkce $A_1(\lambda)$ a křivky φ_i/φ_1, $i = 2, 3, 4, 5$, jsou v závislosti na λ_1 sestrojeny na obr. 2 způsobem uvedeným v odst. 1 a 2, při čemž bylo použito tabulek funkcí $F_1(\lambda)$ a $F_2(\lambda)$ obsažených v II. části [2], str. 193–205. Z kořenů $\lambda_{01}^{(1)}, \lambda_{01}^{(2)}, \ldots, \lambda_{01}^{(m)}$ (resp. $\lambda_{02}^{(1)}, \lambda_{02}^{(2)}, \ldots, \lambda_{02}^{(m)}$) rovnice $A_1(\lambda) = 0$ určíme vlastní kruhové frekvence $\omega_0^{(1)}$, $\omega_0^{(2)}, \ldots, \omega_0^{(m)}$. Podle (16) pro vlastní kruhovou frekvenci $\omega_0^{(i)}$ platí

$$\omega_0^{(i)} = \left(\frac{\lambda_{01}^{(i)}}{l_1}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_1}{\mu_1}}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{18}$$

A vlastní kmitočty $n_0^{(i)}$ jsou rovny $n_0^{(i)} = \omega_0^{(i)}/2\pi$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Tab. I

Označ. rovnic \ Označení deformací		1	2	3	4	5	Absolutní člen
		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	
I	M_2	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\lambda_1)$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_2(\lambda_1) + k_{2,1}$				$=0$
II	M_1	$\frac{EJ_1}{l_1} \cdot F_2(\lambda_1) + 2 \frac{EJ_2}{l_2} F_2(\lambda_2)$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\lambda_1)$	$\frac{EJ_2}{l_2} F_1(\lambda_2)$			$=0$
III	M_4			$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\lambda_1)$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_2(\lambda_1) + k_{4,3}$		$=0$
IV	M_5			$\frac{EJ_2}{l_2} F_1(\lambda_2)$		$\frac{EJ_2}{l_2} F_2(\lambda_2) + k_{5,3}$	$=0$
V	M_3	$\frac{EJ_2}{l_2} F_1(\lambda_2)$		$\frac{EJ_1}{l_1} F_2(\lambda_1) + 2 \frac{EJ_2}{l_2} F_2(\lambda_2)$	$\frac{EJ_1}{l_1} F_1(\lambda_1)$	$\frac{EJ_2}{l_2} F_1(\lambda_2)$	$=0$

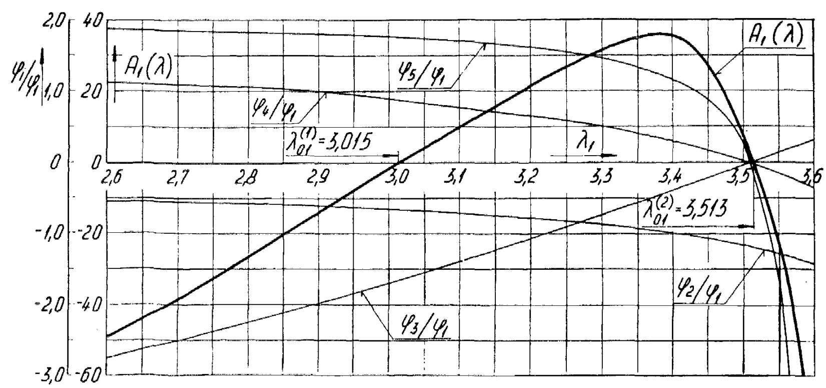
Tab. II

	φ_2/φ_1	φ_3/φ_1	φ_4/φ_1	φ_5/φ_1	Absolutní člen
I	$F_2(\lambda_1) + K_{2,1}$				$= - F_1(\lambda_1)$
II	$F_1(\lambda_1)$	$c\, F_1(\lambda_2)$			$= - [F_2(\lambda_1) + 2c\, F_2(\lambda_2)]$
III		$F_1(\lambda_1)$	$F_2(\lambda_1) + K_{4,3}$		$= 0$
IV		$F_1(\lambda_2)$		$F_2(\lambda_2) + K_{5,3}$	$= 0$

Funkce (17) je použito jen k výpočtu prvních dvou vlastních kruhových frekvencí (obr. 2)

$$\omega_0^{(1)} = \left(\frac{3{,}015}{l_1}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_1}{\mu_1}}, \quad \omega_0^{(2)} = \left(\frac{3{,}513}{l_1}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_1}{\mu_1}}.$$

K určení dalších dvou vlastních kruhových frekvencí $\omega_0^{(3)}$ a $\omega_0^{(4)}$ není vhodné užít funkce (17), a to proto, že vlastní čísla $\lambda_{01}^{(3)}$, $\lambda_{01}^{(4)}$ leží v blízkosti bodu $\bar{\lambda}_1 = 4{,}042$ (obr. 2a), kde se obtížně vyšetřuje přesný průběh funkce (17), jak vyplývá z následujícího.



Obr. 2.

Při $\bar{\lambda}_1 = 4{,}042$ je $\varphi_1/\varphi_2 = 0$, tj. $\varphi_1 = 0$, a tedy v bodě $\bar{\lambda}_1$ funkce (17) není definována. Limity funkcí φ_i/φ_1, $i = 2, 3, 4, 5$, zleva a zprava v bodě $\bar{\lambda}_1$ jsou rovny

$$\lim_{\lambda_1 \to \bar{\lambda}_1} \frac{\varphi_i}{\varphi_1} = \pm\infty,$$

neboť v bodě $\bar{\lambda}_1$ je $\varphi_i/\varphi_2 \neq 0$, $i = 3, 4, 5$ (obr. 2a), z čehož plyne, že $\varphi_i \neq 0$, $i = 2, 3, 4, 5$. V okolí bodu $\bar{\lambda}_1$ nabývají tedy funkce φ_i/φ_1, $i = 3, 4, 5$, které se vyskytují v rovnici (17), velkých absolutních hodnot, což znesnadňuje vyšetřit přesný průběh funkce (17) a tím i přesné hodnoty vlastních čísel $\lambda_{01}^{(3)}$ a $\lambda_{02}^{(4)}$.

Bod $\bar{\lambda}_1$, v němž $\varphi_1 = 0$, lze v daném případě určit velmi snadno jako kořen rovnice

$$F_2(\lambda_1) + K_{2,1} = 0,$$

jejíž levou stranou je koeficient při φ_2/φ_1 u první rovnice v tab. II. Při $K_{2,1} = 1$, je $F_2(\lambda_1) = -1$ a z tabulek [2] vyhledáme přímo kořen $\bar{\lambda}_1 = 4{,}042$.

Zmíněné obtíže se snadno zbavíme tím, že první čtyři homogenní rovnice v tab. I transformujeme na nehomogenní rovnice dělením neznámou $\varphi_2 \neq 0$. Z takto transformovaných rovnic lze pro různé hodnoty argumentu λ_1 určit hodnoty poměrů φ_i/φ_2, $i = 1, 3, 4, 5$ a vyšetřit průběh funkce

$$(19) \quad A_2(\lambda) = c\, F_1(\lambda_2)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \frac{\varphi_5}{\varphi_2}\right) + \left[F_2(\lambda_1) + 2c\, F_2(\lambda_2)\right]\frac{\varphi_3}{\varphi_2} + F_1(\lambda_1)\frac{\varphi_4}{\varphi_2},$$

kterou tvoří levá strana poslední rovnice (transformované dělením $\varphi_2 \neq 0$ a upravené do bezdimensionálního tvaru) v tab. I. Z kořenů $\lambda_{01}^{(3)} = 4{,}012$, $\lambda_{01}^{(4)} = 4{,}093$ funkce (19) určíme další dvě vlastní kruhové frekvence (obr. 2a).

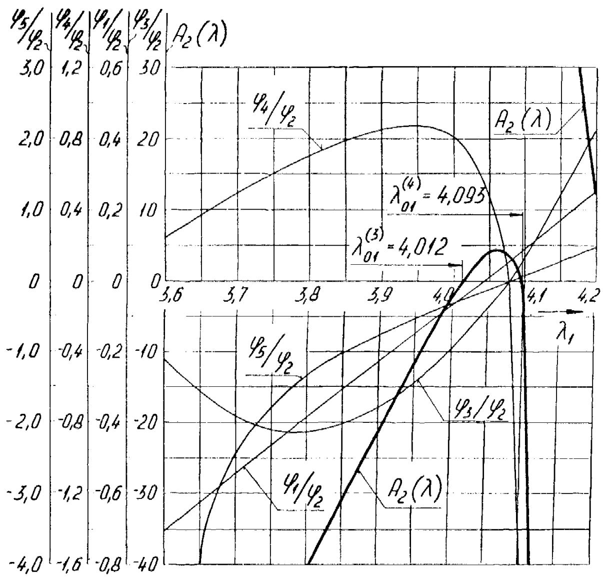
Podle (18) je

$$\omega_0^{(3)} = \left(\frac{4{,}012}{l_1}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_1}{\mu_1}},$$

$$\omega_0^{(4)} = \left(\frac{4{,}093}{l_1}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_1}{\mu_1}}.$$

Poznámka. Funkce (19) je vhodné užít i k určení vlastních čísel $\lambda_{01}^{(1)}$ a $\lambda_{01}^{(2)}$, neboť v okolí těchto bodů je $\varphi_2/\varphi_1 \neq 0$, a tedy i $\varphi_2 \neq 0$ (obr. 2).

Tvary vlastního kmitání rámové konstrukce na obr. 1a, kterým odpovídají určené vlastní kruhové frekvence (úhlové rychlosti) $\omega_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, jsou vyšetřeny současně s kořeny funkcí (17) a (19) na obr. 2 a obr. 2a.



Obr. 2a.

Tak např. hodnoty $\varphi_2/\varphi_1 = -0{,}67$, $\varphi_3/\varphi_1 = -1{,}65$, $\varphi_4/\varphi_1 = +0{,}87$ a $\varphi_5/\varphi_1 = +1{,}76$, které charakterisují první tvar vlastního kmitání vyšetřované konstrukce a které odpovídají základnímu kmitočtu konstrukce, určíme přímo z obr. 2 jako hodnoty funkcí φ_i/φ_1, $i = 2, 3, 4, 5$, v bodě $\lambda_{01}^{(1)} = 3{,}015$.

Tvary vlastního kmitání konstrukce na obr. 1a, kterým přísluší zjištěné vlastní kruhové frekvence $\omega_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, jsou znázorněny na obr. 1b, c, d, e.

4. ŘEŠENÍ NORMÁLNÍ, DVOJNÁSOBNOU A TROJNÁSOBNOU ITERACÍ

V tomto odstavci uvedeme tři iterační metody řešení systému rovnic (1).

Obdobně jako při řešení lineárních nehomogenních rovnic, u nichž jsou koeficienty $a_{i,k}$ při neznámých x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, konstantami, lze i při výpočtu vlastního čísla λ_0

homogenního systému rovnic (1), u nichž jsou koeficienty $a_{i,k}$ funkcemi argumentu λ, použít iterace, při níž můžeme postupovat následujícím způsobem.

1. Ze systému (1) vytvoříme „náhradní systém“ ve tvaru (12) zanedbáním $n - 2$ členů u první rovnice, $n - 3$ členů u druhé rovnice atd. až u $(n - 2)$-hé rovnice zanedbáním jen jednoho členu.

Při řešení konkrétní úlohy dospějeme zpravidla k homogennímu systému, jehož každá rovnice neobsahuje všech n členů. V takových případech přeřadíme členy v rovnicích (viz níže uvedený příklad), po případě také změníme pořadí rovnic tak, abychom vytvořili „náhradní systém“ ve tvaru (12) zanedbáním co nejmenšího počtu členů.

Při přeřazování rovnic a jejich členů je třeba dbát na to, aby členy, které mají být zanedbány, měly malé absolutní hodnoty ve srovnání s absolutními hodnotami členů, které bude obsahovat „náhradní systém“. Snažíme se tedy vytvořit takový „náhradní systém“ ve tvaru (12), který pokud možno dobře aproximuje daný systém (1). Protože předem nevíme, v jakých poměrech jsou absolutní hodnoty jednotlivých členů systému, který máme řešit, srovnáváme hodnoty koeficientů $a_{i,k}$ při neznámých x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zanedbáme pak ty členy, které obsahují koeficienty $a_{i,k}$ s absolutními hodnotami co nejmenšími.

Ve skutečnosti nemůžeme předem přesně porovnávat ani absolutní hodnoty koeficientů $a_{i,k}$, neboť tyto hodnoty dovedeme určit až tehdy, když známe vlastní číslo λ_0, jehož určení je konečným cílem celého řešení. Porovnání koeficientů $a_{i,k}$ provedeme proto tak, že odhadneme délku intervalu $[\lambda', \lambda'']$, v němž se vyskytuje vlastní číslo λ_0 a porovnáme průběh funkcí $a_{i,k} = f_{i,k}(\lambda)$ v celém intervalu $[\lambda', \lambda'']$, viz příklad.

2. Postupem uvedeným v odst. 2 určíme vlastní číslo ${}^{(0)}\lambda_0$ a jemu odpovídající poměry ${}^{(0)}(x_i/x_1)$, $i = 2, 3, \ldots; n$, „náhradního systému“.

3. Určíme kořen ${}^{(1)}\lambda_0$ rovnice $A_1(\lambda) = 0$, kde $A_1(\lambda)$ je funkce definovaná rovnicí (14), do níž dosazujeme za poměry x_i/x_1, $i = 2, 3, \ldots, n$, hodnoty určované řešením následujícího systému rovnic

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
&a_{1,2}\frac{x_2}{x_1} &&= -a_{1,1} - \sum_{i=3}^{n} a_{1,i}\,{}^{(0)}\!\left(\frac{x_i}{x_1}\right),\\
&a_{2,2}\frac{x_2}{x_1} + a_{2,3}\frac{x_3}{x_1} &&= -a_{2,1} - \sum_{i=4}^{n} a_{2,i}\,{}^{(0)}\!\left(\frac{x_i}{x_1}\right),\\
&a_{3,2}\frac{x_2}{x_1} + a_{3,3}\frac{x_3}{x_1} + a_{3,4}\frac{x_4}{x_3} &&= -a_{3,1} - \sum_{i=5}^{n} a_{3,i}\,{}^{(0)}\!\left(\frac{x_i}{x_1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$a_{n-2,2}\frac{x_2}{x_1} + a_{n-2,3}\frac{x_3}{x_1} + \ldots + a_{n-2,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_1} \qquad = - a_{n-2,1} - a_{n-2,n}\,{}^{(0)}\!\left(\frac{x_n}{x_1}\right),$$

$$a_{n-1,2}\frac{x_2}{x_1} + a_{n-1,3}\frac{x_3}{x_1} + \ldots + a_{n-1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_1} + a_{n-1,n}\frac{x_n}{x_1} = - a_{n-1,1}\,.$$

Poněvadž rovnice (20) a rovnice $A_1(\lambda) = 0$ tvoří systém rovnic, který se od systému (1) liší tím, že přesné poměry x_i/x_1, $i = 3, 4, \ldots, n$, odpovídající vlastnímu číslu λ_0, jsou nahrazeny přibližnými hodnotami ${}^{(0)}(x_i/x_1)$ jen u několika činitelů $a_{i,k}$, je číslo ${}^{(1)}\lambda_0$ první aproximací hledaného vlastního čísla λ_0.

Obecně m-tou aproximaci ${}^{(m)}\lambda_0$ čísla λ_0 stanovíme jako kořen rovnice $A_1(\lambda) = 0$, při čemž za poměry x_i/x_1, $i = 2, 3, \ldots, n$, vyskytující se u funkce (14) budeme dosazovat hodnoty, které budeme určovat řešením systému (20), v němž použijeme místo poměrů ${}^{(0)}(x_i/x_1)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, hodnoty ${}^{(m-1)}(x_i/x_n)$ odpovídající $(m - 1)$-ní aproximaci ${}^{(m-1)}\lambda_0$ vlastního čísla λ_0.

Vlastní číslo λ_0 určíme s žádanou přesností tehdy, když se dvě po sobě následující aproximace čísla λ_0 při uvažování určitého počtu desetinných míst od sebe prakticky neliší. Je zřejmé, že systém (20) lze řešit jako systém $n - 1$ rovnic o jedné neznámé, tj. jako systém (13). Uvedený postup řešení nazveme *normální iterací.*

Řešíme-li „náhradní systém" ve tvaru (12) postupem uvedeným v odst. 2 a při každém kroku normální iterace použijeme iterační metody podané v práci [1], nazveme takový způsob řešení systému (1) *dvojnásobnou iterací.*

Užijeme-li iterační metody uvedené v [1] k řešení jak „náhradního systému" ve tvaru (12) tak i systému rovnic ve tvaru (20) vždy při každém kroku normální iterace, nazveme takový způsob řešení systému rovnic (1) *trojnásobnou iterací.*

Poznamenejme, že v některých případech (např. při výpočtu vlastních frekvencí a kritických zatížení konstrukcí metodou deformační) mají poměry x_i/x_1, $i = 2, 3, \ldots, n$, které určují vlastní tvar kmitání nebo tvar vybočení konstrukce, velmi názorný význam, viz odst. 3. Zejména první vlastní tvar kmitání a první rovnovážný deformovaný stav konstrukce odpovídající základnímu kmitočtu nebo nejmenšímu kritickému zatížení, které mají největší praktický význam, lze i u složitější konstrukce velmi dobře odhadnout, tj. předem stanovit, jaká znaménka mají jednotlivé poměry x_i/x_1, $i = 2, 3, \ldots, n$.

V takových případech můžeme transformovat homogenní systém rovnic (1) na nehomogenní systém dělením $x_1 \neq 0$ a odhadnout alespoň velmi zhruba hodnoty poměrů x_i/x_1. Odhadnuté hodnoty poměrů x_i/x_1 použijeme pak místo poměrů ${}^{(0)}(x_i/x_1)$ vyskytujících se na pravé straně systému (20). Tím lze podstatně zkrátit celé řešení, neboť odpadne výpočet vlastního čísla ${}^{(0)}\lambda_0$ „náhradního systému" a již první aproximace vlastního čísla λ_0 systému (1), kterou určíme použitím odhadnutých poměrů x_i/x_1, může mít pro praktické účely dostatečnou přesnost.

Pro ilustraci uvádíme následující numerický příklad.

Příklad. Stanovme trojnásobnou iterací vlastní číslo λ_{01} tohoto systému rovnic

(21) [4])

$$\begin{aligned}
&[L_1(\lambda_1) + 1{,}6]\,\bar{x}_1 + 0{,}8\bar{x}_2 - L_3(\lambda_1)\,\bar{x}_4 = 0\,,\\
&0{,}8\bar{x}_1 + [L_1(\lambda_2) + 3{,}2]\,\bar{x}_2 + 0{,}8\bar{x}_3 - L_3(\lambda_2)\,\bar{x}_4 = 0\,,\\
&0{,}8\bar{x}_2 + [L_1(\lambda_3) + 1{,}6]\,\bar{x}_3 - L_3(\lambda_3)\,\bar{x}_4 = 0\,,\\
&L_3(\lambda_1)\,\bar{x}_1 + L_3(\lambda_2)\,\bar{x}_2 + L_3(\lambda_3)\,\bar{x}_3 - [L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) +\\
&\quad + L_4(\lambda_3)]\,\bar{x}_4 = 0\,,
\end{aligned}$$

při čemž je

$$\lambda_2 = 1{,}25\lambda_1\,, \quad \lambda_3 = 0{,}625\lambda_1\,.$$

Nejdříve vytvoříme „náhradní systém" tak, aby (pokud je to možné) byly zanedbány ty členy, které mají absolutní hodnoty malé ve srovnání s hodnotami ostatních členů. Protože v daném případě vlastní číslo λ_{01} ($\lambda_{02} = 1{,}25\lambda_{01}$, $\lambda_{03} = 0{,}625\lambda_{01}$), které má fyzikální význam, leží přibližně v intervalu $[0, 4]$, v jehož rozmezí funkce $L_1(\lambda)$ a $L_3(\lambda)$ nabývají hodnot $1{,}1732 \leqq L_1(\lambda) \leqq 4$, $4{,}1766 \leqq L_3(\lambda) \leqq 6$, je výhodné zanedbat $0{,}8\bar{x}_2$ a $0{,}8\bar{x}_3$ v prvních dvou rovnicích systému (21). Označíme-li

$$x_1 = \bar{x}_4\,, \quad x_2 = \bar{x}_1\,, \quad x_3 = \bar{x}_2\,, \quad x_4 = \bar{x}_3\,, \tag{22}$$

dostáváme tento „náhradní systém" ve tvaru (12)

(23)

$$\begin{aligned}
- L_3(\lambda_1)\,x_1 + [L_1(\lambda_1) + 1{,}6]\,x_2 &= 0\,,\\
- L_3(\lambda_2)\,x_1 + 0{,}8x_2 + [L_1(\lambda_2) + 3{,}2]\,x_3 &= 0\,,\\
- L_3(\lambda_3)\,x_1 + 0{,}8x_3 + [L_1(\lambda_3) + 1{,}6]\,x_4 &= 0\,,\\
- [L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3)]\,x_1 + L_3(\lambda_1)\,x_2 + L_3(\lambda_2)\,x_3 + L_3(\lambda_3)\,x_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Vlastní číslo ${}^{(0)}\lambda_{01}$ systému (23) určíme iterační metodou uvedenou v [1]. Vyjdeme-li z hodnot $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, je první aproximací čísla ${}^{(0)}\lambda_{01}$ kořen $\lambda_1 = 2{,}426$ rovnice ${}^{(1)}\Phi(\lambda) = 0$ (obr. 3), kde

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Phi(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - 1{,}0714L_3(\lambda_1) - 0{,}7143L_3(\lambda_2) -\\
- 0{,}9694L_3(\lambda_3)\,.
\end{aligned}$$

Druhou aproximací čísla ${}^{(0)}\lambda_{01}$ je kořen $\lambda_1 \doteq 2{,}40$ rovnice ${}^{(2)}\Phi(\lambda) = 0$ (obr. 3), kde

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}\Phi(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - 1{,}1347L_3(\lambda_1) - 0{,}7093L_3(\lambda_2) -\\
- 0{,}9839L_3(\lambda_3)\,.
\end{aligned}$$

Protože se obě vypočtené aproximace čísla ${}^{(0)}\lambda_1$ liší od sebe jen o 1%, jest vlastní číslo ${}^{(0)}\lambda_{01}$ „náhradního systému" (23) určeno dostatečně přesně (${}^{(0)}\lambda_{01} \doteq 2{,}40$).

[4]) Je to příklad na výpočet kritického zatížení rámu s posuvnými styčníky, který je řešen v [1]. V [3] jsou tabelovány funkce $\varphi_2(\lambda)$, $\varphi_4(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$, které jsou s funkcemi $L_j(\lambda)$, $j = 1, 3, 4$, vázány vztahy $L_1(\lambda) = 4\varphi_2(\lambda)$, $L_3(\lambda) = 6\varphi_4(\lambda)$, $L_4(\lambda) = 12\eta_2(\lambda)$, při čemž λ je označeno písmenem v.

Číslu ${}^{(0)}\lambda_{01}$ odpovídají poměry ${}^{(0)}(x_2/x_1) = 1{,}1328$, ${}^{(0)}(x_3/x_1) = 0{,}7091$, ${}^{(0)}(x_4/x_1) = 0{,}9837$ stanovené řešením prvních tří rovnic systému (23).

Další řešení provedeme normální iterací, při jejímž každém kroku použijeme iterační metody uvedené v [1].

První krok. Systém (23) doplníme členy $0{,}8x_3$ a $0{,}8x_4$ (viz (22)), které jsme při jeho vytvoření zanedbali. A dělíme-li pak první tři rovnice systému (23) neznámou $x_1 \neq 0$ a nahradíme-li členy $0{,}8\, x_3/x_1$, $0{,}8\, x_4/x_1$ přibližnými hodnotami $0{,}8^{(0)}(x_3/x_1) = 0{,}5673$, $0{,}8^{(0)}(x_4/x_1) = 0{,}7870$, dostáváme po převedení absolutních členů na pravou stranu systém rovnic ve tvaru (20)

(24)
$$\begin{aligned}
&[L_1(\lambda_1) + 1{,}6]\frac{x_2}{x_1} &&= L_3(\lambda_1) - 0{,}5673\,,\\
&0{,}8\frac{x_2}{x_1} + [L_1(\lambda_2) + 3{,}2]\frac{x_3}{x_1} &&= L_3(\lambda_2) - 0{,}7870\,,\\
&0{,}8\frac{x_3}{x_1} + [L_1(\lambda_3) + 1{,}6]\frac{x_4}{x_1} &&= L_3(\lambda_3)\,.
\end{aligned}$$

Funkce $A_1(\lambda)$ obecně definovaná rovnicí (14) má zde tvar

$$A_1(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - L_3(\lambda_1)\frac{x_2}{x_1} - L_3(\lambda_2)\frac{x_3}{x_1} - L_3(\lambda_3)\frac{x_4}{x_1}\,, \tag{25}$$

který vznikl z levé strany poslední rovnice systému (23) dělením $-x_1 \neq 0$. Vlastní číslo ${}^{(1)}\lambda_{01}$ systému rovnic (24) a $A_1(\lambda) = 0$ (kde $A_1(\lambda)$ je funkce (25)), které je první aproximací hledaného vlastního čísla λ_{01} systému (21), určíme opět iterační metodou uvedenou v [1].

Za výchozí hodnoty vezmeme ${}^{(0)}\lambda_{01} = 2{,}40$, ${}^{(0)}\lambda_{02} = 1{,}25\,{}^{(0)}\lambda_{01} = 3{,}00$, ${}^{(0)}\lambda_{03} = 0{,}625\,{}^{(0)}\lambda_{01} = 1{,}50$ a řešením rovnic (24) dostáváme jim odpovídající hodnoty poměrů

$$\frac{x_2}{x_1} = 1{,}0137\,,\quad \frac{x_3}{x_1} = 0{,}5903\,,\quad \frac{x_4}{x_1} = 1{,}0017\,,$$

které dosadíme do (25)

$$\begin{aligned}{}^{(1)}_{(1)}A_1(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - 1{,}0137L_3(\lambda_1) - 0{,}5903L_3(\lambda_2) -\\ - 1{,}0017L_3(\lambda_3)\,.\end{aligned}$$

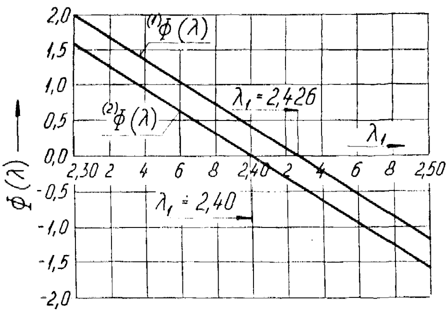
Kořen $\lambda_1 = 2{,}472$ rovnice ${}^{(1)}_{(1)}A_1(\lambda) = 0$ (obr. 4), je první aproximací čísla ${}^{(1)}\lambda_{01}$. Druhou aproximací čísla ${}^{(1)}\lambda_{01}$ je kořen rovnice ${}^{(2)}_{(1)}A_1(\lambda) = 0$, kde

$$\begin{aligned}{}^{(2)}_{(1)}A_1(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - 1{,}0176L_3(\lambda_1) - 0{,}5887L_3(\lambda_2) -\\ - 1{,}0028L_3(\lambda_3)\,.\end{aligned}$$

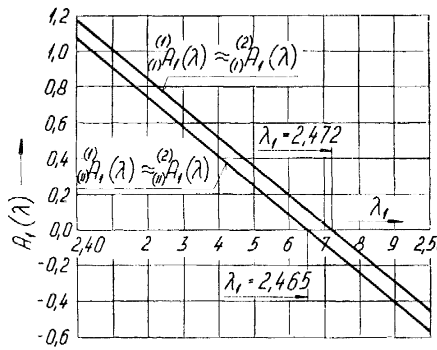
Protože v intervalu $2{,}40 \leqq \lambda \leqq 2{,}50$, kde funkce ${}^{(2)}_{(I)}A_1(\lambda)$ mění znaménko, je ${}^{(2)}_{(I)}A_1(\lambda) \approx {}^{(1)}_{(I)}A_1(\lambda)$ (obr. 4), první a druhá aproximace čísla ${}^{(1)}\lambda_{01}$ se ztotožňují, a tedy ${}^{(1)}\lambda_{01} = 2{,}472$. Poměry ${}^{(1)}(x_i/x_1)$, $i = 2, 3, 4$, odpovídající číslu ${}^{(1)}\lambda_{01}$, mají hodnoty

$$ {}^{(1)}\!\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 1{,}0176\,, \quad {}^{(1)}\!\left(\frac{x_3}{x_1}\right) = 0{,}5887\,, \quad {}^{(1)}\!\left(\frac{x_4}{x_1}\right) = 1{,}0028\,, $$

které jsou určeny řešením rovnic (24).



Obr. 3.



Obr. 4.

Druhý krok. Dosazením hodnot $0{,}8^{(1)}(x_3/x_1) = 0{,}4710$ a $0{,}8^{(1)}(x_4/x_1) = 0{,}8022$ do (24) za $0{,}8^{(0)}(x_3/x_1)$ a $0{,}8^{(0)}(x_4/x_1)$ dostáváme

(26)

$$ \begin{aligned} &[L_1(\lambda_1) + 1{,}6]\frac{x_2}{x_1} &&= L_3(\lambda_1) - 0{,}4710\,,\\ &0{,}8\frac{x_2}{x_1} + [L_1(\lambda_2) + 3{,}2]\frac{x_3}{x_1} &&= L_3(\lambda_2) - 0{,}8022\,,\\ &0{,}8\frac{x_3}{x_1} + [L_1(\lambda_3) + 1{,}6]\frac{x_4}{x_1} &&= L_3(\lambda_3)\,. \end{aligned} $$

Vlastní číslo ${}^{(2)}\lambda_{01}$ systému rovnic (26) a $A_1(\lambda) = 0$ (kde $A_1(\lambda)$ je funkce (25)), je druhou aproximací vlastního čísla λ_{01} systému (21). Číslo ${}^{(2)}\lambda_{01}$ určíme opět iterační metodou uvedenou v [1].

Za výchozí hodnoty vezmeme ${}^{(1)}\lambda_{01} = 2{,}472$, ${}^{(1)}\lambda_{02} = 1{,}25^{(1)}\lambda_{01} = 3{,}09$, ${}^{(1)}\lambda_{03} = 0{,}625^{(1)}\lambda_{01} = 1{,}545$ určené při prvním iteračním kroku a řešením rovnic (26) dostáváme poměry $x_2/x_1 = 1{,}0380$, $x_3/x_1 = 0{,}5832$, $x_4/x_1 = 1{,}0037$, které dosadíme do (25)

$$ {}^{(1)}_{(II)}A_1(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - 1{,}0380L_3(\lambda_1) - 0{,}5832L_3(\lambda_1) - \\ - 1{,}0037L_3(\lambda_3)\,. $$

První aproximací čísla ${}^{(2)}\lambda_{01}$ je kořen $\lambda_1 = 2{,}465$ rovnice ${}^{(1)}_{(II)}A_1(\lambda) = 0$ (obr. 4). Druhou aproximací čísla ${}^{(2)}\lambda_{01}$ je kořen rovnice ${}^{(2)}_{(II)}A_1(\lambda) = 0$, kde

$$ {}^{(2)}_{(II)}A_1(\lambda) = L_4(\lambda_1) + L_4(\lambda_2) + L_4(\lambda_3) - 1{,}0376L_3(\lambda_1) - 0{,}5838L_3(\lambda_2) - \\ - 1{,}0035L_3(\lambda_3)\,. $$

Protože je ${}^{(2)}_{(II)}A_1(\lambda) \approx {}^{(1)}_{(II)}A_1(\lambda)$, ztotožňují se první a druhá aproximace čísla ${}^{(2)}\lambda_{01}$, a tedy ${}^{(2)}\lambda_{01} = 2{,}465$.

Rozdíl vypočtených hodnot ${}^{(1)}\lambda_{01} = 2{,}472$ a ${}^{(2)}\lambda_{01} = 2{,}465$ při prvním a druhém iteračním kroku je menší než 0,3%, a proto, počítáme-li vlastní číslo na tři desetinná místa, je přesnost obdrženého výsledku dostatečná

$$\lambda_{01} = 2{,}465 \quad \left(\lambda_{02} = 1{,}25\lambda_{01} = 3{,}081,\ \lambda_{03} = 0{,}625\lambda_{01} = 1{,}541\right).$$

Tyto hodnoty se shodují s výslednými hodnotami v [1].

5. POZNÁMKY K URČENÍ KOŘENŮ ROVNICE (6)

Vzhledem k tomu, že při řešení praktických příkladů funkce (7), resp. (14), může být ve vyšetřovaném intervalu $[\lambda', \lambda'']$ nespojitá v několika bodech (obr. 2), není vhodné používat k sestrojení grafu této funkce vždy jen hodnot $A(\lambda^{(\mathrm{I})})$, $A(\lambda^{(\mathrm{III})}), \ldots, A(\lambda^{(N)})$ odpovídajících zvoleným bodům $\lambda^{(\mathrm{I})}, \lambda^{(\mathrm{II})}, \ldots, \lambda^{(N)}$ (odst. 1). Body $\lambda^{(\mathrm{I})}, \lambda^{(\mathrm{II})}, \ldots, \lambda^{(N)}$ nemůžeme volit dosti blízko sebe, neboť pro výpočet hodnoty funkce jen v jednom bodě $\lambda^{(k)}$ je nutno řešit systém $n - 1$ rovnic (8), což představuje značnou námahu, když je n velké.

V tomto odstavci uvedeme přesný i přibližný výpočet prvních derivací $\mathrm{d}A(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$, které podstatně usnadňují vyšetření průběhu funkce (7) a jsou nezbytné k hledání kořenů rovnice (6) při použití Newtonovy metody tečen [6], [7].

Derivováním rovnic (8) podle λ, v nichž $a_{i,k}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, a poměry x_i/x_n jsou funkcemi argumentu λ, dostáváme po převedení výrazů $x_i/x_n \, \mathrm{d}a_{i,k}/\mathrm{d}\lambda$ na pravou stranu tento systém rovnic

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} a_{1,i} \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}a_{1,n}}{\mathrm{d}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{1,i}}{\mathrm{d}\lambda}, \\
&\sum_{i=1}^{n-1} a_{2,i} \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}a_{2,n}}{\mathrm{d}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{2,i}}{\mathrm{d}\lambda}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i} \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x_i}{x_n}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}a_{n-1,n}}{\mathrm{d}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{n-1,i}}{\mathrm{d}\lambda}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Derivaci $\mathrm{d}A(\lambda^{(k)})/\mathrm{d}\lambda$ v libovolném bodě $\lambda^{(k)}$ určíme takto:

1. Vypočteme hodnoty $a_{i,k}^{(k)} = f_{i,k}(\lambda^{(k)})$ a řešením rovnic (8) určíme poměry $(x_i/x_n)^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

2. Vypočteme derivace funkcí $a_{i,k}$ v bodě λ_k $[(\mathrm{d}a_{i,k}/\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}f_{i,k}(\lambda^{(k)})/\mathrm{d}\lambda)]$ a dosadíme je s vypočtenými poměry $(x_i/x_n)^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, do (27).

3. Řešením rovnic (27) určíme všech $(n - 1)$ derivací $\mathrm{d}(x_i/x_n)/\mathrm{d}\lambda$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, a dosazením do (10) určíme $\mathrm{d}A(\lambda^{(k)})/\mathrm{d}\lambda$.

Poznámka. Systém (27) se od systému (8) liší jen jinou pravou stranou.

Místo řešení rovnic (27) lze postupovat následovně. Vyjádříme $\mathrm{d}(x_i/x_n)/\mathrm{d}\lambda$ výrazy

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{x_i}{x_n} + g_i(\lambda)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{28}$$

Dosadíme-li (28) do (27) a přihlédneme-li k (8), dostáváme tento systém $n - 1$ rovnic lineárních vzhledem k neznámým $g_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_{1,i}\, g_i(\lambda) &= -\frac{\mathrm{d}a_{1,n}}{\mathrm{d}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{1,i}}{\mathrm{d}\lambda} + a_{1,n}\,, \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_{2,i}\, g_i(\lambda) &= -\frac{\mathrm{d}a_{2,n}}{\mathrm{d}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{2,i}}{\mathrm{d}\lambda} + a_{2,n}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}\, g_i(\lambda) &= -\frac{\mathrm{d}a_{n-1,n}}{\mathrm{d}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{n-1,i}}{\mathrm{d}\lambda} + a_{n-1,n}\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Řešením rovnic (29) určíme hodnoty $g_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, a z (28) vypočteme derivace $\mathrm{d}(x_i/x_n)/\mathrm{d}\lambda$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, které dosadíme do (10).

Označíme-li pro bod $\lambda^{(k)}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a_{1,n}}{\mathrm{d}\lambda} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{1,i}}{\mathrm{d}\lambda} &= \vartheta_1 a_{1,n}\,, \\ \frac{\mathrm{d}a_{2,n}}{\mathrm{d}\lambda} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{2,i}}{\mathrm{d}\lambda} &= \vartheta_2 a_{2,n}\,, \\ \frac{\mathrm{d}a_{n-1,n}}{\mathrm{d}\lambda} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} \frac{\mathrm{d}a_{n-1,i}}{\mathrm{d}\lambda} &= \vartheta_{n-1} a_{n-1,n} \end{aligned} \tag{30}$$

a je-li splněna podmínka

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_{n-1} = \vartheta\,, \tag{31}$$

pak z porovnání (8), (29) a (30) plyne, že

$$g_i(\lambda) = (\vartheta - 1)\frac{x_i}{x_n}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{32}$$

Dosazením (32) do (28) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = \vartheta \frac{x_i}{x_n}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{33}$$

Je-li splněna podmínka (31), není třeba vůbec řešit systém rovnic (27), resp. (29). Není-li splněna podmínka (31) přesně, ale jen přibližně, dostaneme z (33) jen přibližné hodnoty $\mathrm{d}(x_i/x_n)/\mathrm{d}\lambda$ a tedy podle (10) i přibližnou derivaci $\mathrm{d}A(\lambda^{(k)})/\mathrm{d}\lambda$.

Obdobným způsobem, kterým jsme určili první derivaci, můžeme určit i vyšší derivace funkce $A(\lambda)$ v bodě $\lambda^{(k)}$. Výpočet každé další vyšší derivace funkce $A(\lambda)$ vyžaduje ovšem opětovného řešení systému $n - 1$ lineárních rovnic (který se od systému (8) liší jen jinou pravou stranou) a vyčíslení příslušných vyšších derivací funkcí $a_{i,k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

6. PŘIBLIŽNÁ ANALYTICKÁ VYJÁDŘENÍ FUNKCE (7)

V tomto odstavci odvodíme čtyři přibližné rovnice funkce (7) v okolí bodu $\lambda^{(k)}$.

Známe-li hodnoty funkce (7) odpovídající několika hodnotám argumentu λ v okolí bodu $\lambda^{(k)}$, v němž funkce (7) je spojitá, lze použitím interpolačních vzorců (LAGRANGE, NEWTON, GAUSS, STIRLING, BESSEL, EVERETT) analyticky vyjádřit funkce, které aproximují funkci (7).

Určení hodnoty funkce (7) pro zvolené λ vyžaduje výpočet hodnot daných funkcí $a_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a funkcí

$$\frac{x_i}{x_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1, \tag{34}$$

které jsou definovány systémem $n - 1$ rovnic (8), odst. 1. Protože hodnoty funkcí (34) pro určité λ se určují mnohem obtížněji než hodnoty funkcí $a_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, navrhujeme použít interpolačních vzorců jen k rozvoji funkcí (34) a nikoliv k přímému rozvoji funkce (7). Tím můžeme dosáhnout velmi dokonalého vystižení funkce (7), i když známe hodnoty funkcí (34) odpovídající malému počtu zvolených bodů v okolí bodu $\lambda^{(k)}$.

Určíme-li např. hodnoty $(x_i/x_n)^{(k)}$, $(x_i/x_n)^{(k+1)}$, $(x_i/x_n)^{(k+2)}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, funkcí (34) v bodech $\lambda^{(k)}$, $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + h$, $\lambda^{(k+2)} = \lambda^{(k)} + 2h$ (kde h je zvolený krok), dostaneme v pravém okolí bodu $\lambda^{(k)}$ použitím Newtonova interpolačního vzorce tyto přibližné rovnice funkcí (34)

$$\frac{x_i}{x_n} \doteq \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \Delta\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} \frac{\lambda - \lambda^{(k)}}{h} + \Delta^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} \frac{(\lambda - \lambda^{(k)})(\lambda - \lambda^{(k)} - h)}{2h^2}, \tag{35}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n - 1 .$$

V rovnicích (35) značí

$$\Delta\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} = \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+1)} - \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)}, \quad \Delta^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} = \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+2)} - 2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+1)} + \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)},$$
$$i = 1\ 2\ \ldots, n - 1 .$$

Dosazením (35) do (7) dostáváme tuto přibližnou rovnici

$$A(\lambda) \doteq a_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} \left[\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \Delta\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} \frac{\lambda - \lambda^{(k)}}{h} + \Delta^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} \frac{(\lambda - \lambda^{(k)})(\lambda - \lambda^{(k)} - h)}{2h^2}\right]. \tag{36}$$

Při zpětné interpolaci vyjdeme z bodů $\lambda^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)} = \lambda^{(k)} - h$, $\lambda^{(k-2)} = \lambda^{(k)} - 2h$, kterým patří funkční hodnoty

$$\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)}, \quad \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k-1)}, \quad \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k-2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Místo rovnice (36) dostaneme tuto rovnici

$$(37) \qquad A(\lambda) \doteq a_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} \left[\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \nabla\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} \frac{\lambda - \lambda^{(k)}}{h} + \right.$$
$$\left. + \nabla^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} \frac{(\lambda - \lambda^{(k)})(\lambda - \lambda^{(k)} + h)}{2h^2}\right],$$

kde značí

$$(38) \qquad \nabla\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} = \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} - \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k-1)},$$

$$\nabla^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} = \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} - 2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k-1)} + \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k-2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Pro zobrazení funkcí (34) v levém a pravém okolí bodu $\lambda^{(k)}$ použijeme Stirlingův interpolační vzorec [9]. Vyjdeme-li např. jen ze tří bodů $\lambda^{(k-1)} = \lambda^{(k)} - h$, $\lambda^{(k)}$, $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + h$, dostáváme tyto přibližné rovnice funkcí (34)

$$(39) \quad \frac{x_i}{x_n} \doteq \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \left[\nabla\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \nabla\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+1)}\right] \frac{\lambda - \lambda^{(k)}}{2h} + \nabla^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+1)} \frac{(\lambda - \lambda^{(k)})^2}{2h^2},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Diferenční operátory $\nabla(x_i/x_n)^{(k+1)}$ a $\nabla^2(x_i/x_n)^{(k+1)}$ určíme z výrazů (38), píšeme-li místo indexů k, $k-1$, $k-2$ indexy $k+1$, k, $k-1$.

Dosazením (39) do (7) dostáváme

$$(40) \quad A(\lambda) \doteq a_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} \left\{\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \left[\nabla\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} + \nabla\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+1)}\right] \frac{\lambda - \lambda^{(k)}}{2h} + \right.$$
$$\left. + \nabla^2\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k+1)} \frac{(\lambda - \lambda^{(k)})^2}{2h^2}\right\}.$$

Nečiní-li obtíže výpočet derivací funkcí $a_{i,k}$ vyskytujících se v rovnicích (1), můžeme určit kromě hodnot funkcí (34) také jejich derivace v bodě $\lambda^{(k)}$ (odst. 5) a rozložit funkce (34) v Taylorovu řadu.

Vypočteme-li např. hodnoty $(x_i/x_n)^{(k)}$ a $g_i(\lambda^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, řešením rovnic (8) a (29) a označíme-li

$$(41) \qquad \sigma_i^{(k)} = \frac{g_i(\lambda^k)}{\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 ,$$

pak dosazením (41) do (28) dostáváme

$$\left[\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)}{\mathrm{d}\lambda}\right]_{\lambda=\lambda^{(k)}} = (1 + \sigma^{(k)})\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{42}$$

Omezíme-li rozvoj funkcí (34) na první dva členy Taylorovy řady, mají aproximativní rovnice funkcí (34) vzhledem k (42) tvar

$$\frac{x_i}{x_n} \doteq \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} [1 + (1 + \sigma_i^{(k)})(\lambda - \lambda^{(k)})]\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{43}$$

Dosazením (43) do (7) dostáváme tuto přibližnou rovnici

$$A(\lambda) \doteq a_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)} [1 + (1 + \sigma_i^{(k)})(\lambda - \lambda^{(k)})]\,. \tag{44}$$

Je-li splněna podmínka (31), je podle (33) a (42) v rovnici (44) $1 + \sigma_i^{(k)} = \vartheta$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ke konstrukci grafu funkce (44) a k hledání kořenů této funkce můžeme použít její první derivace

$$\frac{\mathrm{d}A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}a_{n,n}}{\mathrm{d}\lambda} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)}\left\{[1 + (1 + \sigma_i^{(k)})(\lambda - \lambda^{(k)})]\frac{\mathrm{d}a_{n,i}}{\mathrm{d}\lambda} + (1 + \sigma_i^{(k)})\,a_{n,i}\right\}.$$

Uvažujeme-li v rovnicích (35), (39) a (43) jen první člen, dostaneme z (36), (37), (40) a (44) v okolí bodu $\lambda^{(k)}$ stejnou aproximativní rovnici funkce (7)

$$A(\lambda) \doteq a_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i}\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{(k)}, \tag{45}$$

které je použito při iterační metodě v [1].

Kořeny funkcí (36), (37), (40), (44) a (45) jsou přibližnými hodnotami vlastního čísla λ_0 homogenního systému rovnic (1) v případě, že tyto kořeny leží v okolí zvoleného bodu $\lambda^{(k)}$. Ke zpřesnění takto vypočtených přibližných hodnot čísla λ_0 lze použít na příklad iterační metody uvedené v [1].

Poznamenejme, že funkce (36), (37), (40), (44) a (45) mohou velmi dobře aproximovat funkci (7) v okolí bodu $\lambda^{(k)}$ i v případě, když funkce (7) není v tomto okolí spojitá.

ZÁVĚR

Použitím iteračních metod uvedených v odst. 4 převádíme řešení systému n rovnic (1) na řešení systému $n - 1$ rovnic tvaru (13), resp. (20), a na hledání kořenů rovnice $A_1(\lambda) = 0$, kde $A_1(\lambda)$ je funkce (14), kterou nahrazujeme aproximativními funkcemi.

Protože systém (13), resp. (20), lze řešit jako systém $n - 1$ rovnic o jedné neznámé (odst. 2), jest použití těchto metod výhodné tehdy, když systém (1) obsahuje velký počet rovnic, jejichž přímé řešení je obtížné.

V tomto článku nejsou zkoumány vlastnosti systému (1), při nichž je zaručena konvergence uvedených iteračních metod ani kritéria, která stanoví pořadí vypočtených vlastních čísel co do jejich velikosti.

Vzniknou-li pochybnosti o konvergenci iteračních metod, je třeba vlastní číslo určit metodou podanou v odst. 1. Přitom je výhodné použít přibližných rovnic funkce (7), které jsou odvozeny v odst. 6. Tyto přibližné rovnice lze libovolně zpřesnit, po případě jejich platnost rozšířit na větší okolí bodu $\lambda^{(k)}$ přidáním dalších členů v rovnicích (36), (37), (40) a (44).

Užití Taylorovy řady k rozvoji funkcí (34) je výhodné tehdy, je-li snadný výpočet derivací funkcí $a_{i,k}$ vyskytujících se v rovnicích (1), což je např. při výpočtu charakteristických čísel systému (11a) nebo rovnice (15).

Výpočet první a každé další derivace funkcí (34) v bodě $\lambda^{(k)}$ vyžaduje řešení systému $n - 1$ rovnic, který se liší od systému (8) jen jinou pravou stranou, odst. 5. Řešíme-li takové systémy např. metodou podanou v [8], vyplatí se určit i vyšší derivace funkcí (34), neboť výpočet jistých konstant, kterých se při řešení u této metody užívá, nezávisí na pravých stranách systému rovnic.

Dělením n rovnic systému (1) např. neznámou $x_n \neq 0$ dostaneme n transformovaných rovnic o n neznámých, které tvoří vlastní číslo λ_0 a $n - 1$ hodnot poměrů x_i/x_n, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. U metod, o nichž bylo zde pojednáno, byly poměry x_i/x_n považovány za funkce argumentu λ, které jsou jednoznačně určeny systémem $n - 1$ rovnic (8). Je však možné považovat za argumenty jak λ tak i poměry x_i/x_n, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, a hledat řešení n nelineárních rovnic

$$\psi_1\left(\lambda, \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0,$$

$$\psi_2\left(\lambda, \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n\left(\lambda, \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0,$$

při čemž funkce ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, n proměnných jsou určeny transformovanými levými stranami n rovnic systému (1). Tento systém nelineárních rovnic lze pak řešit metodami uvedenými např. v [7]. Použití těchto metod může být však vhodné jen v některých případech.

Literatura

[1] *Fiřt V.*: Výpočet vlastních čísel na základě transformace homogenního systému algebraických rovnic, Aplikace matematiky č. 2, 1961.

[2] *Koloušek V.*: Dynamika stavebních konstrukcí (I. část, 1954), (II. část, 1956), SNTL, Praha.

[3] *Смирнов А. Ф.*: Устойчивость и колебания сооружений, Трансжелдориздат, Москва, 1958.

[4] *Снитко Н. К.*: Устойчивость сжатых и сжато-узогнутых стержневых систем, Госстройиздат, Москва, 1956.

[5] *Тимошенко С. П.*: Устойчивость упругих систем (перевод с английского), Гостехтеоретиздат, Москва, 1955.

[6] *Фихтенгольц Г. М.*: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1, Гостехтеоретиздат, Москва, 1951.

[7] *Загускин В. Л.*: Справочник по численным методам решения уравнений, Физматгиз, Москва, 1960.

[8] *Babuška I.*: O jednom numerickém řešení úplně regulárních systémů lineárních rovnic a o jeho aplikaci na statické řešení patrových rámů, Časopis pro pěstování matematiky, č. 1, 1955.

[9] *Collatz L.*: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951.

Резюме

ВЗНОС К ИСЧИСЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ) ЧИСЕЛ

ВЛАДИМИР ФИРСТ (Vladimír Fiřt)

В этой работе излагаются четыре метода исчисления собственных (характеристических) чисел, основанные на преобразовании однородной системы n алгебраических уравнений (1).

По одному методу определяется собственное (характеристическое) число λ_0 как корень уравнения $A(\lambda) = 0$, где $A(\lambda)$ – функция, определенная уравнением (7), в которое подставляются вместо x_i/x_n, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, значения, определяемые путем решения системы $n - 1$ уравнений (8). Если система (1) имеет вид (12), то выгодно использовать уравнение $A_1(\lambda) = 0$, где $A_1(\lambda)$ – функция (14). При этом методе совсем не применяется условие (3). Главное преимущество метода заключается в возможности применять эффективные методы решения линейных алгебраических уравнений. Этот метод использован для определения первых четырех собственных частот одной рамной системы (рис. 1).

У остальных трех методов применяется итерационный процесс.

Первый из них, так называемый *нормальный итерационный метод*, заключается в том, что из системы (1) образуем „заменяющую систему“ в виде (12) путем пренебрежения некоторыми членами и, решая систему (13) с коэффициен-

тами $a_{i,k} = f_{i,k}({}^{(0)}\lambda_0)$, где ${}^{(0)}\lambda_0$ — собственное число „заменяющей системы“ (12), определяем отношения ${}^{(0)}(x_i/x_1)$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Первым приближением собственного числа λ_0 системы (1) является собственное число ${}^{(1)}\lambda_0$ системы, которую образует $n - 1$ уравнений (20) и уравнение $A_1(\lambda) = 0$. Вообще m-ое приближение числа λ_0 является собственным числом ${}^{(m)}\lambda_0$ системы, которую образует уравнение $A_1(\lambda) = 0$ и $n - 1$ уравнений (20), в которых заменим значения ${}^{(0)}(x_i/x_1)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, значениями ${}^{(m-1)}(x_i/x_1)$, соответствующими $(m - 1)$-ому приближению ${}^{(m-1)}\lambda_0$ числа λ_0.

Второй из этих методов, так называемый *двукратный итерационный метод*, является комбинацией метода, описанного в п. 2, нормального итерационного метода и метода итераций, предложенного автором в работе [1]. Он заключается в том, что собственное число „заменяющей системы“ (12) определяем способом, приведенным в п. 2, и при каждом шаге нормального итерационного метода применяем метод, изложенный в [1].

Третий из этих методов, так называемый *трехкратный итерационный метод*, заключается в том, что применяем метод итераций из [1] как при решении „заменяющей системы“ (12), так и при каждом шаге нормального итерационного метода — определяем приближения приближений собственного (характеристического) числа. С помощью трехкратного итерационного метода решен один численный пример. В этом примере была сходимость настолько быстрой, что надо было осуществить только два шага итерационного процесса, чтобы достичь удовлетворительной точности результата (п. 4).

При применении описанных итерационных методов находим корни уравнения $A_1(\lambda) = 0$ и решаем вместо системы (8) систему уравнений в виде (13) или (20), которую можно решать как систему $n - 1$ уравнений с одним неизвестным. Условия, при котороых итерационные процессы сходятся, здесь не исследуются.

В последних двух параграфах этой статьи приведено точное и приближенное исчисление первой производной функции (7), и выведены четыре приближенных уравнения этой функции в окрестности точки $\lambda^{(k)}$.

Summary

A CONTRIBUTION TO THE DETERMINING OF CHARACTERISTIC ROOTS

VLADIMÍR FIŘT

Four methods are presented of determining characteristic roots, based on transformations of the homogeneous system of n linear equations (1).

In the first method, the characteristic root λ_0 is obtained as the root of the equation $A(\lambda) = 0$, where the function $A(\lambda)$ is defined by equation (7), and where x_i/x_n, $i = 1$,

$2, \ldots, n-1$, are to be replaced by the solution of the system of $(n-1)$ equations (8). If the system (1) has the form of (12), it is useful to use the equation $A_1(\lambda) = 0$, where the function $A_1(\lambda)$ is determined by (14). This method makes no use of the condition (3). Its main advantage is in the possibility of applying effective methods of solution of linear equations. The method was used in determining the first four characteristic frequencies of a certain framework (see fig. 1).

The remaining three methods are iterative.

The first of these — the so-called *normal iteration* — may be described as follows. From the system (1), an auxiliary system (12) is formed by ignoring certain terms; the values ${}^{(0)}(x_i/x_1)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ are then determined by solving the system (13) with coefficients $a_{i,k} = f_{i,k}{}^{(0)}(\lambda_0)$, where ${}^{(0)}\lambda_0$ is a characteristic root of the auxiliary system (12). The first approximation ${}^{(0)}\lambda_0$ of the characteristic root λ_0 of (1) is then the characteristic root of the system composed of the $n-1$ equations (20) and of the equation $A_1(\lambda) = 0$. More generally, the m-th approximation ${}^{(0)}\lambda_0$ of the characteristic root λ_0 is the characteristic root of the system composed of the equation $A_1(\lambda) = 0$ and of the $n-1$ equations (20), where the values ${}^{(0)}(x_i/x_1)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ are replaced by the values ${}^{(m-1)}(x_i/x_1)$ corresponding to the $(m-1)$-st approximation ${}^{(m-1)}\lambda_0$.

The second method, the so-called *double iteration*, is a combination of the method described in section 2 with normal iteration and with the iterative method described in the author's paper [1]. In this method, the characteristic root of the auxiliary system is determined as in section 2, and in each step of the normal iteration use is made of the method described in [1].

The third of these methods, the so-called *treble iteration*, applies the method of [1] both to solving the auxiliary system and in each step of the normal iteration; in other words, approximations of approximations of characteristic root are formed. Using this method in a numerical example, only two iterative steps were enough to obtain sufficient precision of the results (section 4).

In the described iterative methods, the roots of $A_1(\lambda) = 0$ are sought for, and instead of (8), the systems (13) and (20) respectively, are solved; these may be solved as a system of $n-1$ equations in one unknown. Conditions of convergence of these methods are not examined.

In the two concluding sections, an exact and an approximate calculation of the first derivative of the function (7) is given, together with four approximate equations for this function in the neighbourhood of the point $\lambda^{(k)}$.

Adresa autora: Ing. *Vladimír Fiřt*, Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Praha 6, Šolínova 7.