DAS ZWEITE PROBLEM DER EBENEN ELASTIZITÄTSTHEORIE FÜR INKOMPRESSIBLE KÖRPER

JAROSLAV FUKA

(Eingegangen am 7. Februar 1961.)

In dieser Arbeit wird das zweite Problem der ebenen Elastizitätstheorie für inkompressible Körper formuliert und die Existenz der Lösung und im gewissen Sinne die stetige Abhängigkeit der Lösung dieses Problems von der Poissonschen Konstante für $\sigma \to \frac{1}{2}$ bewiesen.

Den Problemen der ebenen Elastizitätstheorie für inkompressible Körper ist, soweit es dem Verfasser bekannt ist, nur die Arbeit [1] gewidmet; es ist dort das Hookesche Gesetz für inkompressible Körper formuliert und es ist angedeutet, wie man auch in diesem Fall zur Lösung des Systems von Partialdifferentialgleichungen der ebenen Elastizitätstheorie die Methode der Airyschen Funktion benützen kann.

In dieser Arbeit wird das zweite Problem der ebenen Elastizitätstheorie für inkompressible Körper formuliert und die Existenz und im gewissen Sinne die stetige Abhängigkeit der Lösung von der Poissonschen Materialkonstante für $\sigma \to \frac{1}{2}$ bewiesen.

Wie bekannt, mathematisch formuliert führen die ebenen Elastizitätsprobleme für homogene, isotrope, deformierbare Körper auf die Lösung des Systems

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0\,,$$

$$\Delta(X_x + Y_y) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) = X_n(s)\,,$$
$$X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) = Y_n(s)$$

im Falle des ersten und mit den Randbedingungen

$$u = U(s)\,, \quad v = V(s)$$

im Falle des zweiten Problems. Hier sind $U(s)$, $V(s)$ gegebene stetige Funktionen der Bogenlänge, $X_n(s)$, $Y_n(s)$ gegebene stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge, X_x, X_y, Y_y die Komponenten des Spannungstensors, u, v die Komponenten des Verschiebungsvektors. Weiter wird vorausgesetzt, dass der Körper T ein $(m + 1)$-fach zusammenhängendes Gebiet ist, dessen Grenze $c = c_0 \cup c_1 \cup \ldots \cup c_m$ durch dreimal stetig nach der Bogenlänge differenzierbare Jordansche Kurven gebildet ist; n ist die Aussennormale, X_x, X_y, Y_y sollen in $T \cup c$ stetig sein.

Zum System (1) muss man das Hookesche Gesetz beifügen, das die Beziehung zwischen den Komponenten des Spannungs- und Deformationstensor (das heisst den Ableitungen der Verschiebungen) ausdrückt und in dem die physikalischen Eigenschaften des Materials auftreten:

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1+\sigma}{E}\left[X_x - \sigma(X_x + Y_y)\right], \\
e_{yy} &= \frac{1+\sigma}{E}\left[Y_y - \sigma(X_x + Y_y)\right], \\
e_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E} X_y .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

E ist der Elastizitätsmodul, σ die Poissonsche Konstante. Für deformierbare Körper gilt $\sigma < \frac{1}{2}$. Für $\sigma = \frac{1}{2}$, was die Inkompressibilität des Körpers bedeutet, ist die Beziehung zwischen den Spannungen und Deformationen nicht mehr eineindeutig, denn aus (2) bekommen wir

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{3}{4E}(X_x - Y_y) = -\,e_{yy}, \\
e_{xy} &= \frac{3}{2E} X_y .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Wir werden uns nicht mit der physikalischen Begründung dieser Form des Hookeschen Gesetzes beschäftigen, sie ist zum Beispiel in [1] enthalten. Wir bemerken nur, dass aus (3) $e_{xx} + e_{yy} = 0$ folgt, was bedeutet, dass die relative Veränderung des Flächeninhalts eines genügend kleinen Rechtecks nach der Deformation gleich Null ist.

Im weiteren werden wir uns mit den Elastizitätsproblemen befassen, wobei wir voraussetzen, dass das Hookesche Gesetz in der Form (3) gilt.

Bevor wir zum Existenzbeweis herantreten, formulieren und beweisen wir den Eindeutigkeitssatz

Satz 1. *Es seien X_x, X_y, Y_y die Lösungen des ersten oder zweiten Elastizitätsproblems in dem Körper T mit der Grenze $c = c_0 \cup c_1 \cup \ldots \cup c_m$. Dann ist X_y eindeutig bestimmt; die Komponenten X_x und Y_y sind im Falle des ersten Problems eindeutig, im Falle des zweiten Problems nur bis auf dieselbe aditive Konstante bestimmt.*

Beweis. Es ist klar, das das Integral

$$I = \int_c (X_n U + Y_n V)\, \mathrm{d}s$$

existiert. Mit Hilfe des Greenschen Satzes und der ersten und zweiten Gleichung aus (1) bekommen wir

$$I = \iint_T \left[X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Nach dem Hookeschen Gesetz (3) folgt daraus

$$I = \frac{3}{4E} \iint_T [(X_x - Y_y)^2 + X_y^2]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{4}$$

Wenn jetzt $X_n = 0$, $Y_n = 0$ oder $U = 0$, $V = 0$ auf c ist, dann ist $I = 0$ und aus (4) haben wir $X_x = Y_y$, $X_y = 0$. Das setzen wir in (1) ein un bekommen $\partial X_x/\partial x = \partial Y_y/\partial y = 0$, also $X_x = Y_y =$ konst in T. Wegen der Stetigkeit von X_x, Y_y in $T \cup c$ gilt dasselbe auch auf c. Ist nun das zweite Problem vorhanden, so kann man nichts mehr beweisen. Im Falle des ersten Problems folgt aus $X_n = Y_n = 0$ und $X_y = 0$ noch $X_x = Y_y = 0$, denn $\cos(n, x)$ und $\cos(n, y)$ sind nicht gleichzeitig Null, was zu beweisen war.

Physikalisch ist der zweite Teil der Behauptung des Satzes 1 begreiflich, denn die Konstante drückt die Belastung vom hydrostatischen Druck aus, die den Flächeninhalt eines inkompressiblen Körpers natürlich nicht ändern kann. Nach dem Eindeutigkeitssatz kann man erwarten, dass man im Falle des ersten Problems dasselbe Verfahren wie für $\sigma < \frac{1}{2}$ benützen kann. Davon kann man sich leicht überzeugen und darum werden wir uns nur mit dem zweiten Problem beschäftigen. Die Lösung des zweiten Problems führt man wie üblich mit Hilfe der Formel von Goursat auf eine Randwertaufgabe für zwei analytische Funktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ über. Es gilt dann in jedem Punkt aus T

$$\frac{2E}{3} (u + iv) = \varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi}\,,$$

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{m} A_i \lg(z - z_i)\,, \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{m} \overline{A}_i \lg(z - z_i)\,,$$

$$\tfrac{1}{2}(Y_y - X_x) + iX_y = \bar{z}\varphi'' + \psi'\,, \quad 4 \operatorname{Re} \varphi' = X_x + Y_y\,.$$

$\varphi_0(z)$ und $\psi_0(z)$ sind in T holomorph und A_i sind die Hauptvektoren auf c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ (siehe [2a], Seite 74 und 118, [2b], Seite 60 und 98, 99). Wir können dann das zweite Problem für inkompressible Körper so formulieren:

Definition. *Es sei am Rande $c = c_0 \cup c_1 \cup \ldots \cup c_m$ von T eine komplexe Funktion $g(t)$, die zwei stetige Ableitungen nach t besitzt, definiert. Man soll die in T holo-*

morphen Funktionen $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ *und komplexen Konstanten* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *so bestimmen, dass sie folgenden Bedingungen genügen*: $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $\varphi_0'(z)$ *und* $G_0(z) = \varphi_0(z) - z\,\overline{\varphi_0'(z)} - \overline{\psi_0(z)}$ *sind in* $T \cup c$ *stetig und auf* c *gilt*

$$G_0(z) = g(z) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{m} A_i \lg |z - z_i|^2 - \frac{z}{4\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{A}_i}{\bar{z} - \bar{z}_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

wo z_i *ein fest gewählter Punkt im Innern von* c_i *ist.*

Bemerkung 1. Aus der Definition folgt, dass es im Falle des einfachzusammenhängenden Körpers (also $m = 0$) in formaler Hinsicht kein Unterschied zwischen dem zweiten Problem für $\sigma = \frac{1}{2}$ und dem ersten Problem für $\sigma < \frac{1}{2}$ gibt, denn durch die Substitution $\varphi = i\tilde{\varphi}$, $\psi = i\tilde{\psi}$ führen wir offenbar das zweite Problem für $\sigma = \frac{1}{2}$ auf das erste Problem für $\sigma < \frac{1}{2}$ über.

Bemerkung 2. Der Eindeutigkeitssatz, wie man sich leicht überzeugen kann, behauptet, dass die Funktion $\varphi'(z)$ nur bis auf eine reele additive Konstante bestimmt, die Funktion $\psi(z)$ bis auf eine komplexe Konstante bestimmt ist.

Diese zwei Bemerkungen zeigen, dass das zweite Problem für inkompressible Körper analog dem ersten Problem für $\sigma < \frac{1}{2}$ zu behandeln ist. Deshalb kann man erwarten, dass die Randbedingung $g(t)$ eine gewisse Nebenbedingung erfüllen müssen wird, damit die Lösung existiere, so wie im Falle des ersten Problems die Randbedingung die Gleichgewichtsbedingung für die Momente erfüllen muss. Und wirklich können wir den Existenzsatz beweisen:

Satz 2. *Es sei im Körper T das zweite Problem der Elastizitätstheorie gegeben. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösung dieses Problems lautet*:

$$\mathrm{Im} \int_c \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t = 0\,. \tag{5}$$

Die Funktionen $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ *sind durch die Beziehungen*

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(t)\, \mathrm{d}t}{t - z} + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{z - z_i}, \tag{6}$$

$$\psi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\overline{\omega(t)}\, \mathrm{d}t}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(t)\, \mathrm{d}\bar{t}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\bar{t}\, \omega(t)\, \mathrm{d}t}{(t - z)^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{z - z_i},$$

gegeben, wo z_i *beliebige aber fest gewählte Punkte im Innern von* c_i *sind,*

$$b_i = \int_{c_i} \left(\omega(t)\, \mathrm{d}\bar{t} - \overline{\omega(t)}\, \mathrm{d}t\right). \tag{7}$$

Die Konstanten A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ *sind durch die Relationen*

$$A_i = -\int_{c_i} \omega(t)\, |\mathrm{d}t| \tag{8}$$

bestimmt.

Die Funktion $\omega(t)$ erfüllt die Gleichung

$$\omega(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_c \omega(t)\,\vartheta'(t_0, t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_c \overline{\omega(t)}\,e^{2i\vartheta(t_0,t)}\,\vartheta'(t_0, t)\,\mathrm{d}t + \tag{9}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\frac{1}{t_0 - z_i} + \frac{1}{\overline{t_0 - z_i}} - \frac{t_0}{\overline{(t_0 - z_i)^2}}\right) -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} A_i \lg(|t_0 - z_i|^2 + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\bar{A}_i t_0}{\overline{t_0 - z_i}} = g(t_0)\,,$$

wo $\vartheta(t_0, t) = \arg(t - t_0)$ *ist.*

Wenn (5) *gilt, so hat die Gleichung* (9) *eine und nur eine Lösung.*

Bemerkung 3. Die physikalische Bedeutung der Bedingung (5) lautet: der Flächeninhalt des Körpers T wird durch die Deformation nicht geändert, was mit der Inkompressibilität des Körpers T übereinstimmt.

Bemerkung 4. Der Beweis des Satzes 2 verläuft ähnlich wie der Beweis des Satzes 3.3.1 aus [2a] bzw. [2b], Seite 219 bzw. 187. Wir werden ihn also andeuten und nur notwendige Modifikationen durchführen. Wir zeigen zuerst, dass die Bedingung (5) notwendig für die Existenz der Lösung der Gleichung (9) ist. Es sei also $\omega(t)$ die Lösung der Gleichung (9). Dann sind die Funktionen $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ und die Konstanten A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ festgesetzt, $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sind holomorph in T und stetig in $T \cup c$. Es sei $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_m$ eine beliebige glatte Kurve, die so beschaffen ist, dass γ_0 im Innern von c_0 enthalten ist und γ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ im Innern von γ_0 liegen, dass γ_i im Innern die Kurve c_i enthält und dass endlich $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt. Durch die Integration per partes bekommen wir

$$\int_\gamma \overline{\varphi_0(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_\gamma \overline{\varphi_0'(t)}\,\mathrm{d}t$$

und nach dem Cauchyschen Satz

$$\int_\gamma \psi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Also gilt

$$\operatorname{Im}\int_\gamma (\overline{\varphi_0(t)} - \bar{t}\,\varphi_0'(t) - \psi_0(t))\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\int_\gamma (-\bar{t}\,\varphi_0'(t)\,\mathrm{d}t - t\,\overline{\varphi_0'(t)}\,\mathrm{d}\bar{t}) = 0\,. \tag{10}$$

Es sei weiter R ein beliebiges Rechteck, das mit seiner Grenze $\Gamma(R)$ in T liegt. Dann ist $z_i \notin \bar{R}$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ und in R existiert also ein eindeutiger Zweig der Funktion

$$V(z) = \operatorname{Im}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\bar{A}_i}{4\pi}\,z \lg|z - z_i|^2 + \frac{A_i}{4\pi}\,(\overline{z - z_i}) + \frac{A_i \bar{z}_i}{4\pi}\lg(\overline{z - z_i})\right].$$

Es gilt also

$$\int_{\Gamma(R)} \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Man kann aber leicht zeigen, dass

$$\int_{\Gamma(R)} \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \operatorname{Im} \int_{\Gamma(R)} \overline{\left(\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} A_i \lg |z - z_i|^2 - \frac{z}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{A}_i}{z - z_i}\right)}\,\mathrm{d}z \text{ ist}.$$

Nach dem Satz 17, Seite 117 aus [3] gilt also

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} \overline{\left(\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} A_i \lg |z - z_i|^2 - \frac{z}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{A}_i}{z - z_i}\right)}\,\mathrm{d}z = 0\,. \tag{11}$$

Durch Grenzübergang $\gamma \to c$ bekommen wir aus (10) und (11)

$$\operatorname{Im} \int_{c} \overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im} \int_{c} \Bigg(\overline{\varphi_0(t)} - \bar{t}\,\varphi_0'(t) - \psi_0(t) - $$

$$- \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} \bar{A}_i \lg |t - z_i|^2 + \frac{\bar{t}}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{t - z_i}\Bigg)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

was zu beweisen war.

Wir werden jetzt statt der Gleichung (9) die Gleichung

$$\omega(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_{c} \omega(t)\,\vartheta'(t_0, t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{c} \overline{\omega(t)}\,e^{2i\vartheta(t_0,t)}\,\vartheta'(t_0, t)\,\mathrm{d}t + \tag{9*}$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\frac{1}{t_0 - z_i} + \frac{1}{\bar{t}_0 - \bar{z}_i} - \frac{\bar{t}_0}{(\bar{t}_0 - \bar{z}_i)^2}\right) - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} A_i \lg |t_0 - z_i|^2 +$$

$$+ \frac{t_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{A}_i}{\bar{t}_0 - \bar{z}_i} = g(t_0)\,, \quad b_0 = 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{\omega(t)\,\mathrm{d}t}{t^2}\right)$$

untersuchen. Die Tatsache, dass die Bedingung (5) auch hinreichend für die Existenz der Lösung der Gleichung (9) ist, folgt aus folgenden zwei Behauptungen:

1. Ist die Bedingung (5) erfüllt, so ist die Lösung der Gleichung (9*) gleichzeitig die Lösung der Gleichung (9).

2. Die Lösung der Gleichung (9*) existiert für jede Funktion aus $L^2(c)$.

Den Beweis dieser Behauptungen führt man wie in [2a], Seite 214–219 bzw. [2b] Seite 183–187 durch. Beim Beweis von 1. muss man dieselben Schwierigkeiten überwinden, die schon beim Beweis der Notwendigkeit entstanden sind. Aus der Voraussetzung, dass $g(t)$ zwei stetige Ableitungen nach t hat, folgt endlich in derselben Weise wie in [2a] bzw. [2b], dass $\omega(t)$ zweimal stetig differenzierbar ist; aus der Eigenschaft des Integrals vom Cauchyschen Typus (6) folgt nun, dass $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $\varphi_0'(z)$, $G_0(z)$ in $T \cup c$ stetig sind, womit der Beweis beendet ist.

Aus der Bemerkung 2 folgt, dass für $\sigma = \frac{1}{2}$ die Summe der Spannungen $X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z)$ bis auf eine Konstante festgesetzt ist. Kann man diese Konstante (und damit den hydrostatischen Druck) so bestimmen, dass die Spannung, welche der Lösung des zweiten Problems für $\sigma = \frac{1}{2}$ entspricht, die Limes der entsprechenden Spannungen bei derselben Randbedingung für $\sigma < \frac{1}{2}$ (das heisst $\kappa \to 1$, $\kappa = 3 - 4\sigma$) ist? Aus physikalischen Gründen kann man eine positive Antwort erwarten, denn die Körper, für welche σ wenig von $\frac{1}{2}$ abweicht, sich annähernd wie inkompressible Körper verhalten. Es gilt der Satz

Satz 3. *Es sei $g(t)$ eine komplexe Funktion, welche am Rande c von T definiert ist und dort zwei stetige Ableitungen nach der Bogenlänge besitzt. Es sei die Bedingung (5) erfüllt. Es sei $\kappa \geqq 1$. Es seien $\varphi_\kappa(z)$, $\psi_\kappa(z)$ analytische (also im allgemeinen mehrdeutige) Funktionen in T, so dass $\varphi'_\kappa(z)$ holomorph in T und stetig in $T \cup c$ ist, dass $G_\kappa(z) = \kappa\, \varphi_\kappa(z) - z\, \overline{\varphi'_\kappa(z)} - \overline{\psi_\kappa(z)}$ eindeutig und stetig in $T \cup c$ ist und dass endlich auf c*

$$G_\kappa(t) = g(t) \tag{12}$$

gilt. Dann existiert eine reele Konstante d, so dass

$$\|\varphi'_\kappa(z) - (\varphi'_1(z) + d)\| \to 0$$

für $\kappa \to 1$ [1] *gilt, wo*

$$\|f(z)\| = \max_{z \in T \cup c} |f(z)|$$

ist.

Beweis. S. G. Michlin hat in der Arbeit (4) die Muskhelishvilische Integralgleichung für die Funktion $\varphi'_\kappa(z)$ auf mehrfachzusammenhängende Gebiete verallgemeinert und folgende zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1. Sind $\varphi_\kappa(z)$, $\psi_\kappa(z)$, $\varphi'_\kappa(z)$ die den Voraussetzungen des Satzes 3 genügende Funktionen, so gilt:

Die Funktion $\varphi'_\kappa(z)$ erfüllt die Gleichung

$$f_\kappa(t) - \frac{1}{\kappa} \int_c K(t, \tau) \overline{f_\kappa(\tau)}\, |\mathrm{d}\tau| - \frac{1}{2\kappa} \overline{f_\kappa(a)} = \frac{1}{\kappa} H[g(\tau)]\,, \tag{13}$$

wo $t \in c$ ist.

Der Kern $K(z, \tau)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Er ist definiert und stetig für $z \in T \cup c$, $\tau \in c$.
b) Ist die Funktion $f(\tau)$ stetig auf c, so ist die Funktion

$$F(z) = \int_c K(z, \tau) f(\tau)\, |\mathrm{d}\tau|$$

[1] $\varphi_1(z)$ bezeichnet $\varphi_\kappa(z)$ für $\kappa = 1$. In gleicher Weise $\psi_1(z)$ und $\varphi'_1(z)$.

holomorph in T und stetig in $T \cup c$.

c) $$\int_c K(t, \tau)\,|d\tau| = \tfrac{1}{2}, \quad t \in c .$$

H ist ein Operator, der der Funktion $g(\tau)$ mit zwei stetigen Ableitungen auf c eine Funktion $h(z)$, welche in $T \cup c$ stetig und in T holomorph ist, zuordnet. Das Symbol $H[g(\tau)]$ soll den Wert der Funktion $h(z)$ in den Punkten $t \in c$ bezeichnen, das heisst $H[g(\tau)] = h(t)$. Weiter gilt

(14) $$H[k\tau] = k ,$$

wo k eine komplexe Konstante ist.[2])

Behauptung 2. Es sei $f_\kappa(z)$ eine in $T \cup c$ stetige und in T holomorphe Funktion, welche der Gleichung (13) für die gegebene Funktion $g(\tau)$ genügt. Dann existieren die Funktionen $\varphi_\kappa(z)$, $\psi_\kappa(z)$, $\varphi'_\kappa(z)$, welche die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllen, so dass $\varphi'_\kappa(z) = f_\kappa(z)$ ist.

Bemerkung 5. Es seien $\varphi_\kappa(z)$, $\psi_\kappa(z)$, $\varphi'_\kappa(z)$ die Funktionen, welche die Voraussetzungen des Satzes 3 efüllen. Wir definieren die Funktion $\vartheta_\kappa(z)$ durch die Formel

(15) $$\varphi'_\kappa(z) = \vartheta_\kappa(z) + l_\kappa ,$$

wo

(16) $$l_\kappa - \frac{1}{2\kappa}\, \bar{l}_\kappa = \frac{1}{2\kappa}\, \overline{\varphi'_\kappa(a)} \quad \text{ist.}$$

Aus der Eigenschaft c) des Kernes $K(z, \tau)$ folgt leicht, dass die Funktion $\vartheta_\kappa(t)$ auf c der Gleichung

(17) $$\vartheta_\kappa(t) - \frac{1}{\kappa}\int_c K(t, \tau)\,\overline{\vartheta_\kappa(\tau)}\,|d\tau| = \frac{1}{\kappa}\, H[g(\tau)]$$

genügt. Aus (15) und (16) folgt dann, dass

(18) $$\kappa l_\kappa - \bar{l}_\kappa = \tfrac{1}{2}\overline{\vartheta_\kappa(a)}$$

gilt.

Bemerkung 6. Es sei umgekehrt $\vartheta_\kappa(t)$ eine auf c stetige Eunktion, die der Gleichung (17) genügt. Wir definieren in T die Funktion $\vartheta_\kappa(z)$ durch die Formel

$$\vartheta_\kappa(z) = \frac{1}{\kappa}\int_c K(z, \tau)\,\overline{\vartheta_\kappa(\tau)}\,|d\tau| + \frac{1}{\kappa}\, h(z) ,$$

wo

$$h(z) = Hg .$$

Aus der Eigenschaft b) dns Kernes $K(z, \tau)$, aus der Eigenschaft des Operatoren H und aus (17) folgt dann augenblicklich, dass $\vartheta_\kappa(z)$ holomorph in T und stetig in

[2]) Also besonders $H[0] = 0$.

$T \cup c$ ist. Nach dem Maximumprinzip für Holomorphe Funktionen ist $\vartheta_\kappa(z)$ die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft.

Bemerkung 7. Es sei $\vartheta_\kappa(z)$ holomorph in T und stetig in $T \cup c$. Es sei vorausgesetzt, dass für $\kappa = 1$ Re $\vartheta_\kappa(a) = 0$ gilt. Wenn wir nun l_κ für $\kappa > 1$ bzw. Im l_1 für $\kappa = 1$ mittels der Beziehung (18) (wir sollen uns stets bewusst sein, dass (18) für $\kappa = 1$ von der Form $l_1 - \bar{l}_1 = \frac{1}{2}\vartheta_1(a)$ ist, und diese Gleichung hat eine Lösung dann und nur dann, wenn Re $\vartheta_1(a) = 0$ ist) und die Funktion $\varphi'_\kappa(z)$ mittels der Beziehung (15) definieren, dann ist die Gleichung (16) erfüllt und aus der Eigenschaft c) des Kernes $K(z, \tau)$ folgt, dass die Funktion $\varphi'_\kappa(z)$ auf c der Gleichung (13) genügt.

Weiter werden wir uns mit der Gleichung (17) beschäftigen. Wir werden zeigen, dass sie für jede rechte Seite eine und nur eine Lösung hat, was beim Beweis der Behauptung 4 wesentlich sein wird, welche die entscheidende Rolle beim Beweis des Satzes 3 spielt.

Bezeichnen wir mit C den Raum der stetigen komplexen Funktionen, die auf c definiert sind und definieren in üblicher Weise

$$\|f\| = \max_{t \in c} |f(z)| .$$

C ist offenbar ein normierter linearer Raum über dem Körper der reelen Zahlen und in üblicher Weise kann man zeigen, dass er vollständig ist.

Es sei $f \in C$. Bezeichnen wir

$$B_\kappa f = \frac{1}{\kappa} \int_c K(t, \tau) \overline{f(\tau)} \, |d\tau| , \quad \bar{B}_\kappa f = \frac{1}{\kappa} \int_c \overline{K(t, \tau)} f(\tau) \, |d\tau| .$$

B_κ und $\bar{B}_\kappa$ sind offenbar additive und homogene Operatoren in C. Weil die Funktion $K(t, \tau)$ nach der Eigenschaft a) des Kernes stetig auf c ist, beweist man wie im reelen Falle, dass der Operator $\bar{B}_\kappa f$ totalstetig ist (siehe zum Beispiel (5), Seite 214). Weil aber $\overline{\bar{B}_\kappa f} = B_\kappa f$ gilt, ist auch $B_\kappa f$ ein totalstetiger Operator. Es gilt nun folgendes Lemma (siehe zum Beispiel [6], Seite 216)

Lemma 1. *Es sei I der identische Operator, B ein totalstetiger Operator, der C in sich abbildet. Die Gleichung $(I + B) f = 0$ besitze nur die Lösung $f = 0$. Dann gilt:*

a) *$I + B$ ist eine eineindeutige Abbildung von C auf C,*

b) *die inverse Abbildung $(I + B)^{-1}$ ist stetig.*

Lemma 2. *Es sei $\kappa = 1$. Sei $\vartheta_1(z)$ eine in $T \cup c$ stetige und in T holomorphe Funktion, welche auf c der Gleichung* (17) *für $\kappa = 1$ genügt. Es sei die Bedingung* (5) *erfüllt. Dann ist* Re $\vartheta_1(a) = 0$.

Beweis: Wir werden solche den Voraussetzungen des Satzes 3 genügende Funktionen $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, $\varphi'_1(z)$ suchen, dass für sie die Funktion $G_1(z) = \varphi_1(z) - z\,\overline{\varphi'_1(z)} - \overline{\psi_1(z)}$ die Bedingung $G_1(t) = g(t) - \frac{1}{2}\overline{\vartheta_1(a)}\, t$ auf c erfüllt. Wenn solche Funktionen existieren, dann genügt wegen (14) und nach der Behauptung 1 die Funktion $\varphi_1'(z)$ der Gleichung

$$f_1(t) - \int_c K(t, \tau)\overline{f_1(\tau)}\,|d\tau| - \tfrac{1}{2}\overline{f_1(a)} = H[g(\tau)] - \tfrac{1}{2}\overline{\vartheta_1(a)}\,.$$

Aber dieser Gleichung genügt offenbar die Funktion $\vartheta_1(z)$, denn es gilt (17). Nach der Behauptung 2 existieren also die gesuchten Funktionen und es gilt $\varphi_1'(z) = \vartheta_1(z)$. Nun beweist man wie im Beweis des Satzes 3, dass

$$\operatorname{Im}\int_c \overline{G_1(t)}\,dt = 0 \tag{19}$$

gilt. Aus (5) und (19) folgt nun

$$0 = \operatorname{Im}\int_c \overline{G_1(t)}\,dt = \operatorname{Im}\int_c \left(\overline{g(t)} - \tfrac{1}{2}\vartheta_1(a)\,\bar{t}\right)dt = \operatorname{Im}\left[-\frac{1}{2}\,\vartheta_1(a)\int_c \bar{t}\,dt\right].$$

Weil

$$\int_c \bar{t}\,dt = i\int_c (-\,y\,dx + x\,dy) = 2iP\,,$$

wo $P \neq 0$ der Flächeninhalt von T ist, ist $\operatorname{Re}\vartheta_1(a) = 0$, was zu beweisen war.

Lemma 3. *Es sei $\vartheta_\kappa(t)$ die Lösung der Gleichung*

$$\vartheta_\kappa(t) - \frac{1}{\kappa}\int_c K(t, \tau)\,\overline{\vartheta_\kappa(\tau)}\,|d\tau| = 0 \tag{20}$$

im Raume C. Dann ist $\vartheta_\kappa(t) \doteq 0$.

Beweis. Weil $H(0) = 0$, genügt $\vartheta_\kappa(t)$ der Gleichung (17), wo $g(t) = 0$ ist. Nach der Bemerkung 6 kann $\vartheta_\kappa(t)$ nach T in eindeutiger Weise so fortgesetzt werden, dass $\vartheta_\kappa(z)$ in $T \cup c$ stetig und in T holomorph sein wird. Weil die Funktion $g(t) = 0$ die Bedingung (5) erfüllt, ist $\operatorname{Re}\vartheta_1(a) = 0$ nach dem Lemma 2. Nach der Bemerkung 7 kann man also (auch für $\kappa = 1$) mit Hilfe von (18) und (15) eine in $T \cup c$ stetige und in T holomorphe Funktion konstruieren, die der Gleichung (13), auf deren rechten Seite eine Null steht, genügt. Nach der Behauptung 2 kann man also die die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllenden Funktionen $\varphi_\kappa(z)$, $\psi_\kappa(z)$, $\varphi_\kappa'(z)$ konstruieren, wobei $\varphi_\kappa'(z) = f_\kappa'(z)$ gilt. Besonders also gilt $G_\kappa(t) = 0$ auf c. Nach dem Eindeutigkeitssatze für das zweite Problem der Elastizitätstheorie (siehe [2a], Satz 3.2.2, Seite 208, bzw. [2b] Seite 178 für $\kappa > 1$, die Bemerkung 2 für $\kappa = 1$) gilt also $\varphi_\kappa'(z) = 0$ für $\kappa > 1$, $\varphi_\kappa'(z) = d$ für $\kappa = 1$, wo d eine reele Konstante ist. Wenn wir $\vartheta_\kappa(a)$ aus (15) und (18) ausschliessen, bekommen wir $l_\kappa = 0$ für $\kappa > 1$, $l_1 = d$ für $\kappa = 1$. Aus (15) folgt dann in beiden Fällen, dass $\vartheta_\kappa(t) = 0$ ist.

Als unmittelbare Konsequenz von Lemma 1 und 3 gilt

Behauptung 3. Die Gleichung (17) hat im Raume C eine und nur eine Lösung für jede rechte Seite und der Operator $(I + B_\kappa)^{-1}$ ist stetig.

Im weiteren werden wir noch folgendes Lemma brauchen:

Lemma 4. *Es sei C ein normierter linearer Raum über dem Körper der reelen Zahlen. Es seien B_λ, B_{λ_0} stetige lineare Operatoren von C in sich; es sei λ ein reeler Parameter, $\lambda \to \lambda_0$. Es seien $g_\lambda \in C$ gegebene Funktionen. Es soll $\|g_\lambda - g_{\lambda_0}\| \to 0$, $\|B_\lambda - B_{\lambda_0}\| \to 0$ für $\lambda \to \lambda_0$ gelten. Es seien f_λ, f_{λ_0} Funktionen mit der Eigenschaft $B_\lambda f_\lambda = g_\lambda$, $B_{\lambda_0} f_{\lambda_0} = g_{\lambda_0}$. Es existiere ein stetiger inverser Operator $B_{\lambda_0}^{-1}$. Dann gilt $\|f_\lambda - f_{\lambda_0}\| \to 0$ für $\lambda \to \lambda_0$.*

Beweis. Nach der Voraussetzung gilt

$$(B_\lambda - B_{\lambda_0})(f_\lambda - f_{\lambda_0} + f_{\lambda_0}) + B_{\lambda_0}(f_\lambda - f_{\lambda_0}) = g_\lambda - g_{\lambda_0},$$

woraus

$$B_{\lambda_0}^{-1}[B_{\lambda_0}(f_\lambda - f_{\lambda_0})] = B_{\lambda_0}^{-1}[(g_\lambda - g_{\lambda_0}) - (B_\lambda - B_{\lambda_0})(f_\lambda - f_{\lambda_0} + f_{\lambda_0})]$$

ist und so

$$\|f_\lambda - f_{\lambda_0}\| \leqq \|B_{\lambda_0}^{-1}\| \left[\|g_\lambda - g_{\lambda_0}\| + \|B_\lambda - B_{\lambda_0}\| \left(\|f_\lambda - f_{\lambda_0}\| + \|f_{\lambda_0}\|\right)\right],$$

wovon $\|f_\lambda - f_{\lambda_0}\| \to 0$ für $\lambda \to \lambda_0$, was zu beweisen war.

Es sei eine feste die Bedingung (5) erfüllende Funktion $g(t)$ gegeben. Wir können uns dann leicht überzeugen, dass die rechten Seiten der Gleichungen (17) und die Lösungen dieser Gleichungen wegen der Behauptung 3 alle Voraussetzungen des Lemma 4 erfüllen. Es gilt also

Behauptung 4. Es sei $\vartheta_\kappa(t)$ eine stetige Lösung der Gleichung (17) mit der rechten Seite $H[g(\tau)]$. Dann gilt für $\kappa \to 1$

$$\|\vartheta_\kappa(t) - \vartheta_1(t)\| \to 0\,. \tag{21}$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann für $\kappa \to 1$

$$\|\vartheta_\kappa(z) - \vartheta_1(z)\| \to 0\,, \tag{22}$$

wo $\vartheta_\kappa(z)$ die in der Bemerkung 6 konstruierte Funktion ist.

Jetzt können wir den eigenen Beweis des Satzes 3 durchführen. Es seien also $\varphi_\kappa(z)$, $\psi_\kappa(z)$, $\varphi'_\kappa(z)$, $g(t)$ Funktionen, welche die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllen. Es sei $\operatorname{Re} \varphi'_1(a) = 0$. Nach der Bemerkung 5 können wir schreiben

$$\varphi'_\kappa(z) = \vartheta_\kappa(z) + l_\kappa\,, \quad \kappa \geqq 1\,, \quad \operatorname{Re} \vartheta_1(a) = \operatorname{Re} l_1 = 0\,, \tag{23}$$

wo $\vartheta_\kappa(z)$ die Lösung der Gleichung (17) bezeichnet. Wegen der Behauptung 4 genügt es die Existenz der $\lim\limits_{\kappa \to 1} l_\kappa$ zu beweisen. Nach (22) gilt $\vartheta_\kappa(a) \to \vartheta_1(a)$ für $\kappa \to 1$. Nach (18) gilt aber $(\kappa + 1) \operatorname{Im} l_\kappa = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \overline{\vartheta_\kappa(a)}$, woher $\operatorname{Im} l_\kappa \to \operatorname{Im} l_1$ für $\kappa \to 1$ und weiter $(\kappa - 1) \operatorname{Re} l_\kappa \to \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta_1(a)$ ist. Daraus folgt aber noch nicht die Konvergenz von $\operatorname{Re} l_\kappa$ für $\kappa \to 1$, sodass wir die Bedingung (5) wesentlicher ausnützen müssen. Es sei nun $\kappa > 1$. Wir bezeichnen die zugehörigen Verschiebungen mit u_κ, v_κ. Es sei $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_m$ die Kurve mit denselben Eigenschaften wie im Beweis des

Satzes 2, welche die Grenze eine Körpers T_γ bildet. Dann gilt nach dem Greenschen Satze

$$(24) \qquad \frac{1+\sigma}{E} \operatorname{Im} \int_\gamma (\kappa\bar{\varphi}_\kappa - \bar{t}\varphi'_\kappa - \psi_\kappa)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im} \int_\gamma (u_\kappa - iv_\kappa)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_\gamma v_\kappa\,\mathrm{d}x - u_\kappa\,\mathrm{d}y = \iint_{T_\gamma} \left(\frac{\partial u_\kappa}{\partial x} + \frac{\partial v_\kappa}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Aus dem Hookeschen Gesetz (2) folgt aber

$$\frac{\partial u_\kappa}{\partial x} + \frac{\partial v_\kappa}{\partial y} = e_{xx}^{(\kappa)} + e_{yy}^{(\kappa)} = \frac{X_x^{(\kappa)} + Y_y^{(\kappa)}}{E}(1+\sigma)(1-2\sigma)\,.$$

Jedoch ist $X_x^{(\kappa)} + Y_y^{(\kappa)} = 4 \operatorname{Re} \varphi'_\kappa(z)$ und so folgt aus (24) also

$$(25) \qquad \operatorname{Im} \int_\gamma (\kappa\bar{\varphi}_\kappa - \bar{t}\varphi'_\kappa - \psi_\kappa)\,\mathrm{d}t = (1-2\sigma) \iint_{T_\gamma} \operatorname{Re} \varphi'_\kappa(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Aber die Integrale auf der linken Seite von (25) konvergieren für $\gamma \to c$ gegen Null, denn es gilt (5). Also konvergieren auch die Integrale auf der rechten Seite von (25) und es gilt $(1 - 2\sigma \neq 0)$

$$(26) \qquad \iint_T \operatorname{Re} \varphi'_\kappa(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Von hier folgt

$$(27) \qquad \operatorname{Re} P l_\kappa = -\iint_T \operatorname{Re} \vartheta_\kappa(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

wo P der Flächeninhalt der Körpers T ist. Wir zeigen nun, dass $|\operatorname{Re}(l_{\kappa_1} - l_{\kappa_2})| \to 0$ für $\kappa_1 \to 1$, $\kappa_2 \to 1$ gilt. Nach (27) gilt

$$(28) \qquad P|\operatorname{Re}(l_{\kappa_1} - l_{\kappa_2})| = \left|\iint_T \operatorname{Re}(\vartheta_{\kappa_1}(z) - \vartheta_{\kappa_2}(z))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqq$$
$$\leqq \iint_T |\operatorname{Re}(\vartheta_{\kappa_1}(z) - \vartheta_{\kappa_2}(z))|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqq \iint_T |\vartheta_{\kappa_1}(z) - \vartheta_{\kappa_2}(z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Weil die Funktion $\vartheta_{\kappa_1}(z) - \vartheta_{\kappa_2}(z)$ in T holomorph und in $T \cup c$ stetig ist, folgt aus (28), (21) und (22)

$$P|\operatorname{Re}(l_{\kappa_1} - l_{\kappa_2})| \leqq P\|\vartheta_{\kappa_1}(t) - \vartheta_{\kappa_2}(t)\| \to 0$$

für $\kappa_1 \to 1$, $\kappa_2 \to 1$. Es gilt also $\operatorname{Re} l_\kappa \to d$ für $\kappa \to 1$. Wegen (23) folgt daraus

$$\max_{z \in T \cup c} |\varphi'_\kappa(z) - (\varphi'_1(z) + d)| = \|\vartheta_\kappa(t) + l_\kappa - (\vartheta_1(t) + l_1 + d)\| \to 0\,,$$

was zu beweisen war.

Zum Schluss noch einige Bemerkungen zum Satz 3.

Bemerkung 8. Wegen der Behauptung des Satzes 3 bekommen wir aus (26), dass die Funktion $\varphi'_1(z)$, für welche $\|\varphi'_\kappa(z) - \varphi'_1(z)\| \to 0$ für $\kappa \to 1$ gilt, die Bedingung

(29)
$$\iint_T \operatorname{Re} \varphi'_1(z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0$$

oder anders ausdrückt

(29*)
$$\operatorname{Im} \int_c t\, \overline{\varphi'_1(t)} \,\mathrm{d}\bar{t} = 0$$

erfüllen muss. Durch die nachträgliche Bedingung (29) bzw. (29*) ist die Funktion $\varphi'_\kappa(z)$ eindeutig bestimmt. Es ist also möglich, aus diesen Bedingungen den hydrostatischen Druck zu bestimmen, ohne dass man das zweite Problem für $\kappa > 1$ lösen müsste.

Bemerkung 9. Aus dem Beweis des Satzes 3 ist ersichtlich, dass die Voraussetzung (12) überflüssig stark ist. Man könnte voraussetzen, dass $G_\kappa(t) = g(t) + \varepsilon_\kappa(t)$ ist, wobei die Funktion $g(t)$ (5) erfüllt, die Funktion $\varepsilon_\kappa(t)$ zwei stetige Ableitungen auf c besitzt und folgende Bedingungen erfüllt

1. $\|\varepsilon_\kappa(t)\| \to 0$ für $\kappa \to 1$ (damit man das Lemma 4 benützen kann),
2. $\lim_{\kappa \to 1} 1/(\kappa - 1) \operatorname{Im} \int_c \varepsilon_\kappa(t) \,\mathrm{d}t = 0$ (damit aus (25) $\iint_T \operatorname{Re} \varphi'_\kappa(z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \to 0$ für $\kappa \to 1$ folgt).

Bemerkung 10. Im Beweise des Satzes 3 benützten wir wesentlich das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen (siehe den Übergang von der Ungleichung (28) zur Behauptung des Satzes). Deshalb waren wir gezwungen auf die Glattheit der Funktion $g(t)$ starke Forderungen zu stellen. Wir haben natürlich ein starkes Resultat, nämlich die gleichmässige Konvergenz der Spannungen in $T \cup c$ bekommen. Es wäre interessant und nützlich einen ähnlichen Satz für eine allgemeinere, zum Beispiel nur quadratisch integrierbare Ranbedingung zu beweisen. Dann könnte man natürlich nur ein schwächeres Resultat, zum Beispiel die Konvergenz der Spannungen im Quadrat, erwarten. Die Beweismethode des Satzes 3 kann man aber in diesem Falle nicht benützen.

Bemerkung 11. In der Hydrodynamik kann man u und v als Geschwindigkeiten interprätieren. Weil aber der Satz 3 eigentlich unter Voraussetzung, dass es sich um kleine Deformationen handelt, bewiesen wurde (denn unter dieser Voraussetzung wurde das Gleichungssystem (1) hergeleitet), kann man ihn nur auf stationäre Strömung der Flüssigkeiten, deren Geschwindigkeiten und Ableitungen der Geschwindigkeiten nach den Raumkoordinaten klein sind, anwenden. Denn unter dieser Voraussetzung reduzieren sich die allgemeinen Navier-Stokesschen Gleichungen auf die Gleichungen (1), wovon man sich leicht zum Beispiel aus [7], Seite 288–290, überzeugen kann. In diesem Falle kann man also mit Hilfe der Bemerkung 8 in physikalisch natürlicher Weise den hydrostatischen Druck bestimmen, der in der Theorie der Strömung der inkompressiblen Flüssigkeiten unbestimmt bleibt.

Literatur

[1] *J. Golecki*: On the Assumption of Incompressibility in Plane Problems of the Theory of Elasticity, Archiwum mechaniki stosowanej, 1959, XI, 3, 297–302.

[2a] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo*: Matematická theorie rovinné pružnosti, Praha 1955.

[2b] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo*: Elastizitätstheorie der ebenen Probleme, Akademie-Verlag-Berlin, 1960.

[3] *L. Ahlfors*: Complex analysis, New York, Toronto, London 1953.

[4] *С. Г. Михлин*: Плоская задача теории упругости, Труды сейсмологического института АН СССР, 65, 1935.

[5] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев*: Элементы функционального анализа, Москва-Ленинград 1951.

[6] *F. Riesz, B. Sz.-Nagy*: Lecons d'analyse fonctionelle, Budapest 1952.

[7] *L. Lichtenstein*: Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929.

Výtah

DRUHÝ PROBLÉM ROVINNÉ TEORIE PRUŽNOSTI PRO NESTLAČITELNÉ TĚLESO

JAROSLAV FUKA

Práce se zabývá rovinnými problémy pružnosti pro nestlačitelné prostředí, jež je charakterisováno vztahem $\sigma = \frac{1}{2}$, kde σ je Poissonova konstanta. Poněvadž, jak se snadno nahlédne, lze k řešení 1. problému (na hranici jsou dána napětí) užít stejného postupu jako pro $\sigma < \frac{1}{2}$, je sformulován a studován jen druhý problém pružnosti (na hranici jsou dána posunutí). Je ukázáno (věta 2), že nutná a postačující podmínka pro existenci řešení jest

$$\operatorname{Im} \int_c \overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

kde $g(t) = (2E/3)(u + iv)$, c je hranice daného $(m + 1)$-násobně souvislého tělesa, u, v složky vektoru posunutí, E modul pružnosti. Fysikálně znamená tato podmínka, že se plocha tělesa deformací nezmění, což je v souladu s jeho nestlačitelností. Z věty o jednoznačnosti (věta 1) plyne, že ze složek tensoru napětí je zcela určena jen složka X_y, zatímco složky X_x a Y_y jsou určeny až na touž aditivní konstantu. To je fysikálně pochopitelné, neboť $X_x = Y_y =$ konst znamená napětí od hydrostatického tlaku, které ovšem nemůže mít vliv na deformaci nestlačitelného tělesa. Je proto přirozená otázka, zda lze tuto konstantu (a tedy hydrostatický tlak) určit tak, aby napjatost daná řešením druhého problému pro $\sigma = \frac{1}{2}$ byla limitou napjatostí pro $\sigma \to \frac{1}{2}$ při téže okrajové podmínce? Tato otázka je přesně sformulována a kladně zodpověděna ve větě 3 a je ukázáno, že z podmínky (29) resp. (29*) lze tuto konstantu (a tedy hydrostatický tlak) určit, aniž by bylo nutno řešit druhý problém pro $\sigma < \frac{1}{2}$ a provádět limitní přechod pro $\sigma \to \frac{1}{2}$. Tento fakt je zajímavý z tohoto důvodu: hydrodynamicky lze u, v interpretovat jakožto složky rychlosti při stacionárním proudění kapalin za předpokladu, že rychlosti a jejich derivace podle prostorových souřadnic jsou malé. Hydrodynamický tlak, který zůstává obvykle v teorii proudění neurčen, lze tedy v tomto případě pomocí věty 3 a vztahu (29) resp. (29*) fysikálně přirozeným způsobem určit.

Резюме

ВТОРАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЛА

ЯРОСЛАВ ФУКА (Jaroslav Fuka)

Автор занимается в работе плоскими задачами упругости для несжимаемой среды, характеризированной соотношением $\sigma = \frac{1}{2}$ где σ — постоянная Пуассона. Так как при решении первой задачи (на границе заданы напряжения) можно, как легко видеть, поступать так же, как в случае $\sigma < \frac{1}{2}$, формулируется и изучается только вторая задача упругости (на границе заданы смещения). Показано, (теорема 2), что необходимое и достаточное условие для существования решения следующее:

$$\operatorname{Im} \int_c \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t = 0\,,$$

где $g(t) = (2E/3)(u + iv)$, c — граница данного $(m + 1)$-раз связного тела, u, v — составляющие вектора смещения, E — модуль упругости. С физической точки зрения это условие значит, что поверхность тела от деформации не изменится, что соответствует его несжимаемости. Из теоремы об однозначности (тоерема 1) вытекает, что из составляющих тензора напряжения определена только одна составляющая X_y, в то время как составляющие X_x и Y_y определены вплоть до аддитивной постоянной. Это с физической точки зрения вполне понятно, так как $X_x = Y_y = \text{konst.}$ означает напряжение от гидростатического давления, которое, конечно, не может оказывать влияние на деформацию несжимаемого тела. Поэтому является вполне естественным вопрос, можно ли эту постоянную и, значит, также гидростатическое давление определить так, чтобы напряженность, данная решением второй задачи для $\sigma = \frac{1}{2}$ была пределом напряженностей для $\sigma \to \frac{1}{2}$ при том же краевом условии. Этот вопрос точно сформулирован, и положительный ответ на него содержится в теореме 3; показано еще, что из условия (29) или же (29*) можно эту постоянную (значит,

и гидростатическое давление) определить, не решая второй задачи для $\sigma < \frac{1}{2}$ и не производя предельного перехода для $\sigma \to \frac{1}{2}$. Этот факт интересен по следующей причине: величины u, v можно гидродинамически интерпретировать как составляющие скорости при стационарном потоке жидкостей при условии, что скорости и их производные по пространственным координатам малы. Гидродинамическое давление, которое остается обыкновенно в теории движения жидкости неопределенным, можно, следовательно, в этом случае определить при помощи теоремы 3 и соотношения (29) или же (29*) физически естественным способом.

Adresa autora: *Jaroslav Fuka* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.