Josef Matyáš

Tvarovací filtry pro generování skupiny stacionárních náhodných procesů s předepsanými statistickými charakteristikami

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 4, 274–287

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102760`

TVAROVACÍ FILTRY PRO GENEROVÁNÍ SKUPINY STACIONÁRNÍCH NÁHODNÝCH PROCESŮ S PŘEDEPSANÝMI STATISTICKÝMI CHARAKTERISTIKAMI

JOSEF MATYÁŠ

(Došlo dne 15. listopadu 1960.)

Článek je věnován problému určení matice přenosových funkcí tvarovacích filtrů pro generování skupiny náhodných procesů (náhodného vektoru) s předepsanými statistickými charakteristikami na analogových počítačích. Tato úloha není jednoznačná, ale má nekonečně mnoho řešení. Jsou popsány metody výpočtu partikulárního řešení a odvozeny vlastnosti obecného řešení.

Úlohu určení matice přenosových funkcí $\boldsymbol{Y}$ tvarovacích filtrů pro generování skupiny náhodných procesů (náhodného vektoru) s předepsanou maticí spektrálních hustot $\boldsymbol{G}$ je možno převést (viz [8]) na řešení maticové rovnice

$$\bar{\boldsymbol{Y}}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G}$$

vzhledem k $\boldsymbol{Y}$.

Tento článek je věnován řešení uvedené rovnice pro případ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ je jednotková matice) i obecnému případu, kdy $\boldsymbol{S}$ je známá matice spektrálních hustot daných náhodných procesů. Je popsán způsob výpočtu partikulárního řešení uvedené maticové rovnice ve tvaru trojúhelníkové matice $\boldsymbol{Y}$ přenosových funkcí tvarovacích filtrů. Dále jsou odvozeny vlastnosti obecného řešení a uvedena jejich fysikální interpretace. Je-li $\boldsymbol{G}$ singulární matice řádu m a hodnosti h ($h < m$), potom řešení $\boldsymbol{Y}$ uvedené maticové rovnice je možno hledat ve tvaru obdélníkové matice rozměrů h, m.

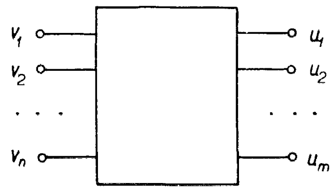
0. ÚVOD

K vyšetřování fysikálních soustav, případně k syntéze a určení optimálních parametrů složitých regulačních soustav, na které působí náhodné procesy, se často používají analogové počítače, které umožňují vytvořit elektrický model vyšetřované dynamické soustavy. Vstupní veličiny takového modelu jsou náhodné funkce, které musí odpovídat náhodným procesům, jež působí na vyšetřovanou soustavu.

Definice 1. *Mnohorozměrnou soustavou budeme nazývat soustavu s několika vstupními veličinami* $v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)$ *a několika výstupními veličinami* $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ (viz obr. 1).

Aby bylo možno vyšetřovat takové mnohorozměrné soustavy, na které působí náhodné veličiny, pomocí analogových počítačů, je třeba vytvořit ve tvaru elektrického napětí takové funkce času, jež by měly stejné statistické vlastnosti jako procesy působící na vyšetřovanou soustavu.

Na vstupy mnohorozměrné soustavy tedy působí n náhodných procesů (náhodný vektor o n složkách) a výstupní náhodné veličiny tvoří vektor o m složkách. V technické literatuře se v tomto případě mluví většinou o skupině náhodných procesů, kdežto v matematických článcích o náhodných vektorech. Tyto výrazy však mají stejný význam.



Obr. 1.

V tomto článku se omezíme na stacionární v širokém smyslu (viz [1]) náhodné procesy (každá složka náhodného vektoru je proces stacionární v širokém smyslu). Dále budeme předpokládat, že uvažované náhodné vektory mají nulovou střední hodnotu a danou matici korelačních funkcí. Prvky matice korelačních funkcí jsou vlastní a vzájemné korelační funkce jednotlivých složek náhodného vektoru.

Definice 2. *Korelační funkci* $\Phi_{v_i v_k}$ *náhodných procesů* v_i, v_k *(složek vstupního náhodného vektoru) definujeme vztahem*

$$\Phi_{v_i v_k}(\tau) = M\{v_i(t) \, . \, v_k(t + \tau)\} = \varphi_{ik}(\tau)\,, \tag{1}$$

kde M značí střední hodnotu; a příslušnou spektrální hustotu

$$S_{v_i v_k}(\mathrm{j}\omega) = F\{\Phi_{v_i v_k}(\tau)\} = S_{ik}(\mathrm{j}\omega)\,, \tag{2}$$

kde F značí Fourierovu transformaci.

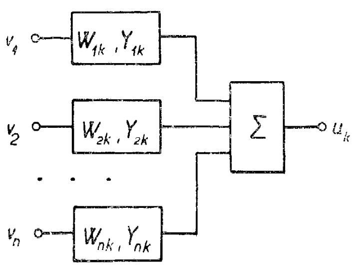
Za požadované náhodné procesy, které je třeba generovat ve tvaru elektrického napětí, budeme považovat náhodné funkce času, které mají stejnou matici korelačních funkcí (resp. matici spektrálních hustot) jako náhodné procesy, které působí na vyšetřovanou mnohorozměrnou soustavu.

1. FORMULACE ÚLOHY

Definice 3. *Tvarovacími filtry pro generování m požadovaných stacionárních náhodných procesů (náhodného vektoru) s danou maticí korelačních funkcí (příp. maticí spektrálních hustot) budeme nazývat mnohorozměrnou soustavu s několika vstupy a m výstupy, na kterých se objeví požadované náhodné procesy, jestliže na její vstupy přivedeme náhodné procesy z nekorelovaných zdrojů bílého šumu.*

Omezíme se na náhodné procesy (vektory) stacionární s lineárními vlastnostmi. V tomto případě budou tvarovací filtry vždy tvořit lineární mnohorozměrnou soustavu.

Každou lineární mnohorozměrnou soustavu s n vstupy a m výstupy je možno zakreslit ve tvaru blokového schématu s $n \,.\, m$ bloky, z nichž každý představuje jednorozměrnou lineární soustavu (s jedním vstupem a jedním výstupem). Část tohoto blokového schématu odpovídající k-tému výstupu je zakreslena na obr. 2.



Obr. 2.

Popisu lineárních mnohorozměrných soustav se stacionárními náhodnými vstupy je věnována práce [8]. Shodně s touto prací označíme

$$(3) \qquad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]\,, \quad \mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$$

řádkové vektory, jejichž složky jsou jednotlivé vstupní a výstupní veličiny,

$$(4) \qquad \mathbf{W} = \mathbf{W}(t) = [W_{ik}(t)]\,, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(j\omega) = [Y_{ik}(j\omega)]\,, \quad j\omega = s$$

matici váhových a matici přenosových funkcí soustavy,

$$(5) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{\varphi}(\tau) = [\varphi_{ik}(\tau)] = [M\{v_i(t)\, v_k(t+\tau)\}]\,, & i, k &= 1, 2, \ldots, n \\ \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\eta}(\tau) = [\eta_{ik}(\tau)] = [M\{v_i(t)\, u_k(t+\tau)\}]\,, & i &= 1, 2, \ldots, n \\ & & k &= 1, 2, \ldots, m \\ \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\psi}(\tau) = [\psi_{ik}(\tau)] = [M\{u_i(t)\, u_k(t+\tau)\}]\,, & i, k &= 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

matice korelačních funkcí a

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}(j\omega) = [S_{ik}(j\omega)] = F\{\boldsymbol{\varphi}\}\,, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(j\omega) = [H_{ik}(j\omega)] = F\{\boldsymbol{\eta}\}\,, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}(j\omega) = [G_{ik}(j\omega)] = F\{\boldsymbol{\psi}\} \end{aligned}$$

matice spektrálních hustot vstupních a výstupních náhodných vektorů.

Poznámka. Y_{ik} jsou prvky a nikoli doplňky matice $\mathbf{Y}$. Podobně i ostatní matice v rovnicích (4), (5), (6). Toto označení se odchyluje od obvyklého (viz [4]), a v tomto článku je použito pro zjednodušení zápisu.

V článku [8] jsou maticovým počtem odvozeny tyto vzorce

$$(7) \qquad \mathbf{u} = \mathbf{v} * \mathbf{W}\,,$$

$$(8) \qquad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varphi} * \mathbf{W}\,, \qquad \boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{W}}' * \boldsymbol{\varphi} * \mathbf{W}\,,$$

$$(9) \qquad \mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{Y}\,, \qquad \mathbf{G} = \bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{S}\mathbf{Y}\,,$$

kde $*$ znamená konvoluci, při čemž konvoluce matic se provádí analogicky jako součin (viz [8]), pruh nad symbolem matice znamená změnu znaménka u argumentu ve všech prvcích příslušné matice a čárka znamená transposici matice. (Matice $\bar{\mathbf{Y}}'$ je transponovaná matice s komplexně sdruženými prvky vzhledem k matici $\mathbf{Y}$.)

Podle definice tvarovacích filtrů označíme ψ matici korelačních funkcí požadovaného náhodného vektoru, $\boldsymbol{G}$ příslušnou matici spektrálních hustot a $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{Y}$ matici váhových a přenosových funkcí tvarovacích filtrů. Matice korelačních funkcí vstupního náhodného vektoru podle předpokladu bude

$$\varphi(\tau) = \delta(\tau)\,\boldsymbol{E}\,, \tag{10}$$

kde $\delta(\tau)$ je Diracova δ-funkce a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice, neboť na vstupy tvarovacích filtrů působí podle definice 3 náhodné procesy z nekorelovaných (např. statisticky nezávislých) zdrojů bílého šumu. Příslušná matice spektrálních hustot $\boldsymbol{S}$ bude zřejmě

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\,. \tag{11}$$

Dosazením do (8) a (9) dostaneme

$$\psi = \bar{\boldsymbol{W}}' * \boldsymbol{W}\,, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{G} = \bar{\boldsymbol{Y}}'\boldsymbol{Y}\,. \tag{13}$$

Vzorce (12) a (13) jsou základní maticové vztahy, popisující souvislost mezi maticí korelačních funkcí, požadovaných náhodných procesů a maticí váhových funkcí, případně mezi maticí spektrálních hustot a maticí přenosových funkcí tvarovacích filtrů. K popisu tvarovacích filtrů, který musíme znát pro jejich realizaci, je nutno určit matici $\boldsymbol{W}$ případně $\boldsymbol{Y}$ řešením rovnice (12) případně (13).

V dalších odstavcích bude popsáno řešení maticové rovnice (13) vzhledem k $\boldsymbol{Y}$ a to pro případ regulární i singulární matice spektrálních hustot $\boldsymbol{G}$. Rovnice (13) nemá jen jedno, ale nekonečně mnoho řešení. Proto bude nejprve popsán postup pro určení partikulárního řešení speciálního tvaru a dále budou formulovány vlastnosti obecného řešení. Nakonec bude úloha zobecněna na případ, kdy na vstupech tvarovacích filtrů místo nekorelovaných bílých šumů jsou přivedeny náhodné procesy s danou maticí spektrálních hustot $\boldsymbol{S}$. Tato úloha vede na řešení druhé rovnice (9).

2. VÝPOČET PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ ROVNICE (13) PRO REGULÁRNÍ $\boldsymbol{G}$

Řešení rovnice (13) v případě regulární matice $\boldsymbol{G}$ budeme hledat ve tvaru čtvercové matice řádu m.

Vzhledem k tomu, že matice spektrálních hustot $\boldsymbol{G}$ je nezáporná hermitovská matice, je plně určena svými $m(m + 1)/2$ členy. Matice $\boldsymbol{Y}$ však obecně bude obsahovat m^2 prvků, pro které lze z rovnice (13) odvodit pouze $m(m + 1)/2$ podmínek. Odtud vyplývá, že v matici $\boldsymbol{Y}$ můžeme (s jistým omezením) $m(m - 1)/2$ prvků zvolit a ostatní vypočítat z příslušných podmínek.

Zvolíme-li pro jednoduchost zmíněné prvky nulové, vidíme ihned, že můžeme řešení $\boldsymbol{Y}$ rovnice (13) hledat např. ve tvaru trojúhelníkové matice. Tento speciální tvar matice $\boldsymbol{Y}$ umožňuje jednoduchý a rychlý výpočet partikulárního řešení rovnice (13).

Za $\mathbf{Y}$ zvolíme vrchní trojúhelníkovou matici, tj.

$$Y_{ik} = 0\,, \quad i > k\,.$$

Z rovnice (13) pak odvodíme

$$G_{ik} = \sum_{j=1}^{i} \bar{Y}_{ji} Y_{jk}\,, \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n\,, \\ k = i, \ldots, m\,. \end{array} \tag{14}$$

Pro $i = k = 1$ dostaneme ze (14) rovnici

$$G_{11} = \bar{Y}_{11} Y_{11}\,, \tag{15}$$

která má obecné řešení (viz [6])

$$Y_{11} = A_1 H_1\,, \tag{16}$$

kde funkce A_1, H_1 splňují

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 A_1 &= G_{11}\,, \\ \bar{H}_1 H_1 &= 1\,. \end{aligned} \tag{17}$$

A_1 je známý Wienerův rozklad spektrální hustoty G_{11} a H_1 je přenosová funkce fázovacího filtru.

Z rovnice (14) dostaneme dále

$$G_{1k} = \bar{Y}_{11} Y_{1k} \tag{18}$$

a odtud

$$Y_{1k} = \frac{G_{1k}}{\bar{A}_1} \bar{H}_1\,, \quad k = 1, \ldots, m\,. \tag{19}$$

Nyní definujeme pomocné spektrální hustoty ${}^rG_{ik}$ $(r = 1, \ldots, m)$ vzorcem

$${}^rG_{ik} = G_{ik} - \sum_{j=1}^{r-1} \bar{Y}_{ji} Y_{jk}\,, \quad \begin{array}{l} i = r, \ldots, m\,, \\ k = i, \ldots, m\,. \end{array} \tag{20}$$

Dosazením do soustavy (14) dostaneme

$${}^iG_{ik} = \bar{Y}_{ii} Y_{ik}\,, \quad k = i, \ldots, m\,, \tag{21}$$

což je soustava formálně zcela shodná se soustavou (18). Zcela analogicky tedy odvodíme

$$Y_{ik} = \frac{{}^iG_{ik}}{\bar{A}_i} \bar{H}_i\,, \tag{22}$$

při čemž

$$\bar{A}_i A_i = {}^iG_{ii}\,, \quad \bar{H}_i H_i = 1\,.$$

Vzorcem (22) jsou určeny všechny přenosové funkce Y_{ik} tvarovacích filtrů až na funkce H_i jednoznačně. Z podmínky, aby všechny Y_{ik} byly přenosové funkce stabilních filtrů, lze jednoznačně určit funkce H_i nejnižšího stupně (viz [6]). Přenosové funkce Y_{ik} pak jsou pro pevné pořadí požadovaných náhodných procesů určeny již jednoznačně.

V článku [6] jsou rovněž odvozeny některé vlastnosti matic spektrálních hustot, ze kterých vyplývá, že popsané metody určení přenosových funkcí tvarovacích filtrů lze použít vždy, pokud matice $\mathbf{G}$ není signulární.

3. OBECNÉ ŘEŠENÍ ROVNICE (13) PRO REGULÁRNÍ $\mathbf{G}$

Zaměníme-li pořadí náhodných procesů, které je třeba generovat, vypočteme způsobem popsaným v minulém odstavci přenosové funkce, které budou tvořit jinou lineární soustavu, takže dospějeme k jiným tvarovacím filtrům pro generování téhož náhodného vektoru (procesů se stejnou maticí korelačních funkcí popř. maticí spektrálních hustot). Odtud již vyplývá mnohoznačnost řešení rovnice (13). Kromě toho z fysikální interpretace tvarovacích filtrů vyplývá, že existují rovněž řešení rovnice (13), které netvoří trojúhelníkovou matici. Ovšem v aplikacích z důvodu jednoduchosti výpočtu i realizace bývá toto řešení nejvýhodnější. V tomto odstavci odvodíme některé vlastnosti obecného řešení rovnice (13).

Řešením rovnice (13) může být obecně (viz např. [8]) obdélníková matice rozměrů s, m $(s \geqq m)$. Odtud vyplývá, že tato rovnice má také nekonečně mnoho různých tvarů řešení. V dalším se však omezíme na případ čtvercové matice $(s = m)$, neboť toto řešení má největší praktický význam. Naši úlohu si tedy nyní můžeme formulovat takto: Jaké vlastnosti musí mít čtvercová matice $\mathbf{Y}$ řádu m, aby byla řešením rovnice (13)?

Na tuto otázku dává odpověď následující

Věta 1. *Čtvercová matice $\mathbf{Y}$ je řešením rovnice*

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \mathbf{G}, \tag{23}$$

kde $\mathbf{G}$ je regulární hermitovská positivně definitní matice, tehdy a jen tehdy, jestliže může být zapsána ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \mathbf{N}\mathbf{Y}_1\mathbf{M}, \tag{24}$$

kde $\mathbf{Y}_1$ je libovolné partikulární řešení (23) *a $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ jsou čtvercové matice, splňující podmínky*

$$\mathbf{N}'\mathbf{N} = \mathbf{E}, \tag{25}$$

$$\mathbf{M}'\mathbf{G}\mathbf{M} = \mathbf{G}. \tag{26}$$

Nejprve dokážeme dvě pomocné věty:

Pomocná věta 1. *Jestliže čtvercová matice $\mathbf{Y}_1$ je řešením rovnice* (23), *potom matice*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{N}\mathbf{Y}_1\mathbf{M}, \tag{27}$$

kde $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ splňují podmínky (25), (26), *je rovněž řešením* (23).

Důkaz. Z předpokladu vyplývá

$$\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 = \mathbf{G}.$$

Dosazením z (27) do levé strany (23) dostaneme

$$\bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{M}}'\bar{\mathbf{Y}}_1'\bar{\mathbf{N}}'\mathbf{N}\mathbf{Y}_1\mathbf{M}\,.$$

Využitím vlastností matic $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ daných vztahy (25), (26) můžeme tuto rovnici upravit na tvar (23), čímž je tato pomocná věta dokázána.

Pomocná věta 2. *Nechť čtvercová matice* $\mathbf{Y}_1$ *je partikulární a* $\mathbf{Y}$ *libovolné řešení rovnice* (23). *Potom existují matice* $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ *splňující podmínky* (25), (26) *takové, že platí*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{N}\mathbf{Y}_1\,, \tag{28}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1\mathbf{M}\,. \tag{29}$$

Důkaz: Z předpokladů plyne

$$\bar{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 = \bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} = \mathbf{G}\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{G}$ je regulární, jsou rovněž matice $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}$ regulární a proto můžeme psát

$$\mathbf{Y} = (\bar{\mathbf{Y}}')^{-1}\bar{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1\,.$$

Matice

$$\mathbf{N} = (\bar{\mathbf{Y}}')^{-1}\bar{\mathbf{Y}}_1' = \mathbf{Y}\mathbf{Y}_1^{-1}$$

existuje a zřejmě splňuje (25), čímž je dokázáno tvrzení (28). Podobně se dá ukázat, že matice

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y}_1^{-1}\mathbf{Y}$$

existuje a splňuje rovnice (26) a (29), čímž je důkaz skončen.

Tvrzení výše formulované věty 1 plyne snadno z dokázaných dvou pomocných vět.

Uveďme ještě fysikální interpretaci odvozených vlastností obecného řešení rovnice (23):

V článku [8] je ukázáno, že matice přenosových funkcí lineární mnohorozměrné soustavy, která sestává z několika mnohorozměrných soustav zařazených za sebou, je součin matic přenosových funkcí jednotlivých soustav ve stejném pořádku.

Z první pomocné věty tedy vyplývá, že zařazením do série soustav s maticemi přenosových funkcí $\mathbf{N}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{M}$, kde matice $\mathbf{Y}_1$ je maticí přenosových funkcí tvarovacích filtrů a $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ splňují podmínky (25), (26), dostaneme opět tvarovací filtry požadovaných náhodných procesů. Ze druhé pomocné věty pak vyplývá, že máme-li již tvarovací filtry s maticí přenosových funkcí $\mathbf{Y}_1$, potom libovolné jiné tvarovací filtry pro generování týchž náhodných procesů je možno dostat jako sériové spojení soustav s maticemi přenosových funkcí $\mathbf{N}, \mathbf{Y}_1$ nebo $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{M}$ v tomto pořadí.

Rozborem podmínek (25) a (26) dospějeme k tomu, že soustava s maticí přenosových funkcí $\mathbf{N}$ vytváří z nekorelovaných bílých šumů opět nekorelované bílé šumy a soustava s maticí přenosových funkcí $\mathbf{M}$ vytváří z náhodných procesů s maticí spektrálních hustot $\mathbf{G}$ náhodné procesy se stejnou maticí spektrálních hustot $\mathbf{G}$.*)

*) Ze vzorce (25) vyplývá, že $\mathbf{N}$ jsou unitární matice. Vlastnosti unitárních matic i způsob jejich honstrukce jsou podrobně popsány v [4].

4. PŘÍPAD SINGULÁRNÍ MATICE $\mathbf{G}$

Pomocná věta 3. *Jestliže matice* $\mathbf{Y}$ *má hodnost* h, *potom matice*

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} \tag{30}$$

má rovněž hodnost h.

Důkaz. Matici $\mathbf{Y}$ zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

kde $\mathbf{X}_1$ je čtvercová matice řádu h. Zřejmě můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že $\mathbf{X}_1$ je regulární. Vytvoříme-li součin (30), dostaneme

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_1'\mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{X}}_3'\mathbf{X}_3, & \bar{\mathbf{X}}_1'\mathbf{X}_2 + \bar{\mathbf{X}}_3'\mathbf{X}^4 \\ \bar{\mathbf{X}}_2'\mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{X}}_4'\mathbf{X}_3, & \bar{\mathbf{X}}_2'\mathbf{X}_2 + \bar{\mathbf{X}}_4'\mathbf{X}_4 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Protože matice $\mathbf{Y}$ má hodnost h, existuje taková matice $\mathbf{A}$, že platí

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_3\,. \tag{33}$$

Odtud plyne

$$\bar{\mathbf{X}}_1'\mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{X}}_3'\mathbf{X}_3 = \bar{\mathbf{X}}_1'(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{A}}'\mathbf{A})\,\mathbf{X}_1\,. \tag{34}$$

Protože $\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{A}$ je nezáporná hermitovská matice, tvoří výraz (34) regulární matici. Označíme-li r hodnost matice $\mathbf{G}$, plyne ze (32) a (34)

$$r \geqq h\,.$$

Protože však $\mathbf{G}$ je součinem dvou matic hodnosti h, musí být

$$r \leqq h\,,$$

takže platí

$$r = h\,, \tag{35}$$

což je právě tvrzení naší pomocné věty.

Věta 2. *Je-li* $\mathbf{G}$ *singulární nezáporná hermitovská matice řádu* m *a hodnosti* h $(h < m)$, *potom existuje matice* $\mathbf{Y}$ *rozměrů* h, m, *která je řešením rovnice*

$$\bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} = \mathbf{G}\,. \tag{36}$$

Důkaz. Matici $\mathbf{G}$ zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \\ \bar{\mathbf{Z}}_2', \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

a opět budeme předpokládat, že $\mathbf{Z}_1$ je regulární čtvercová matice řádu h, což zřejmě není na újmu obecnosti. Matici $\mathbf{Y}$ rozměrů h, m zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]\,, \tag{38}$$

kde $\boldsymbol{N}_1$ je čtvercová matice řádu h. Odtud plyne

$$\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{X}_1, \bar{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{X}_2 \\ \bar{\boldsymbol{X}}_2'\boldsymbol{X}_1, \bar{\boldsymbol{X}}_2'\boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Podmínky, aby $\boldsymbol{Y}$ bylo řešením rovnice (36), dostaneme z rovnic (36), (37) a (39):

$$\bar{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{Z}_1\,, \tag{40}$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}_1'\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{Z}_2\,, \tag{41}$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}_2'\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{Z}_3\,. \tag{42}$$

Protože $\boldsymbol{Z}_1$ je regulární, existuje podle odstavců 2 a 3 matice $\boldsymbol{X}_1$, která splňuje rovnici (40). Z rovnice (37) je vidět, že existuje matice $\boldsymbol{B}$ s rozměry h, $m - h$, taková, že platí

$$\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{B}\,, \tag{43}$$

$$\boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{Z}_2'\boldsymbol{B}\,. \tag{44}$$

Z rovnic (41) a (43) dostaneme ihned

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}\,. \tag{45}$$

S využitím (43) a (44) snadno se přesvědčíme, že platí

$$\bar{\boldsymbol{X}}_2'\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{Z}_3\,. \tag{46}$$

Podmínka (42) je tedy rovněž splněna a tím je věta 2 dokázána.

Je zřejmé, že je obecně možno hledat řešení rovnice (36) ve tvaru matice $\boldsymbol{Y}$ rozměrů s, m, kde $s \geqq h$. V důsledku platnosti věty 2 se však můžeme omezit na případ matice rozměrů h, m ($s = h$), které mají z praktického hlediska největší důležitost.

Nyní uvedeme stručně způsob výpočtu partikulárního řešení rovnice (36). Výpočet podle rovnic (40) a (45) není totiž příliš vhodný.

Nejprve je nutno matici $\boldsymbol{G}$ upravit na tvar (37), kde $\boldsymbol{Z}_1$ je regulární, což odpovídá výběru vhodného pořadí požadovaných náhodných procesů (uspořádání složek vektoru $\boldsymbol{u}$). Nyní můžeme určovat jednotlivé prvky matice $\boldsymbol{Y}$, která je řešením rovnice (36) postupem popsaným v odstavci 2. Protože matice $\boldsymbol{G}$ má hodnost h, bude pro pomocné spektrální hustoty definované vzorcem (20) platit

$${}^rG_{ik} = 0\,, \quad r > h\,. \tag{47}$$

Ze vzorce (22) tedy dostaneme opět všechny přenosové funkce. Pro $i > h$ totiž dostaneme

$$Y_{ik} = 0\,, \quad i > h\,. \tag{48}$$

Matice $\boldsymbol{Y}$ bude tedy v posledních $m - h$ řádcích obsahovat pouze nulové prvky, po jejichž vynechání dostaneme požadované řešení ve tvaru matice s rozměry h, m.

Vlastnosti obecného řešení rovnice (36) se singulární maticí $\boldsymbol{G}$ popisuje následující

Věta 3. *Obdélníková matice* $\boldsymbol{Y}$ *s rozměry* h, m, *je řešením rovnice* (36), *kde* $\boldsymbol{G}$ *je singulární matice spektrálních hustot hodnosti* h, *tehdy a jen tehdy, jestliže může být zapsána ve tvaru*

$$Y = NY_1M \tag{49}$$

(*popřípadě* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{Y}_1$ *nebo* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{M}$), *kde* $\boldsymbol{Y}_1$ *je libovolné partikulární řešení* (36), $\boldsymbol{N}$ *je regulární čtvercová matice řádu* h *splňující* (25) *a* $\boldsymbol{M}$ *je čtvercová matice řádu* m *splňující* (26).

Důkaz: Je-li $\boldsymbol{Y}_1$ partikulární řešení (36) a $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}$ splňují (25) a (26), potom matice (49) je zřejmě také řešením (36), o čemž se můžeme přesvědčit dosazením. Obrácené tvrzení lze dokázat pomocí věty 2.

Bylo by rovněž možno formulovat a dokázat tvrzení zcela analogická pomocným větám 1 a 2 i pro případ singulární matice $\boldsymbol{G}$, což přenecháme čtenáři článku.

Snadno se můžeme přesvědčit, že věta 1 je speciálním případem věty 3 pro regulární matice $\boldsymbol{G}$ ($h = m$).

Odvozené výsledky je možno fysikálně interpretovat rovněž způsobem popsaným v odstavci 3, takže libovolné tvarovací filtry si můžeme představit ve tvaru sériového spojení příslušných lineárních soustav podle uvedených rovnic.

5. ZOBECNĚNÍ ÚLOHY O GENEROVÁNÍ NÁHODNÝCH PROCESŮ

Jestliže pro generaci požadovaných náhodných procesů nemáme k disposici skupinu nekorelovaných (např. statisticky nezávislých) bílých šumů, ale skupinu náhodných procesů s danou maticí spektrálních hustot $\boldsymbol{S}$, můžeme za zobecněné tvarovací filtry považovat lineární soustavu, na jejíchž výstupech se objeví požadované náhodné procesy s předepsanou maticí spektrálních hustot $\boldsymbol{G}$, jestliže na vstupy této soustavy přivedeme náhodné procesy s maticí spektrálních hustot $\boldsymbol{S}$. Tato úloha vede zřejmě na řešení rovnice

$$\check{Y}'SY = G \tag{50}$$

vzhledem k $\boldsymbol{Y}$ (viz [8]). Označíme-li h_S, h_G hodnosti matic $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{G}$, vyplývá z (50), že nerovnost

$$h_S \geqq h_G \tag{51}$$

je podmínkou řešitelnosti maticové rovnice (50).

Omezíme se zde opět na prakticky nejdůležitější případ, kdy $\boldsymbol{S}$ je regulární matice hodnosti $h_S = h_G = h$. V tomto případě budou již rozměry matice $\boldsymbol{Y}$ jednoznačně určeny a budou jako v minulém případě h, m.

Stejně jako v odstavcích 2 a 4 popíšeme i zde nejprve postup výpočtu partikulárního řešení rovnice (50) a potom uvedeme vlastnosti obecného řešení.

Označme $\mathbf{X}_1$ partikulární řešení rovnice

$$\bar{\mathbf{X}}'\mathbf{X} = \mathbf{S} \tag{52}$$

a $\mathbf{Z}_1$ partikulární řešení rovnice

$$\bar{\mathbf{Z}}'\mathbf{Z} = \mathbf{G}\,, \tag{53}$$

která určíme dle odstavců 2 a 4.

Dosazením do rovnice (50) dostaneme

$$\bar{\mathbf{Y}}'\bar{\mathbf{X}}_1'\mathbf{X}_1\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{Z}_1\,.$$

Budeme hledat takové partikulární řešení $\mathbf{Y}_1$ rovnice (50), aby platilo

$$\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Z}_1\,. \tag{54}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{S}$ a tedy i $\mathbf{X}_1$ jsou regulární matice, dostaneme ihned

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{Z}_1\,. \tag{55}$$

Snadno se můžeme přesvědčit dosazením, že $\mathbf{Y}_1$ podle vzorce (55) je skutečně řešením rovnice (50).

Vlastnosti obecného řešení rovnice (50) popisuje následující

Věta 4. *Matice* $\mathbf{Y}$ *je řešením rovnice* (50), *kde matice spektrálních hustot* $\mathbf{S}$ *je regulární řádu* h *a* $\mathbf{G}$ *je řádu* m *a hodnosti* h, *tehdy a jen tehdy, jestliže může být zapsána ve tvaru*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{N}\mathbf{Y}_1\mathbf{M} \tag{56}$$

(popřípadě ve tvaru $\mathbf{Y} = \mathbf{N}\mathbf{Y}_1$ nebo $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1\mathbf{M}$), kde $\mathbf{Y}_1$ je partikulární řešení (50) a matice $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ splňují podmínky

$$\bar{\mathbf{N}}'\mathbf{S}\mathbf{N} = \mathbf{S}\,, \tag{57}$$

$$\bar{\mathbf{M}}'\mathbf{G}\mathbf{M} = \mathbf{G}\,. \tag{58}$$

Důkaz této věty je možno snadno provést s použitím výsledků předchozích vět a proto ho zde nebudeme uvádět.

Všimněme si ještě podmínek (57) a (58). Matice $\mathbf{N}$ je zřejmě regulární čtvercová matice řádu h. Matice $\mathbf{M}$ je čtvercová matice řádu m, při čemž její hodnost h_M splňuje nerovnosti

$$h \leqq h_M \leqq m\,. \tag{59}$$

Věta 4 je z uvedených vět o vlastnostech obecného řešení maticových rovnic tvaru (50) nejobecnější a věty 1 a 3 jsou její zvláštní případy. Fysikální interpretace uvedených výsledků je stejná jako v předchozích případech.

6. ZÁVĚR

S rozvojem regulace a automatizace výrobních procesů se stále častěji vyskytuje úloha vyšetřování mnohorozměrných soustav, na které působí náhodné procesy, návrhu optimálních regulačních soustav s náhodnými vstupy apod. Řešení těchto a podobných složitých dynamických úloh lze s výhodou provádět na analogových počítačích. K tomu účelu je však nutné generovat náhodné procesy předepsaných statistických vlastností ve tvaru elektrických napětí a přivádět je na vstupy modelu vyšetřované soustavy.

V tomto článku je popsána úloha generování libovolného počtu m stacionárních náhodných procesů s předepsanou maticí spektrálních hustot (popřípadě maticí korelačních funkcí). Tato úloha je zde řešena jak pro regulární, tak i pro singulární matice spektrálních hustot $\mathbf{G}$ požadovaných procesů. Matematicky lze tuto úlohu formulovat jako řešení maticové rovnice

$$\bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{S}\mathbf{Y} = \mathbf{G}$$

vzhledem k $\mathbf{Y}$. Matice $\mathbf{Y}$ je matice přenosových funkcí tvarovacích filtrů, takže tvarovací filtry touto maticí jsou úplně popsány.

V článku jsou dále uvedeny způsoby výpočtu partikulárního řešení pro různé případy uvedené rovnice. Ve tvaru matematických vět jsou formulovány vlastnosti obecného řešení a uvedena jejich fysikální interpretace.

Uvedené výsledky tak umožňují návrh tvarovacích filtrů pro generování skupiny stacionárních náhodných procesů s předepsanou maticí spektrálních hustot. Jsou-li spektrální hustoty dány ve tvaru racionálně lomených funkcí, potom přenosové funkce jsou rovněž racionální lomené funkce komplexní proměnné, což umožňuje jejich snadnou realizaci na analogových počítačích.

Literatura

[1] *Яглом А. М.*: Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи мат. наук, Т. VII., Выпуск 5 (51), 1952, стр. 3—168.

[2] *Яглом А. М.*: Эффективные решения линейных аппроксимативных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром. Теория вероятностей у ее применения, Т. V., Выпуск 3, 1960, стр. 265—292.

[3] *Пугачев В. С.*: Теория случайных функций и ее применения к задачам автоматического управления. Гостехиздат, Москва, 1957.

[4] *Гантмахер Ф. Р.*: Теория матриц. Гостехиздат, Москва, 1954.

[5] *Lanning J. H., Battin R. H.*: Random Processes in Automatic Control. McGraw-Hill, N. Y., 1956.

[6] *Матыаш И., Шилханек Ян*: Генератор случайных процессов с заданной матрицей спектральных плотностей. Автоматика и телемеханика, 1960, Т. XXI, № 1, стр. 29—35.

[7] *Матыаш И., Проуза Л., Шилханек Ян*: Примечания к вопросу генерирования случайных процессов с заданной матрицей спектральных плотностей. Автоматика и телемеханика 1961, Т. XXII, № 3.

[8] *Матыаш И., Шилханек Ян*: Описание многомерных линейных систем в матричном виде. Автоматика и телемеханика (в печати).

Резюме

ФОРМИРУЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ГЕНЕРИРОВАНИЯ ЛЮБОГО ЧИСЛА СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДАННЫМИ СТАТИСТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ИОСЕФ МАТЫАШ (Josef Matyáš)

Сложные динамические системы со случайными процессами на входах предпочтительно исследовать при помощи моделирующих устройств. Для этого надо генерировать некоторе число случайных процессов (случайный вектор) с данными статистическими характеристиками, соответствующими процессам, под действием которых находится исследуемая действительная система, в виде электрического напряжения, и привести на входы модели исследуемой системы.

В этой статье описана задача генерирования любого числа m стационарных случайных процессов (случайного вектора с m слагаемыми) с данной матрицей спектральных плотностей (или матрицей корреляционных функций). Эта задача в статье решена для случая неособенной и особенной матрицы спектральных плотностей $\mathbf{G}$ желаемого случайного вектора. Математически можно эту задачу свести к решению матричного уравнения

$$\bar{\mathbf{Y}}'\mathbf{S}\mathbf{Y} = \mathbf{G}$$

относительно $\mathbf{Y}$.

Матрица $\mathbf{Y}$ вполне описывает систему формирующих фильтров для генерирования случайных процессов (желаемого случайного вектора), так как она является матрицей их передаточных функций.

В статье приведены методы исчисления частного решения выше приведенного матричного уравнения для нескольких частных случаев и для общего случая. В виде математических теорем формулированы свойства общего решения, и приведена их физическая интерпретация.

Выведенные результаты позволяют создать систему формирующих фильтров для генерирования стационарного случайного вектора с данной матрицей спектральных плотностей. В случае рациональных спектральных плотностей передаточные функции формирующих фильтров являются также рациональными, что и позволяет простое их осуществление на моделирующих устройствах.

Summary

SHAPING FILTERS FOR GENERATING AN ARBITRARY NUMBER OF RANDOM PROCESSES WITH PRESCRIBED STATISTICAL PROPERTIES

JOSEF MATYÁŠ

Complicated dynamical systems with random processes on their inputs can be analysed with the help of analog computers. For this purpose it is necessary to generate random processes (a random vector) with prescribed statistical characteristics corresponding to the processes on inputs of the analysed dynamical system in the form of electrical voltages, and to set them on the inputs of the computer which simulates the analysed system.

In the present paper the problem of generating an arbitrary number m of random processes (of a random vector with m elements) with the given matrix of spectral densities (or correlation functions) is described. This problem is solved for the case of regular and of singular matrix $\mathbf{G}$ of spectral densities of the desired random vector. This problem can be formulated mathematically in the form of the following matrix equation

$$\mathbf{Y}'\mathbf{S}\mathbf{Y} = \mathbf{G}\,,$$

which is to be solved for the matrix $\mathbf{Y}$.

The matrix $\mathbf{Y}$ characterises completely the system of shaping filters for the generation of the desired random processes (random vector), as it represents the matrix of transfer functions of this system.

A method of determining a particular solution for some special cases and also for the general case of the given equation is described. The properties of the general solution are formulated in the form of mathematical theorems and its physical meaning is given.

The derived results enable us to realise the system of shaping filters for the generation of a stationary random vector with prescribed matrix of spectral densities. In the case of rational spectral densities, the transfer functions of the system of shaping filters are also rational; this makes possible a simple realisation of such a system on analog computers.