Hana Švecová

Poznámka k vyšetřování singulárních bodů ve fotoelasticimetrii

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 6, 401–411

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102728

SVAZEK 5 (1960) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 6

ČLÁNKY

POZNÁMKA K VYŠETŘOVÁNÍ SINGULÁRNÍCH BODŮ VE FOTOELASTICIMETRII

HANA ŠVECOVÁ

(Došlo dne 19. září 1959.)

V článku je podána matematická interpretace fotoelasticimetrické klasifikace singulárních bodů a je odvozena jednoduchá metoda určování existence singulárního bodu na základě průběhu isostat v jisté vzdálenosti od tohoto bodu.

1. ÚVOD

Nejprve se krátce zmíníme o pojmech a větách, kterých budeme v dalším používat. Tyto úvodní poznámky si nečiní nároku na přesnost. Přesné definice a věty jsou obsaženy v [6].

Každou uzavřenou Jordanovu (tj. nikde se neprotínající) křivku v rovině budeme automaticky považovat za orientovanou „proti pohybu hodinových ručiček".

Jsou-li z_1, z_2 dva body uzavřené Jordanovy křivky Γ, pak část křivky Γ omezenou body z_1, z_2 nazveme *jednorozměrným simplexem* a body z_1, z_2 *vrcholy* tohoto simplexu. (Jednorozměrný simplex na uzavřené Jordanově křivce není body z_1, z_2 jednoznačně určen.) Zvolme na Γ bod z_0, různý od bodů z_1, z_2. Označme Σ ten simplex s vrcholy z_1, z_2, na němž neleží bod z_0. Budeme psát $z_1 \prec z_2$, jestliže pohyb proměnného bodu simplexu Σ od bodu z_1 k bodu z_2 se děje v kladném smyslu, tj. proti pohybu hodinových ručiček. Dále budeme pro jednoduchost psát $z_0 \prec z$ pro každé $z \in \Gamma$, $z \neq z_0$. Bod z_0 budeme nazývat *výchozím bodem*.

Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, pak znakem $\arg f(z)$ budeme značit (pro pevné z) úhel radiusvektoru bodu $f(z)$ s osou x tak, aby bylo $-\pi < \arg f(z) \leqq \pi$.

Zavedeme toto označení (z je běžný bod křivky Γ, z_1 výchozí bod): $z \to z_{1-}$ bude značit $z \to z_1$, při čemž se bod z pohybuje v kladném smyslu; symbol $z \to z_{1+}$ bude značit $z \to z_1$, při čemž se bod z pohybuje v záporném smyslu.

Základním pojmem v úvahách vedoucích k této práci je kombinatoricko-topologický pojem *rotace funkce*; v [6] je dokázáno, že v dvojrozměrném eukleidovském prostoru je rotace komplexní funkce $f(z)$ na uzavřené Jordanově křivce Γ násobená 2π rovna změně argumentu funkce $f(z)$, když bod z jednou proběhne křivku Γ v kladném smyslu. V této práci tedy budeme rotací rozumět změnu argumentu dělenou 2π. Např. rotace funkce $f(z) = z$ na jednotkové kružnici se středem v počátku je rovna 1, rotace funkce $g(z) = z^2$ na téže kružnici je rovna 2 apod.

Je-li komplexní funkce f spojitá a nenulová v okolí bodu z_0 neobsahujícím bod z_0 a je-li S_ε kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem ε, pak existuje ε_0 tak, že pro $\varepsilon < \varepsilon_0$ rotace funkce f na S_ε nezávisí na ε; hodnotu rotace funkce f na S_ε nazveme *indexem funkce f v bodě z_0*. Pro označení indexu funkce f v bodě z_0 budeme používat symbolu $\gamma_f(z_0)$. Např. pro $f(z) = z$ je $\gamma_f(0) = 1$, $\gamma_f(z) = 0$ pro $z \neq 0$.

Nechť funkce f má jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti uvnitř uzavřené Jordanovy křivky Γ a je na Γ spojitá a nenulová. Součet indexů nulových bodů a bodů nespojitosti funkce f ležících uvnitř Γ budeme nazývat *algebraickým počtem* nulových bodů a bodů nespojitosti funkce f uvnitř křivky Γ. Platí, že algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce f uvnitř Γ je roven rotaci funkce f na Γ, tj. změně argumentu funkce f na Γ dělené 2π.

2. PŘEHLED NĚKTERÝCH VÝSLEDKŮ MATEMATICKÉ TEORIE PRUŽNOSTI

Připomeneme zde jen některá základní fakta z teorie rovinné pružnosti (bližší viz [1], [2]).

Budeme mít na mysli jednoduše souvislé těleso T, jež je homogenní a isotropní a je zatíženo vnějšími silami. V dalším uvidíme, že vícenásobná souvislost tělesa není podstatnou překážkou, neboť se můžeme omezit na zkoumání některé jeho jednoduše souvislé části.

Napjatost v bodech tělesa T je dána v dané soustavě souřadné složkami X_x, Y_y, X_y tensoru napětí. Lze ukázat, že vždy existují holomorfní funkce Φ, Ψ tak, že v bodech $[x, y]$ tělesa T platí

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi + \Psi]\,, \tag{1}$$

kde $\bar{z} = x - iy$.

Při rotaci souřadných os kolem počátku se složky tensoru napětí obecně mění, a to tak, že platí

$$Y'_{y'} - X'_{x'} + 2iX'_{y'} = (Y_y - X_x + 2iX_y)\,.\,e^{2i\alpha}\,, \tag{2}$$

kde $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$, $X'_{y'}$ jsou složky tensoru napětí, příslušné k souřadnému systému, jehož osy vznikly otočením původních os o úhel α. Jestliže pro $\alpha = \alpha_0$ je $X'_{y'} = 0$, pak příslušné složky $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$ se nazývají *hlavní napětí*. Úhly $\alpha_0 + l\frac{\pi}{2}$ pro celá l nazýváme *úhly hlavních napětí.*

Zvláštní úlohu v teorii pružnosti mají *singulární body*, tj. body, v nichž je

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 0\,. \tag{3}$$

Pojem singulárního bodu je nezávislý na volbě soustavy souřadné. V singulárním bodě je každý úhel úhlem hlavního napětí. Podle (1) jsou singulárními body právě ty body z tělesa T, v nichž platí

$$\bar{z}\Phi(z) + \Psi(z) = 0\,.$$

Otázku hledání singulárních bodů lze tedy převést na otázku hledání nulových bodů funkce $\bar{z}\Phi(z) + \Psi(z)$.

3. FOTOELASTICIMETRICKÁ KLASIFIKACE SINGULÁRNÍCH BODŮ A JEJÍ MATEMATICKÁ INTERPRETACE

Fotoelasticimetrie je jednou z význačných experimentálních metod, jimiž se určuje průběh napětí v modelech konstrukcí s použitím dočasného dvojlomu některých průhledných hmot. Účelem fotoelasticimetrického měření je zjistit v každém bodě modelu směry a rozdíl hlavních napětí. Z těchto údajů je možno určit velikosti hlavních napětí speciální integrací. Princip a teorie fotoelasticimetrie a způsoby měření jsou vyloženy v [3] a [4].

Směry hlavních napětí se určují pomocí jednoparametrické soustavy křivek zvaných křivky isoklinné nebo *isokliny*. To jsou křivky, podél nichž jsou úhly hlavních napětí konstantní. Parametrem isokliny nazveme hodnotu p toho z úhlů hlavních napětí v jejích bodech, pro který platí $0 \leqq p < \frac{\pi}{2}$. Na základě isoklin lze konstruovat síť křivek, jejichž tečny v daném bodě udávají směry hlavních napětí. Tyto křivky nazýváme křivkami isostatickými nebo *isostatami*.

Singulární bod je s fotoelasticimetrického hlediska charakterisován tím, že je společným bodem isoklin s různými parametry. Je-li z_0 isolovaný singulární bod, provádí se jeho klasifikace, opírající se o počet isoklin procházejících bodem z_0 pro danou hodnotu parametru a o chování těchto isoklin při spojitém zvětšování parametru.

Podle této klasifikace je bod z_0 singulárním bodem k tého řádu, jestliže pro některé p_0 leží na k isoklinách s parametrem p_0 a pro žádné p neleží na $k + 1$ isoklinách s parametrem p. Singulární bod řádu k je *positivní* (neboli typu A), jestliže při spojitém zvětšování parametru p se všechny isokliny s parametrem

p procházející bodem z_0 otáčejí kolem bodu z_0 v kladném smyslu, a *negativní* (neboli typu R), jestliže se při spojitém zvětšování parametru všechny isokliny otáčejí ve smyslu záporném. Z ostatních případů spadá do této speciální klasifikace *smíšený* (neboli typu AR) bod 2. řádu, pro který platí, že při postupném zvětšování parametru se dvě isokliny, které jím procházejí, otáčejí ve smyslech navzájem opačných, pro jistou hodnotu $p = p_1 < \frac{\pi}{4}$ parametru splynou, dále pro p, $p_1 < p < p_2 = \frac{\pi}{2} - p_1$ vymizí a objevují se opět při $p = p_2$.

Přitom pod pojmem otáčení isokliny kolem bodu rozumíme toto:

a) Existuje kružnice S_ε o středu z_0 a poloměru ε takovém, že uvnitř S_ε ani na S_ε neleží žádný singulární bod různý od z_0 a že každá isoklina procházející bodem z_0 má s S_ε právě dva společné body.

b) Otáčení isokliny v kladném (resp. záporném) smyslu znamená pohyb průsečíků této isokliny s S_ε při spojitém vzrůstu parametru v kladném (resp. záporném) smyslu po S_ε.

Matematické interpretaci této klasifikace předešleme některé přípravné úvahy.

Buď z_0 singulární bod řádu k. Považujme za pevně danou tu soustavu souřadnou, při které pro hodnotu parametru $p = 0$ bodem z_0 prochází k isoklin. Buď z_1 jeden z průsečíků kružnice S_ε s isoklinami odpovídajícími parametru $p = 0$. Vezměme bod z_1 za výchozí bod. Označme $z_2, z_3, \ldots, z_{2k}$ průsečíky isoklin (pro $p = 0$) s kružnicí S_ε, a to tak, aby platilo $z_1 \prec z_2 \prec \ldots \ldots \prec z_{2k}$. Buď $\beta(z)$ úhel hlavního napětí v bodě $z \in S_\varepsilon$. Z (2) plyne, že lze hodnotu $\beta(z)$ pro každé $z \in S_\varepsilon$ vybrat tak, že β je spojitá na $S_\varepsilon \dot{-} z_1$ a $\lim\limits_{z \to z_1+} \beta(z) = \beta(z_1) = 0$.

Z isoklin dovedeme nalézt směry hlavních napětí, a tedy i hodnoty $\beta(z)$ pro $z \in S_\varepsilon$. Dosadíme-li do (2) $\alpha = \beta$ a použijeme vztahu (1), dostaneme pro body $z \in S_\varepsilon$

$$|Y'_{y'} - X'_{x'}| = |Y_y - X_x + 2iX_y| = 2\,|\bar{z}\Phi + \Psi|\,,$$

a tedy

$$\frac{\bar{z}\Phi + \Psi}{|\bar{z}\Phi + \Psi|} = \frac{Y_y - X_x + 2iX_y}{|Y'_{y'} - X'_{x'}|} = e^{-2i\beta}\,. \tag{4}$$

Rotace funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ na S_ε je rovna rotaci (neboli změně argumentu dělené 2π) funkce $\varkappa(z) = e^{-2i\beta(z)}$ na S_ε. Ale v důsledku naší volby hodnot $\beta(z)$ je změna argumentu funkce $\varkappa$ na S_ε rovna $\lim\limits_{z \to z_1+} \arg \varkappa(z) - \lim\limits_{z \to z_1-} \arg \varkappa(z) = -2\beta(z_1)$.

Nyní můžeme přistoupit k vlastnímu rozboru fotoelasticimetrické klasifikace isolovaných vnitřních singulárních bodů.

Nechť bod z_0 je negativní singulární bod k-tého řádu. Dokážeme, že potom index funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodě z_0 je roven k, a tedy splývá s řádem bodu z_0.

Při spojitém zvětšování parametru p (za počáteční hodnotu budeme považovat hodnotu $p = 0$) přejdou body z_i v body $z_i'(p)$ tak, že pro $0 < p < \frac{\pi}{2}$ je

(5) $$z_{2k} \prec z_1'(p)\,,\quad z_{j-1} \prec z_j'(p) \prec z_j \quad (j = 2, \ldots, 2k)\,.$$

Dále je — označíme-li $z_{2k} = z_{1-1}$ —

(6) $$\lim_{p \to \frac{\pi}{2}} z_i'(p) = z_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, 2k)\,.$$

Z naší volby hodnot $\beta(z)$ plyne, že existují celá čísla $l_1, l_2, \ldots, l_{2k}$ tak, že pro $z(p) \in (z_{i-1}, z_i)$ je

(7) $$\beta(z(p)) = p + l_i \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k)\,.$$

Protože pro $p_1 < p_2$ je $\beta(z_i'(p_1)) < \beta(z_i'(p_2))$ (značíme $z_i'(0) = z_i$), plyne ze vztahů (5), (6), (7)

$\beta(z_1') < \beta(z_{2k})\,,\quad \beta(z_j) < \beta(z_j') < \beta(z_{j-1})$ $(j = 2, 3, \ldots, 2k)$. Odtud a z toho, že je $\beta(z_1) = 0$, plyne

(8) $$\beta(z) < 0 \quad \text{pro} \quad z \neq z_1\,.$$

Z definice funkce β a z (6) a (8) plyne konečně

$$\beta(z_2) = -\frac{\pi}{2}\,, \ldots, \beta(z_{2k}) = -(2k-1)\frac{\pi}{2}\,, \lim_{z \to z_{1-}} \beta(z) = -k\pi\,.$$

Index funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodě z_0 neboli rotace funkce $\varkappa = e^{-2i\beta}$ na S_ε je tedy roven

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{z \to z_{1-}} (-2\beta(z)) = k\,.$$

Nechť nyní bod z_0 je positivní. Ukáže se, že v tom případě musí být $k = 1$ a index funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodě z_0 je -1.

Pro hodnotu parametru p, $0 < p < \frac{\pi}{2}$, přejdou body z_i v $z_i''(p)$ tak, že je

$$z_i \prec z_i''(p) \prec z_{i+1}\,,\quad z_{2k} \prec z_{2k}''(p) \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k)\,.$$

Hodnota $\beta(z_i''(p))$ je v tomto případě pro $0 < p < \frac{\pi}{2}$ větší než $\beta(z_i)$. Dále je $\lim_{p \to \frac{\pi}{2}} z_i'(p) = z_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2k-1)$, $\lim_{p \to \frac{\pi}{2}} z_{2k}''(p) = z_1$, a tedy platí

$$\beta(z_{i+1}) = \beta(z_i) + \frac{\pi}{2}\,,\quad \lim_{z \to z_{1-}} \beta(z) = k\pi\,.$$

Index funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodě z_0 je tedy $\dfrac{-2k\pi}{2\pi} = -k$. Tento výsledek ovšem platí jen pro body prvého řádu, neboť (viz [6]) funkce $\bar{z}\Phi(z) + \Psi(z)$ pro holomorfní Φ, Ψ nepřipouští index menší než -1. V jednoduše souvislém tělese s biharmonickou Airyho funkcí (tj. zatíženém pouze vnějšími silami) tedy neexistují positivní isolované singulární body řádu k pro $k > 1$.

Nechť konečně bod z_0 je smíšeným singulárním bodem 2. řádu. Ukážeme, že index funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodě z_0 je roven nule.

Aby změna argumentu funkce $e^{-2i\beta}$ na S_ε byla nenulová, muselo by pro některé $z^* \in S_\varepsilon$ platit buď $\beta(z^*) = \frac{\pi}{4}$ nebo $\beta(z^*) = -\frac{\pi}{4}$. Hodnotě $\beta(z^*) = \pm\frac{\pi}{4}$ však odpovídá hodnota parametru $p = \frac{\pi}{4}$. Protože je $p_1 < \frac{\pi}{4} < p_2$, kde pro $p_1 < p < p_2$ bodem z_0 neprochází žádná isoklina, nemůže takové z^* existovat. Index funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodě z_0 je tedy nulový.

4. POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE ISOLOVANÉHO SINGULÁRNÍHO BODU

Jednoznačné zjištění polohy singulárních bodů bývá v praxi ztíženo tím, že se isokliny při fotoelasticimetrickém pozorování nejeví jako křivky, ale jako pruhy, často značně široké. Lze tedy poměrně snadno zaměnit singulární bod a bod, v jehož okolí se isokliny zhušťují, ale neprotínají. Protože znalost polohy singulárních bodů je důležitým předpokladem určení průběhu napětí v modelu, věnuje se zjišťování jejich existence značná péče.

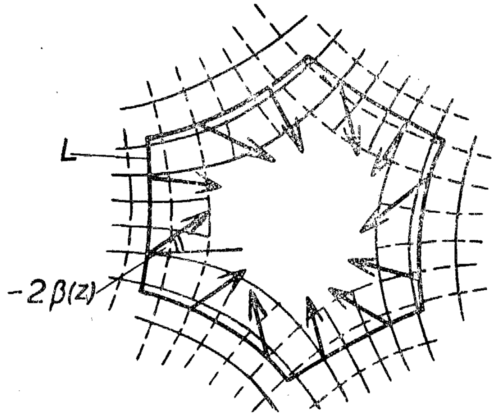
Vlastnosti rotace (viz konec odst. 1) dávají metodu, jíž lze v četných případech jednoduchým a názorným způsobem určit existenci (nikoliv ovšem přesnou polohu) singulárního bodu pouze na základě znalosti průběhu isoklin v jisté vzdálenosti od singulárního bodu, kde již bývají isokliny zřetelnější.

Zvolíme-li vhodně uzavřenou Jordanovu křivku L tak, aby na ní neležel žádný singulární bod, dovedeme z isoklin určit směry hlavních napětí v bodech křivky L.

Zvolme bod $z_1 \in L$. Uspořádejme body křivky L obvyklým způsobem při výchozím bodě z_1. Přiřaďme každému bodu $z \in L$ hodnotu $\beta(z)$ úhlu hlavního napětí v bodě z tak, aby funkce β byla spojitá na $L \dot{-} z_1$ a aby bylo $0 \leq \lim_{z \to z_{1+}} \beta(z) = \beta(z_1) < \frac{\pi}{2}$. Je-li rotace funkce $\varkappa(z) = e^{-2i\beta}$ na L nenulová, je nenulová i rotace funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ na L, a tedy uvnitř křivky L leží alespoň jeden singulární bod. Při tom součet indexů funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$ v bodech, ležících uvnitř, je roven rotaci funkce $\varkappa$ na L.

Hodnotu rotace funkce $e^{-2i\beta}$ na L snadno zjistíme, zakreslíme-li křivku L do grafu isostatických křivek (stačí, známe-li průběh isostat v malém okolí bodů křivky L). Umístíme-li do bodů křivky L jednotkové vektory ve směru daném hodnotami funkce -2β v těchto bodech, můžeme okamžitě určit změnu argumentu funkce $e^{-2i\beta}$. Např. na obr. 1 můžeme tímto způsobem zjistit, že změna argumentu funkce $e^{-2i\beta(z)}$ na L je 2π, a tedy uvnitř L leží buď jeden negativní singulární bod 1. řádu nebo více singulárních bodů se součtem indexů rovným 1.

Jelikož je v praxi jednodušší sestrojit v grafu isostat (nebo isoklin) vektors argumentem $\beta(z)$ (tj. tečný vektor k isostatické křivce) než vektor s argumentem $-$ $- 2\beta(z)$, budeme v odst. 5 tuto metodu modifikovat tak, abychom se vyhnuli sestrojování vektorů $e^{-2i\beta(z)}$. Stačí si při tom uvědomit, že přírůstek argumentu vektoru $e^{-2i\beta(z)}$ dělený 2π se rovná přírůstku argumentu vektoru $e^{i\beta(z)}$ dělenému $-\pi$.



Obr. 1.

V odst. 5 budeme místo „index funkce $e^{-2i\beta(z)}$ v bodě z_0" psát krátce „index bodu z_0".

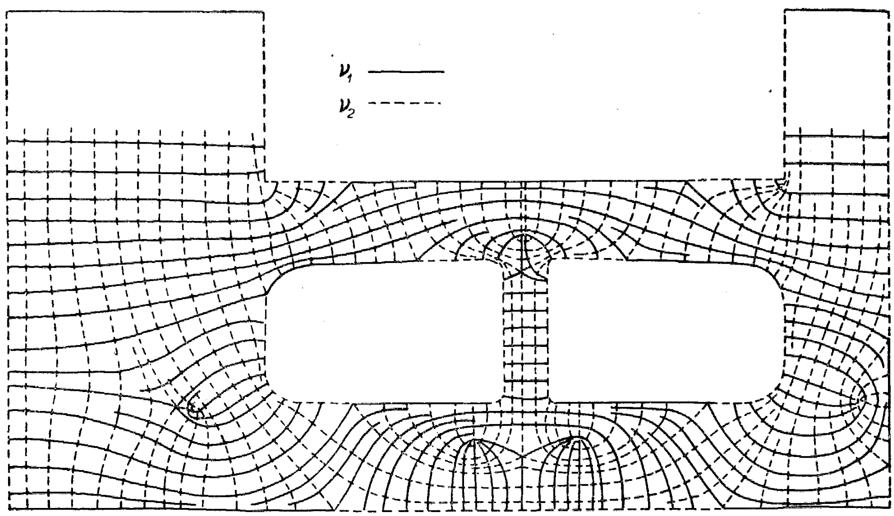
5. PRAKTICKÉ URČOVÁNÍ EXISTENCE ISOLOVANÝCH SINGULÁRNÍCH BODŮ

Metodu uvedenou v odst. 4 lze snadno realisovat. Postup určování existence singulárních bodů ukážeme na příkladu fotoelasticimetrického měření napětí v okolí ssavek hydrocentrály; obr. 2 ukazuje celkový průběh isostat,[1]) na obr. 3a, 3b jsou detaily průběhu isostat v okolí singulárních bodů. Při určování singulárních bodů postupujeme takto:

V grafu isostat (nebo isoklin) opíšeme kolem zkoumaného bodu nebo nejasného místa libovolnou uzavřenou, nikde se neprotínající křivku L, tak, aby neprocházela žádným singulárním bodem. Zvolíme si na křivce L libovolný bod z_1, který bude počátečním i koncovým bodem oběhu křivky L. (Viz obr. 3a.) Vybereme jeden z úhlů hlavního napětí v bodě z_1, označme jej $\beta(z_1)$, a sestrojíme v bodě $\boldsymbol{z}_1$ vektor s argumentem $\beta(z_1)$ (tj. vektor svírající s osou x úhel $\beta(z_1)$). Označme $\beta(z)$ úhel hlavního napětí v bodě z křivky L, který jsme vybrali tak, aby se úhel $\beta(z)$ měnil spojitě, když bod z jednou proběhne křivku L proti pohybu hodinových ručiček počínaje bodem z_1. Úhly $\beta(z)$ jsou jedno-

[1]) Měření bylo provedeno ve VÚS v Brně.

značně určeny, jakmile jsme zvolili $\beta(z_1)$. V bodech křivky L sestrojíme vektory s argumentem $\beta(z)$. (Na velikostech těchto vektorů nám nebude záležet, budeme se zabývat jen jejich argumenty.)



Obr. 2.

Oběhne-li bod z jednou křivku L proti pohybu hodinových ručiček (na obr. 3a naznačeno šipkou) počínaje bodem z_1, změní se úhel $\beta(z)$ o $k \,.\, \pi$ (tj. $k \,.\, 180°$), kde k je celé číslo (tj. „opustíme-li" bod z_1 s hodnotou argumentu $\beta(z_1)$, „vrátíme se" tam s druhé strany s hodnotou $\beta(z_1) + k \,.\, \pi$; např. na obr. 3a je $k = 1$). Je-li k nenulové, plyne z odst. 4[2]), že uvnitř křivky L leží alespoň jeden singulární bod, přičemž součet indexů[3]) všech singulárních bodů uvnitř L je $-\, k$. Je-li $k = 0$, pak buď uvnitř L neleží žádný singulární bod, nebo součet indexů všech singulárních bodů uvnitř L je roven nule.

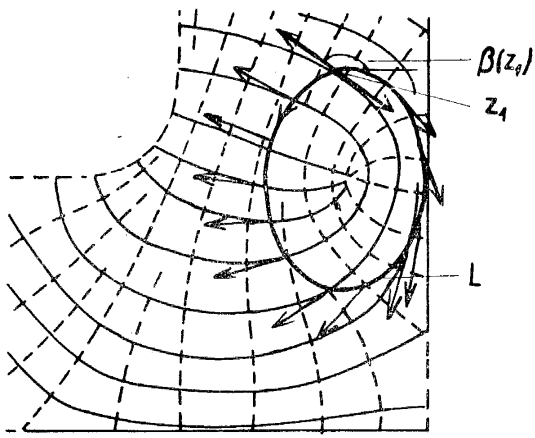
Obr. 3a ilustruje případ $k = 1$, tedy uvnitř L leží alespoň jeden singulární bod. Víme-li, že uvnitř L neleží více než jeden singulární bod, pak tento jediný singulární bod má index $-\, 1$, tj. je to bod positivní, 1. řádu.

---

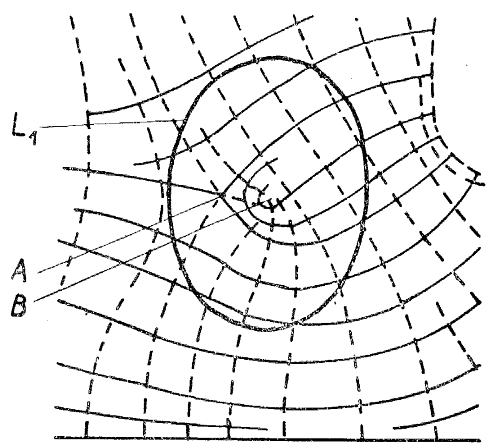
[2]) Rotace funkce $\varkappa(z) = e^{-2i\beta(z)}$ na křivce L (neboli počet „otočení" jednotkového vektoru s argumentem $-\, 2\beta(z)$ kolem počátku, když bod z jednou proběhne křivku L proti pohybu hodinových ručiček počínaje bodem z_1) je rovna $-\, k$. Leží-li uvnitř L jen jeden singulární bod, pak jeho index je roven rotaci $\varkappa(z)$ na L, tj. $-\, k$.

[3]) Index singulárního bodu je rotace funkce $\varkappa(z) = e^{-2i\beta(z)}$ na kružnici, v jejímž vnitřku neleží žádné další singulární body. Podle odst. 3 je index negativního singulárního bodu řádu m roven m, index positivního singulárního bodu 1. řádu je roven $-\, 1$ a index smíšeného singulárního bodu 2. řádu je 0.

Naproti tomu z případu $k = 0$ ještě neplyne, že uvnitř dané křivky nejsou singulární body. To ukazuje obr. 3b, kde uvnitř L_1 leží blízko sebe dva singulární body: bod A je negativní singulární bod 1. řádu (má index 1), bod B je positivní singulární bod 1. řádu (má index — 1).

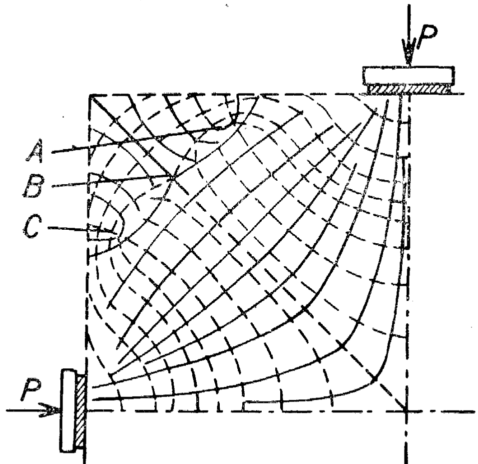


Obr. 3a.

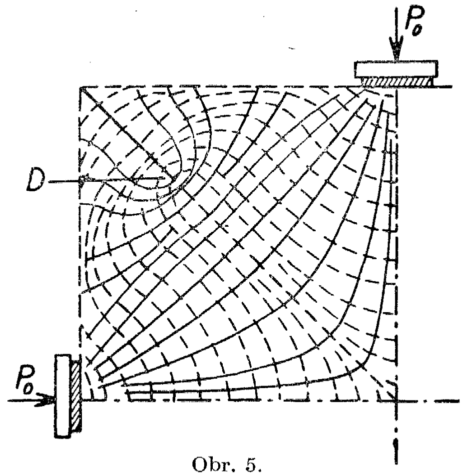


Obr. 3b.

Obr. 4 a 5 jsou příkladem praktického významu zobecněného znění Hurwitzovy věty z [6]. Zvětšujeme-li zatížení P naznačené na obr. 4, mění (vzhledem k redistribuci napětí způsobené vznikem plastických deformací) body A, B, C svou polohu, až při určité velikosti zatížení P_0 (obr. 5) singulární body splynou v jediný bod D, při čemž index bodu D je roven součtu indexů bodů A, B, C $(-1 = -1 + 1 - 1)$.[4]) (Obr. 1, 4 a 5 jsou s malými změnami převzaty z [3], [5]).



Obr. 4.



Obr. 5.

Literatura

[1] *I. Babuška - K. Rektorys - F. Vyčichlo:* Matematická teorie rovinné pružnosti; Praha 1955.

[2] *М. И. Мусхелишвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости; Москва 1949.

[3] *M. Milbauer:* Fotoelasticimetrie a její použití v praxi; Praha 1953.

[4] *A. Pirard:* La Photoélasticité; Paris 1949.

[5] Sborník k osmdesátým narozeninám akademika Františka Kloknera; Praha 1953.

[6] *H. Švecová:* Zobecnění vět o kořenech analytických funkcí; Časopis pro pěstování matematiky 85 (1960), 418—438.

Резюме

ПРИМЕЧАНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ФОТОУПРУГОСТИ

ГАНА ШВЕЦОВА (Hana Švecová)

В этой статье дается математическая интерпретация классификации изолированных особых точек в фотоупругости и выводится несложный метод

[4]) To je možno chápat jako důsledek toho, že funkce $\bar{z}\Phi_n + \Psi_n$, odpovídající zatížení $P_n(P_n \to P_0)$, a funkce $\bar{z}\Phi + \Psi$, odpovídající zatížení P_0, splňují podmínky zobecněného znění Hurwitzovy věty.

установления существования особой точки. Этот метод заключается в следующем:

Вокруг неясного места в графике изостатических (или изоклинных) кривых опишется простая замкнутая кривая L, и на ней выберется произвольная точка z_1. Обозначим через $\beta(z)$ угол главного напряжения в точке $z \in L$, значение которого мы выбрали так, чтобы $\beta(z)$ непрерывно изменялась при обходе кривой L против часовой стрелки начиная с точки z_1. Изменение функции $\beta(z)$ при этом обходе равно $k\pi$, где k — целое число. В статье выведен следующий результат:

Если $k \neq 0$, то внутри L есть по крайней мере одна особая точка и сумма порядков всех положительных и отрицательных особых точек, лежащих внутри L (где порядок отрицательной особой точки берется как отрицательное число), есть k. Если $k = 0$, то либо внутри L особых точек нет, либо сумма порядков равна нулю.

Summary

A CONTRIBUTION TO THE STUDY OF SINGULAR POINTS IN PHOTOELASTICITY

HANA ŠVECOVÁ

In this paper, a mathematical interpretation of the classification of singular points in photoelasticity and a simple method of verification of the existence of isolated singular points are given. In some cases this method establishes the existence of a singular point in the interior of a simple closed curve in the following way:

Let us draw a closed curve L round the indistinct place in the graph of isostatic (or isoclinic) curves such that there is no singular point on L, and choose an arbitrary point z_1 as the initial and end point of the circuit of L. (See fig. 3a). Let $\beta(z)$ be the angle of the principal stresses at the point z, chosen in such a manner that $\beta(z)$ is a continuous function on $L \dot{-} \{z_1\}$.

If the point z traverses the curve L anti-clockwise once, beginning at z_1, the variation of $\beta(z)$ is $k \,.\, \pi$, where k is an integer (*e. g.* on fig. 3a there is $k = 1$). The theory given in the paper yields the following result: if $k \neq 0$, then there is at least one singular point in the interior of L, and the sum of orders of all positive and negative singular points inside L (the orders of negative points taken with the negative sign) is equal to k. If $k = 0$, then either there is no singular point inside L, or the sum of their orders is zero.