Josef Kolomý

Přibližné řešení soustavy funkcionálních rovnic Galerkinovou metodou

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 4, 296–304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102716

PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC GALERKINOVOU METODOU

JOSEF KOLOMÝ

(Došlo dne 23. března 1959.)

V článku jsou udány postačující podmínky pro konvergenci Galerkinovy metody.

Nechť symbol H značí úplný separabilní Hilbertův prostor a $f, g, \dots$ jeho prvky.

Definice 1. *Hilbertovým prostorem (úplným a separabilním)* $\boldsymbol{H} = H \times H$ *rozumíme množinu všech dvojic funkcí* $\{f, g\}$; $f \in H, g \in H$, *přičemž základní operace v* $\boldsymbol{H}$ *jsou dány takto:*

$$c\{f, g\} = \{cf, cg\}\,,$$
$$\{f_1, f_2\} + \{g_1, g_2\} = \{f_1 + g_1, f_2 + g_2\}\,,$$
$$[\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}] = (f_1, g_1) + (f_2, g_2)$$

pro libovolnou konstantu c *a prvky* $\{f_1, f_2\} \in \boldsymbol{H}$, $\{g_1, g_2\} \in \boldsymbol{H}$.

Norma v $\boldsymbol{H}$ je pak dána vztahem

$$\|\{f_1, f_2\}\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2\,.$$

Označme znaky $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{T}, \dots$ operátory v $\boldsymbol{H}$; $A, B, K, L, \dots$ operátory v H a symboly $D_A, D_B, D_K, D_L, \dots$ jejich definiční obory. Prvky v $\boldsymbol{H}$ označme písmeny $u, v, \dots$, přičemž $\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}, \dots$ je jejich složkové vyjádření v $H \times H$.

Nechť je dána soustava

$$\begin{aligned} Au_1 + Ku_2 &= f_1\,, \\ Bu_2 + Lu_1 &= f_2\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde u_1, u_2 jsou hledané a f_1, f_2 dané prvky úplného separabilního prostoru H. Nechť lineární operátory A, B jsou kladně definitivní a symetrické na lineálech M_1, M_2 hustých v H. Operátory K, L buďte lineární a takové, že $D_B \subset D_K$, $D_A \subset D_L$. Pak operátor $\boldsymbol{G}u = \{Au_1, Bu_2\}$ je kladně definitní a symetrický na lineálu $\boldsymbol{M} = M_1 \times M_2$ hustém v $\boldsymbol{H} = H \times H$.

Definice 2. *Nechť operátor* $\boldsymbol{G}$ *je kladně definitní a symetrický na lineálu* $\boldsymbol{M}$ *hustém v* $\boldsymbol{H}$. *Skalární součin*

$$[\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}] = (Af_1, g_1) + (Bf_2, g_2)$$

definuje na lineálu $\boldsymbol{M}$ *Hilbertův prostor, v němž norma je dána vztahem*

$$\|\{f_1, f_2\}\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 ,$$

kde $\|f_1\|$ *je norma v* H_A, $\|f_2\|$ *norma v* H_B ([1], § 46).

Takto získaný prostor nemusí být úplný. Doplníme-li jej obvyklým způsobem limitními prvky, je již úplný, což budeme dále předpokládat. Budeme jej značit symbolem $\boldsymbol{H}_0$.

Věta 1. *Všechny prvky prostoru* $\boldsymbol{H}_0$ *jsou též prvky prostoru* $\boldsymbol{H}$.

Věta 2. *Prostor* $\boldsymbol{H}_0$ *je separabilní.*

Soustavu (1) přepíšeme na rovnici v $\boldsymbol{H}$:

$$\{Au_1, Bu_2\} + \{Ku_2, Lu_1\} = \{f_1, f_2\} . \tag{2}$$

Nechť posloupnost $\varphi^{(k)} = \{\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}\}$ je úplná v $\boldsymbol{H}_0$. Úplný systém v $\boldsymbol{H}_0$ existuje, neboť $\boldsymbol{H}_0$ je separabilní. Hledáme přibližné řešení rovnice (2) ve tvaru

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi^{(k)} ,$$

nebo podrobněji

$$u_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_j^{(k)} , \quad j = 1, 2 . \tag{3}$$

Koeficienty a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ určíme z podmínky

$$[\{Au_1^{(n)} + Ku_2^{(n)} - f_1, Bu_2^{(n)} + Lu_1^{(n)} - f_2\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] = 0 \quad \text{pro } m = 1, 2, \ldots, n .$$

Tato podmínka má tvar

(4)

$$(Au_1^{(n)} + Ku_2^{(n)} - f_1, \varphi_1^{(m)}) + (Bu_2^{(n)} + Lu_1^{(n)} - f_2, \varphi_2^{(m)}) = 0 , \quad m = 1, 2, \ldots, n .$$

Po dosazení z (3) do (4) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \{(A\varphi_1^{(k)}, \varphi_1^{(m)}) + (K\varphi_2^{(k)}, \varphi_1^{(m)}) + (B\varphi_2^{(k)}, \varphi_2^{(m)}) + (L\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(m)})\} = = (f_1, \varphi_1^{(m)}) + (f_2, \varphi_2^{(m)}) , \quad m = 1, 2, \ldots, n . \tag{5}$$

Nechť posloupnost $\varphi^{(k)} = \{\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}\}$ je orthonormovaná v $\boldsymbol{H}_0$

$$[\varphi^{(k)}, \varphi^{(j)}] = \delta_{kj} .$$

Především

$$(K\varphi_2^{(k)}, \varphi_1^{(m)}) + (L\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(m)}) = [\{K\varphi_2^{(k)}, L\varphi_1^{(k)}\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] =$$
$$= [\{AQK\varphi_2^{(k)}, BCL\varphi_1^{(k)}\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] = [\{T_2\varphi_2^{(k)}, T_1\varphi_1^{(k)}\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] = \gamma_{mk} ,$$

kde

$$Q = A^{-1}\,, \quad C = B^{-1}\,, \quad T_2 = A^{-1}K\,, \quad T_1 = B^{-1}L\,.$$

$$(f_1, \varphi_1^{(m)}) + (f_2, \varphi_2^{(m)}) = [\{f_1, f_2\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] =$$
$$= [\{AQf_1, BCf_2\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] = [\{f_1', f_2'\}, \{\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}\}] = b_m\,,$$

kde

$$f_1' = Qf_1, \quad f_2' = Cf_2\,.$$

Po těchto úpravách má systém algebraických rovnic (5) tvar

$$a_m + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{mk} a_k = b_m\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Vyšetřujeme ještě soustavu

$$(6) \qquad \begin{aligned} Au_1 - \lambda K u_2 &= 0\,, \\ Bu_2 - \lambda L u_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Stejným způsobem obdržíme soustavu homogenních lineárních algebraických rovnic

$$a_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = 0\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Rovnice

$$\mathrm{Det}\,|\delta_{km} - \lambda \gamma_{mk}| = 0$$

dává přibližné hodnoty vlastních čísel soustavy (6).

Platí analogické věty větám MICHLINOVÝM:

Věta 3. *Přibližná řešení soustavy* (1), *sestrojená Galerkinovou metodou, konvergují v prostoru* $\boldsymbol{H}_0 = H_A \times H_B$ *k přesnému řešení, jsou-li splněny tyto předpoklady*:

I. *Soustava* (1) *má právě jedno řešení v* $\boldsymbol{H}_0$.

II. *Operátor* $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$, *kde* $T_2 = A^{-1}K$, $T_1 = B^{-1}L$, *je totálně spojitý v* $\boldsymbol{H}_0$.

Věta 4. *Nechť operátor* $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$ *je totálně spojitý v* $\boldsymbol{H}_0$. *Potom Galerkinova metoda pro výpočet vlastních čísel soustavy* (6) *konverguje v* $\boldsymbol{H}_0$.

Poznámka: Jsou-li splněny předpoklady věty 3 a 4, lze užít Galerkinovy metody jak k řešení soustavy

$$\begin{aligned} u_1 - \lambda T_2 u_2 &= f_1\,, \\ u_2 - \lambda T_1 u_1 &= f_2 \end{aligned}$$

(a tedy k řešení soustavy integrálních rovnic Fredholmova typu), tak i k výpočtu charakteristických čísel odpovídající homogenní soustavy.

K tomu, abychom určili přibližné řešení soustavy (1) Galerkinovou metodou, je nutné udati způsob, kterým lze nalézti úplný systém funkcí v prostoru $\boldsymbol{H}_0$. K tomu nám bude užitečná tato věta:

Věta 5. *Nechť posloupnost* $\{\varphi_1^{(k)}\}_{k=1}^{k=\infty}$ *je A-úplná v H a posloupnost* $\{\varphi_2^{(k)}\}_{k=1}^{k=\infty}$ *je B-úplná v H. Potom systém*

$$\{\varphi_1^{(1)}, 0\}, \{0, \varphi_2^{(1)}\}, \{\varphi_1^{(2)}, 0\}, \{0, \varphi_2^{(2)}\}, \ldots$$

je úplný v prostoru $\boldsymbol{H}_0$.

Důkaz. Protože podle předpokladu věty $\{\varphi_1^{(k)}\}$ je A-úplná v H, $\{\varphi_2^{(k)}\}$ je B-úplná v H, je posloupnost $\{\varphi_1^{(k)}\}$ úplná v H_A, $\{\varphi_2^{(k)}\}$ je úplná v H_B. Nechť $\{f_1, f_2\} \in \boldsymbol{H}_0$ a nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Pak $f_1 \in H_A$, $f_2 \in H_B$. Existují tedy čísla $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ a konstanty a_k, $k = 1, 2, \ldots, N_1$; b_l, $l = 1, 2, \ldots, N_2$ tak, že

$$\| f_1 - \sum_{k=1}^{N_1} a_k \varphi_k \| = \| \{f_1, 0\} - \sum_{k=1}^{N_1} a_k \{\varphi_k, 0\} \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\| f_2 - \sum_{l=1}^{N_2} b_l \psi_l \| = \| \{0, f_2\} - \sum_{l=1}^{N_2} b_l \{0, \psi_l\} \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť $N_1 > N_2$, potom položíme $b_{N_2+1} = b_{N_2+2} = \ldots = b_{N_1} = 0$. (V případě že $N_2 > N_1$, položíme $a_{N_1+1} = a_{N_1+2} = \ldots = a_{N_2} = 0$). Potom

$$\| \{f_1, f_2\} - \sum_{k=1}^{N_1} a_k \{\varphi_k, 0\} + b_k \{0, \psi_k\} \| < \varepsilon,$$

což bylo dokázat.

Uvažujme nyní soustavu

$$\begin{aligned} Au_1 + Ku_2 &= f_1, \\ Au_2 + Lu_1 &= f_2. \end{aligned} \tag{7}$$

V tomto případě lze snadněji rozhodnouti, zda jsou splněny předpoklady věty 3.

Nechť $\{\varphi_1^{(k)}\}$ je A-úplná v H. Potom podle věty 5 systém

$$\{\varphi_1^{(1)}, 0\}, \{0, \varphi_1^{(1)}\}, \{\varphi_1^{(2)}, 0\}, \{0, \varphi_1^{(2)}\}, \ldots$$

je úplný v $\boldsymbol{H}_0 = H_A \times H_A$. Hledejme přibližné řešení soustavy ve tvaru

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \{\varphi_1^{(k)}, 0\} + b_k \{0, \varphi_1^{(k)}\}, \tag{8}$$

tedy ve tvaru

$$u_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_1^{(k)}, \quad u_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_1^{(k)}. \tag{8'}$$

Koeficienty a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ určíme z podmínek

$$[\{Au_1^{(n)} + Ku_2^{(n)} - f_1,\ Au_2^{(n)} + Lu_1^{(n} - f_2\},\ \{\varphi_1^{(1)}, 0\}] = 0\,,$$
$$[\{Au_1^{(n)} + Ku_2^{(n)} - f_1,\ Au_2^{(n)} + Lu_1^{(n)} - f_2\},\ \{0, \varphi_1^{(1)}\}] = 0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\{Au_1^{(n)} + Ku_2^{(n)} - f_1,\ Au_2^{(n)} + Lu_1^{(n)} - f_2\},\ \{\varphi_1^{(n)}, 0\}] = 0\,,$$
$$[\{Au_1^{(n)} + Ku_2^{(n)} - f_1,\ Au_2^{(n)} + Lu_1^{(n)} - f_2\},\ \{0, \varphi_1^{(n)}\}] = 0\,.$$

V tomto případě soustava (5) má tvar

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(A\varphi_1^{(k)}, \varphi_1^{(j)}) + \sum_{k=1}^{n} b_k(K\varphi_1^{(k)}, \varphi_1^{(j)}) = (f_1, \varphi_1^{(j)})\,,$$
$$\sum_{k=1}^{n} b_k(A\varphi_1^{(k)}, \varphi_1^{(j)}) + \sum_{k=1}^{n} a_k(L\varphi_1^{(k)}, \varphi_1^{(j)}) = (f_2, \varphi_1^{(j)})\,,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

To je systém $2n$ lineárních algebraických rovnic pro neznámé a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Určíme-li tyto konstanty a dosadíme-li je do vztahu (8), dostáváme přibližné řešení soustavy (7).

Příklad 1. Budiž dána soustava

$$(9) \qquad \begin{aligned} (-1)^m u_1^{(2m)} - \lambda K u_2 &= f_1(x)\,, \\ (-1)^m u_2^{(2m)} - \lambda L u_1 &= f_2(x)\,, \end{aligned}$$

kde K, L jsou lineární diferenciální operátory řádu nejvýše $2m - 1$, $f_1(x)$, $f_2(x) \in L_2\langle a, b\rangle$. Hledáme řešení u_1, u_2, vyhovující soustavě (9) a splňující v koncových bodech intervalu $a \leqq x \leqq b$ okrajové podmínky

$$(10) \qquad \begin{aligned} u_i(a) = u_i'(a) = \ldots = u_i^{(m-1)}(a) = 0\,, \\ u_i(b) = u_i'(b) = \ldots = u_i^{(m-1)}(b) = 0\,, \end{aligned} \quad i = 1, 2\,.$$

Předpokládejme, že daná úloha má právě jedno řešení. Položme

$$A = (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\,.$$

Nechť M je množina funkcí majících spojité derivace do řádu $2m$-tého v $\langle a, b\rangle$ včetně a vyhovující podmínkám (10). Množina $\boldsymbol{M} = M \times M$ je hustá v $\boldsymbol{H} = L_2\langle a, b\rangle \times L_2\langle a, b\rangle$. Operátor $\boldsymbol{R}u = \{Au_1, Au_2\}$ je kladně definitní a symetrický na $\boldsymbol{M}$.

Skalární součin na uzávěru $\boldsymbol{M}$

$$[\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}] = (-1)^m \int_a^b u_1^{(2m)} \,.\, v_1 \,\mathrm{d}x + (-1)^m \int_a^b u_2^{(2m)} v_2 \,\mathrm{d}x$$

definuje prostor $\boldsymbol{H}_0 = H_A \times H_A$ s normou

$$\|\{u_1, u_2\}\|^2 = \int_a^b |u_1^{(m)}|^2 \,\mathrm{d}x + \int_a^b |u_2^{(m)}|^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Operátory $T_2 = A^{-1}K$, $T_1 = A^{-1}L$ jsou totálně spojité v H_A. Tedy operátor $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$ je totálně spojitý v $\boldsymbol{H}_0$. Podle věty 3 přibližná řešení získaná Galerkinovou metodou konvergují v $\boldsymbol{H}_0$ k řešení soustavy (9). Podle věty 4 Galerkinova metoda pro výpočet vlastních čísel homogenní soustavy příslušné k soustavě (9) s okrajovými podmínkami (10) konverguje v prostoru $\boldsymbol{H}_0$.

Příklad 2. Vyšetřování průhybu podepřené obdélníkové desky vede k této matematické úloze (TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, str. 100 a str. 118): nalézti řešení u_1, u_2 taková, aby platilo:

1. u_1, u_2 jsou spojité funkce v obdélníku $\Omega = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$;
2. uvnitř obdélníka Ω splňují soustavu rovnic

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -q\,, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -\frac{u_1}{D}\,;$$

3. na hranici Ω vyhovují okrajovým podmínkám

$$u_1 = u_2 = 0\,. \qquad (12)$$

Konstanta q značí intensitu stejnoměrně rozloženého zatížení, konstanta D značí pevnost v ohybu.

Nejdříve ukážeme, že jsou splněny předpoklady věty 3. Položme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

Potom lze soustavu (11) psát ve tvaru

$$-\Delta u_1 = q\,, \qquad (13)$$

$$-\Delta u_2 = \frac{u_1}{D}\,.$$

Nechť N je lineál funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v Ω a vyhovujících okrajové podmínce (12). Lineál $\boldsymbol{N} = N \times N$ je hustý v $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) = \boldsymbol{H}$. Operátor $A = -\Delta$ je symetrický a kladně definitní na N. Tudíž operátor $\boldsymbol{G}u = \{Au_1, Au_2\}$ je symetrický a kladně definitní na lineálu $\boldsymbol{N}$.

Zavedeme Hilbertův prostor tím, že na lineálu N definujeme skalární součin vztahem

$$[u_1, v_1] = (Au_1, v_1)$$

a tudíž norma

$$\|u_1\|^2 = (Au_1, u_1)\,.$$

Tento prostor není úplný. Rozšíříme-li jej obvyklým způsobem o limitní prvky, pak takto získaný prostor je již úplný. Budeme jej značit symbolem H_A.

Utvořme Hilbertův prostor $\boldsymbol{H}_0 = H_A \times H_A$. Skalární součin a normu v $\boldsymbol{H}_0$ jsou dány vztahy:

$$[\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}] = (Au_1, v_1) + (Au_2, v_2)\,,$$

$$\|\{u_1, u_2\}\|^2 = (Au_1, u_1) + (Au_2, u_2) = \int_\Omega (\text{grad } u_1)^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\text{grad } u_2)^2 \,\mathrm{d}\Omega\,.$$

Prostor $\boldsymbol{H}_0$ je úplný. Operátor $A^{-1}u_1$ je totálně spojitý v $L_2(\Omega)$. Tedy je totálně spojitý v prostoru H_A. Tudíž operátor $\boldsymbol{T}u = \{0 \,.\, u_2, A^{-1}u_1\}$ je totálně spojitý v $\boldsymbol{H}_0$. Soustava (11) s podmínkami (12) má právě jedno řešení. Podmínky věty 3 jsou tedy splněny. Tudíž přibližná řešení soustavy (11) s podmínkami (12) získaná metodou Galerkinovou konvergují k přesnému řešení soustavy (11).

Vybereme funkce

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\,; \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Soustava $\{\varphi_{mn}(x, y)\}$ je úplná v H_A. Podle věty 5 systém

$$\{\varphi_{11}, 0\}, \{0, \varphi_{11}\}, \ldots$$

je úplný v prostoru $\boldsymbol{H}_0$. Protože průhyb desky je symetrický k osám $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, budeme hledat řešení soustavy (11) ve tvaru (bereme nekonečně mnoho koeficientů a_{mn}, b_{mn})

$$u_1(x, y) = \sum_{m,n=1,3,5,\ldots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\,, \tag{14}$$

$$u_2(x, y) = \sum_{m,n=1,3,5,\ldots}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\,. \tag{15}$$

Určíme nejdříve koeficienty a_{mn}; $m, n = 1, 3, 5, \ldots$ Protože

$$-\Delta\varphi_{mn}(x, y) = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\,,$$

je

(16)

$$\int_0^a \int_0^b \sum_{k,l=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left\{a_{kl} \left(\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{l^2 \pi^2}{b^2}\right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} - q\right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Jelikož

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{4ab}{\pi^2 mn}\,,$$

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{ab}{4}\,,$$

dostaneme ihned ze vztahu (16) rovnice pro a_{mn}, $m, n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) a_{mn} = \frac{4q}{\pi^2 mn} .$$

Odtud

$$a_{mn} = \frac{16q}{\pi^4 mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} .$$

Po dosazení do (14)

$$u_1(x, y) = \frac{16q}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} .$$

Určíme nyní koeficienty b_{mn}; $m, n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{k,l=1,3,5,\ldots}^{\infty} b_{kl}\pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{l\pi y}{b} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{D}\frac{16q}{\pi^4} \sum_{k,l=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{l\pi y}{b}}{kl\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right)} \right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0 .$$

Odtud

$$b_{mn}\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \frac{1}{D}\frac{16q}{\pi^4 mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} = 0 ,$$

$$b_{mn} = \frac{16q}{\pi^6 Dmn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} .$$

Po dosazení do (15) dostaneme výsledek

$$u_2(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m,n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a} \,.\, \sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} .$$

Literatura

[1] *С. Г. Михлин:* Вариационные методы в математической физике, 1957.

[2] *С. Г. Михлин:* Прямые методы в математической физике, 1950.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

ИОСЕФ КОЛОМЫ (Josef Kolomý)

В статье показывается, что Михлиным [1] предложенный метод Галеркина можно обобщить на системы функциональных уравнений. Справедливы теоремы, аналогичные теоремам Михлина:

Пусть система (1) *имеет не более одного решения в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}_0 = H_A \times H_B$ *и пусть оператор* $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$, *где* $T_2 = A^{-1}K$, $T = B^{-1}L$, *вполне непрерывен в* $\boldsymbol{H}_0$. *Тогда приближенные решения* (1), *построенные по методу Галеркина, сходятся в смысле сходимости в пространстве* $\boldsymbol{H}_0$ *к точному решению этой системы.*

Если оператор $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$ *вполне непрерывен в* $\boldsymbol{H}_0$, *то метод Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных значений системы* (6) *приводит к сходящемуся процессу.*

Указывается способ, по которому можно найти полную систему в $\boldsymbol{H}_0$. Рассматривается система (7); ее приближенное решение строим в виде (8). Изложенный метод приводит к системе $2n$ линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. В заключение приводятся примеры.

Summary

AN APPROXIMATE SOLUTION FOR A SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS BY GALERKIN'S METHOD

JOSEF KOLOMÝ

Galerkin's method for systems of functional equations as formulated by Mihklin [1], is generalised; the analogues of Mikhlin's theorems are as follows.

Suppose that the system (1) *has only one solution in the Hilbert space* $\boldsymbol{H}_0 = H_A \times H_B$, *and that the operator* $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$ *with* $T_2 = A^{-1}K$, $T_1 = B^{-1}L$, *is completely continuous in* $\boldsymbol{H}_0$. *Then Galerkin's solutions of the system* (1) *are convergent in the norm of the space* $\boldsymbol{H}_0$ *to the exact solutions of the system* (1).

Let $\boldsymbol{T}u = \{T_2 u_2, T_1 u_1\}$ *be a completely continuous operator in the space* $\boldsymbol{H}_0$; *then Galerkin's method for the calculation of eigenvalues of the system* (6) *is convergent in the space* $\boldsymbol{H}_0$. A method is given by which it is possible to find a complete set in the space $\boldsymbol{H}_0$. An approximate solution of the system (7) is found in the form (8). The coefficients a_k, b_k; $k = 1, 2, \ldots, n$ are determined by $2n$ linear algebraic equations. The paper concludes with some examples.