Miroslav Šisler

O konvergenci iteračních metod řešení soustavy nelineárních rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 2, 141–150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102699

O KONVERGENCI ITERAČNÍCH METOD ŘEŠENÍ SOUSTAVY NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Miroslav Šisler

(Došlo dne 4. prosince 1958.)

V článku jsou podány postačující podmínky pro konvergenci iteračních metod řešení soustav nelineárních rovnic a některé odhady pro chybu. Je uveden jeden numerický příklad.

Při numerickém výpočtu řešení soustav n nelineárních rovnic o n neznámých se často používá tzv. iteračních metod (obvykle to bývá Newtonova iterační metoda a některé jiné). Podstata těchto iteračních metod spočívá v tom, že se počítá postupně posloupnost bodů $\mathbf{x}_\nu = (x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n})$ (tzv. aproximací), $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, kde $\mathbf{x}_0$ je dostatečně blízká aproximace řešení $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ soustavy rovnic. Přitom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ je definována takto:

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu) ,$$

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, φ_i jsou vzhledem k soustavě rovnic vhodně volené funkce. Jestliže takto sestrojená posloupnost aproximací konverguje k řešení $\mathbf{a}$, platí za předpokladu spojitosti funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ v bodě $\mathbf{a}$ rovnost $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Tak např. Newtonovu iterační metodu pro soustavu rovnic $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ obdržíme, volíme-li $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{F}^{-1}$ je inversní matice k funkční matici

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} .$$

Pokud $\mathbf{F}^{-1}$ existuje v bodě $\mathbf{a}$, potom zřejmě $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$, neboť $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$.

Veškeré další úvahy se budou díti zásadně v E_n a budeme přitom předpokládat, že $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou libovolné reálné funkce na E_n mající totální diferenciál až do řádu $N + 1$ (význam čísla N bude patrný z dalšího výkladu) v celém svém definičním oboru.

Definice 1. *Iterační metoda daná funkcí φ jest řádu N v bodě $\mathbf{a}$, jestliže $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$ a všechny parciální derivace funkcí φ_i, $i = 1, \ldots, n$, až do řádu $N - 1$, jsou v bodě $\mathbf{a}$ rovny nule a alespoň jedna parciální derivace řádu N je v bodě $\mathbf{a}$ od nuly různá.*

Definice 2. *Iterační metoda daná funkcí φ jest řádu N v oblasti $\Omega \subset \mathsf{E}_n$, jestliže jest řádu N v každém bodě $\mathbf{a} \in \Omega$, pro který $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$.*

V prostoru E_n zavedeme nyní metriku ϱ takto: Je-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, potom

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| .$$

Definice 3. *Chybou aproximace $\mathbf{x}_\nu$ nazýváme číslo*

$$\delta_\nu = \varrho(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{a}) .$$

Definice 4. *Opravou aproximace $\mathbf{x}_\nu$ nazýváme číslo*

$$d_\nu = \varrho(\mathbf{x}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) .$$

Dále zavedeme toto označení: $\mathsf{K}[\mathbf{y}, \mu]$ značí množinu všech bodů $\mathbf{x}$, pro které je $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqq \frac{\mu}{2}$.

Věta 1. *Nechť v $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ leží alespoň jeden bod $\mathbf{a}$ takový, že $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Nechť*

$$0 < \lambda < \alpha, \quad \alpha = \frac{2}{\left(\frac{1}{N!} n^N P\right)^{\frac{1}{N-1}}},$$

N řád iterace v bodě $\mathbf{a}$, $N \geqq 2$, $n \geqq 2$, $P = \max Q_{i;k_1,\ldots,k_n}$, $i = 1, \ldots, n$, $k_1 + \ldots + k_n = N$, $k_n \geqq 0, \ldots, k_n \geqq 0$,

$$Q_{i;k_1,\ldots,k_n} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]} \left| \frac{\partial^N \varphi_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} (\mathbf{x}) \right| .$$

Potom pro posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, $\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu)$ platí:

(1) 1. $\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \delta_\nu^N$;

2. *posloupnost konverguje k $\mathbf{a}$;*

3. *$\mathbf{a}$ je jediný bod v $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, pro který $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$.*

Důkaz. I. Protože iterace je řádu N v bodě $\mathbf{a}$, je

$$(2) \quad x_{\nu,i} - a_i = \frac{1}{N!} \left[(x_{\nu-1,1} - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_{\nu-1,n} - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^N \varphi_i (\mathbf{p}_{\nu-1,i}) ,$$

$$\mathbf{p}_{\nu-1,i} = \xi_{\nu-1,i} \mathbf{x}_{\nu-1} - (1 - \xi_{\nu-1,i})\, \mathbf{a},\ \xi_{\nu-1,i} \in (0, 1),\ i = 1, \ldots, n .$$

Nyní dokážeme indukcí, že $\delta_\nu \leqq \frac{\lambda}{2}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Protože $\mathbf{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, je

$\delta_0 \leqq \frac{\lambda}{2}$. Předpokládejme nyní, že $\delta_{\nu-1} \leqq \frac{\lambda}{2}$. Potom zřejmě je $\mathbf{x}_{\nu-1} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, tedy $\mathbf{p}_{\nu-1} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Je však nyní patrné, že hranatá závorka v (2) je součtem n^N sčítanců tvaru $\frac{\partial^N \varphi_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} (\mathbf{p}_{\nu-1,i}) (x_{\nu-1,1} - a_1)^{k_1} \ldots (x_{\nu-1,n} - a_n)^{k_n}$, kde $k_1 + \ldots + k_n = N$, $k_1 \geqq 0, \ldots, k_n \geqq 0$. Je tedy $|x_{\nu,i} - a_i| \leqq \frac{1}{N!} n^N P \delta_{\nu-1}^N$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ takže

$$\delta_\nu \leqq \frac{1}{N!} n^N P \delta_{\nu-1}^N = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \delta_{\nu-1}^N < \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{N-1} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}. \tag{3}$$

Protože platí $\delta_\nu \leqq \frac{\lambda}{2}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, je $\mathbf{x}_\nu \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, neboť $\varrho(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_0) \leqq \varrho(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{a}) + \varrho(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}) = \delta_\nu + \delta_0 \leqq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$. Kromě toho je $\mathbf{p}_{\nu,i} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, n$, takže ze (2) plyne

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \delta_\nu^N, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

II. Platí $\frac{2}{\alpha} \delta_0 \leqq \frac{2}{\alpha} \frac{\lambda}{2} < 1$. Protože

$$\frac{2}{\alpha} \delta_\nu \leqq \left(\frac{2}{\alpha} \delta_{\nu-1}\right)^{N^1} \leqq \ldots \leqq \left(\frac{2}{\alpha} \delta_0\right)^{N^\nu},$$

je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$, tedy $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$ a tvrzení 2 je dokázáno.

III. Nyní dokážeme, že $\mathbf{a}$ je jediný bod v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ takový, že $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Nechť $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$, $\mathbf{a}' \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $\mathbf{a}' = \varphi(\mathbf{a}')$. Označíme-li $\delta_\nu' = \varrho(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{a}')$, pak stejně jako (1) se dokáže nerovnost $\delta_{\nu+1}' \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \delta_\nu'^N$ a odtud plyne, že $\lim\limits_{\nu\to\infty} \delta_\nu' = 0$, takže $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}' = \mathbf{a}$, což je spor.

Věta 2. *Nechť v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ leží alespoň jeden bod $\mathbf{a}$ takový, že $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Nechť iterace je řádu N v bodě $\mathbf{a}$, P, α mají stejný význam jako ve větě 1.*

Buď dále $0 < \Delta < 1$. Je-li $0 < \lambda < \alpha$, je $\mathbf{a}$ jediným bodem v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, pro který $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Dále existuje přirozené číslo ν_0 takové, že $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{N^{\nu_0}} \leqq \Delta$, a že pro všechna přirozená čísla $\nu \geqq \nu_0$ platí následující odhady chyby:

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N} d_\nu^N, \tag{4}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}} d_\nu^N \left[1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N} d_\nu^{N-1}\right]. \tag{5}$$

Důkaz. Bod $\mathbf{a}$ je v důsledku věty 1 jediný v $K[\mathbf{x}_0, \lambda]$. Podle věty 1 platí pro $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{2}{\alpha}\,\delta_\nu \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\,\delta_{\nu-1}\right)^{N^1} \leqq \ldots \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\,\delta_0\right)^{N^\nu} \leqq \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{N^\nu}.$$

Protože $\lambda < \alpha$, existuje ν_0, že $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{N^{\nu_0}} \leqq \Delta$. Pro všechna $\nu \geqq \nu_0$ pak platí $\frac{2}{\alpha}\,\delta_\nu \leqq \leqq \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{N^\nu} \leqq \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{N^{\nu_0}} \leqq \Delta$, tedy $\delta_\nu \leqq \frac{\alpha}{2}\,\Delta$. Pro $\nu \geqq \nu_0$ platí podle předcházející nerovnosti a podle (1) $\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{N-1}\Delta^{N-1}\delta_\nu = \Delta^{N-1}\delta_\nu$. Dále platí

$$\delta_\nu = \varrho(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{a}) \leqq \varrho(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_{\nu+1}) + \varrho(\mathbf{x}_{\nu+1}, \mathbf{a}) = d_\nu + \delta_{\nu+1} \leqq d_\nu + \Delta^{N-1}\delta_\nu\,.$$

Odtud $\delta_\nu \leqq \frac{1}{1 - \Delta^{N-1}}\,d_\nu$. Podle (1) platí

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\,d_\nu^N \tag{4}$$

a dále

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}}\,d_\nu^{N-1}\,\delta_\nu\,, \tag{6}$$

$$\delta_\nu \leqq \delta_{\nu+1} + d_\nu \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\,d_\nu^N + d_\nu = \tag{7}$$

$$= d_\nu\left[1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\,d_\nu^{N-1}\right].$$

Z (6) a (7) dostaneme

(5)
$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}}\,d_\nu^N\left[1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{N-1}\frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\,d_\nu^{N-1}\right], \quad \nu \geqq \nu_0\,.$$

V následující větě 3 již není třeba předpokládat existenci bodu $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$.

Věta 3. *Buď N přirozené číslo,*

$$P_K = \max Q_{i;k_1,\ldots,k_n},\ K = 1, \ldots, N,\ i = 1, \ldots, n,\ k_1 + \ldots + k_n = K\,,$$

$$k_1 \geqq 0, \ldots, k_n \geqq 0,\ Q_{i;k_1,\ldots,k_n} = \sup_{\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]}\left|\frac{\partial^K \varphi_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x})\right|,$$

a nechť d_0 vyhovuje těmto podmínkám:

$$d_0 < \frac{1}{2}\,\frac{N!}{n^N P_N}\,, \tag{8}$$

$$\frac{1}{1!}\,nP_1 + \frac{1}{2!}\,n^2P_2d_0 + \ldots + \frac{1}{N!}\,n^NP_Nd_0^{N-1} < \frac{1}{2^{N-1}}\,. \tag{9}$$

Potom v $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$ *existuje alespoň jeden bod* $\mathbf{a}$ *takový, že* $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. *Je-li nyní iterace řádu* N *v oblasti* Ω, $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0] \subset \Omega$, *potom pro posloupnost* $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, $\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu)$, *platí:*

1. *v* $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$ *leží právě jeden bod* $\mathbf{a}$ *takový, že* $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$ *a je* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$;

2. $$\delta_{\nu+1} \leqq \frac{2}{1!}\, nP_1 d_\nu + \frac{2}{2!}\, n^2 P_2 d_\nu^2 + \ldots + \frac{2}{N!}\, n^N P_N d_\nu^N \leqq$$
$$\leqq 2P\,(e^{nd_\nu} - 1) + \frac{2}{N!}\, n^N P_N d_\nu^N,\; P = \max\,(P_1, \ldots, P_{N-1})\,;$$

3. *je-li* $0 < \Delta < 1$, $\gamma = \dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{N!}\, n^N P_N\right)^{\frac{1}{N-1}}}$, *potom existuje přirozené číslo* ν_0 *takové, že* $\left(\dfrac{4}{\gamma}\, d_0\right)^{N^{\nu_0}} \leqq \Delta$ *a pro všechna* $\nu \geqq \nu_0$ *platí následující odhady chyby:*

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\, d_\nu^N\,, \tag{11}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}}\, d_\nu^N \left[1 + \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\, d_\nu^{N-1}\right]. \tag{12}$$

Důkaz. I. Nejprve dokážeme indukcí, že $d_{\nu+1} < \frac{1}{2} d_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Protože $x_{\nu+1,i} = \varphi_i(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n})$, je

$$x_{\nu+1,i} - x_{\nu,i} = \frac{1}{1!}\left[(x_{\nu,i} - x_{\nu-1,1})\, \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_{\nu,n} - x_{\nu-1,n})\, \frac{\partial}{\partial x_n}\right] \varphi_i\,(\mathbf{x}_{\nu-1}) + \tag{13}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{1}{N!}\left[(x_{\nu,1} - x_{\nu-1,1})\, \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_{\nu,n} - x_{\nu-1,n})\, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^N \varphi_i\,(\mathbf{p}_{\nu-1,i})\,,$$

$$\mathbf{p}_{\nu-1,i} = \xi_{\nu-1,i}\mathbf{x}_{\nu-i} + (1 - \xi_{\nu-1,i})\, \mathbf{x}_\nu,\; \xi_{\nu-1,i} \in (0, 1),\; i = 1, \ldots, n\,.$$

Protože $\mathbf{x}_1 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, $\mathbf{p}_{0,i} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, je podle (13)

$$d_1 \leqq \frac{1}{1!}\, nP_1 d_0 + \frac{1}{2!}\, n^2 P_2 d_0^2 + \ldots + \frac{1}{N!}\, n^N P_N d_0^N =$$
$$= d_0 \left(\frac{1}{1!}\, nP_1 + \frac{1}{2!}\, n^2 P_2 d_0 + \ldots + \frac{1}{N!}\, n^N P_N d_0^{N-1}\right) < \frac{1}{2^{N-1}}\, d_0 \leqq \frac{1}{2}\, d_0\,.$$

Předpokládejme nyní, že $d_{i+1} < \dfrac{1}{2}\, d_i$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$. Potom je $\mathbf{x}_i \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, $i = 0, 1, \ldots, \nu + 1$, neboť

$$\varrho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) \leqq \varrho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}) + \varrho(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i-2}) + \ldots + \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) =$$
$$= d_{i-1} + d_{i-2} + \ldots + d_0 < d_0\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}}\right) < 2d_0\,.$$

Protože nyní $\mathbf{x}_{\nu+1} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, $\mathbf{p}_{\nu,i} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, je podle (13)

$$
\begin{aligned}
d_{\nu+1} &\leqq \frac{1}{1!} nP_1 d_\nu + \frac{1}{2!} n^2 P_2 d_\nu^2 + \ldots + \frac{1}{N!} n^N P_N d_\nu^N < \\
&< d_\nu \left(\frac{1}{1!} nP_1 + \frac{1}{2!} n^2 P_2 \frac{1}{2^\nu} d_0 + \ldots + \frac{1}{N!} n^N P_N \frac{1}{2^{(N-1)\nu}} d_0^{N-1} \right) < \\
&< d_\nu \left(\frac{1}{1!} nP_1 + \frac{1}{2!} n^2 P_2 d_0 + \ldots + \frac{1}{N!} n^N P_N d_0^{N-1} \right) < \\
&< \frac{1}{2^{N-1}} d_\nu \leqq \frac{1}{2} d_\nu .
\end{aligned}
$$

Protože tedy $d_{\nu+1} < \frac{1}{2} d_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, je $\lim\limits_{\nu \to \infty} d_\nu = 0$. Nyní se snadno dokáže, že $\mathsf{K}[\mathbf{x}_{\nu+1}, 4d_{\nu+1}] \subset \mathsf{K}[\mathbf{x}_\nu, 4d_\nu]$. Nechť $\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_{\nu+1}, 4d_{\nu+1}]$. Potom $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\nu+1}) \leqq 2d_{\nu+1}$ a dále $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\nu) \leqq \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\nu+1}) + \varrho(\mathbf{x}_{\nu+1} \mathbf{x}_\nu) \leqq 2d_{\nu+1} + d_\nu < 2d_\nu$, čili $\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_\nu, 4d_\nu]$. Posloupnost $\{\mathsf{K}[\mathbf{x}_\nu, 4d_\nu]\}_{\nu=0}^\infty$ je tedy posloupností kompaktních množin v E_n, jejichž průměry rovné $4d_\nu$ konvergují k nule, takže existuje $\mathbf{a} \in \bigcap\limits_{\nu=0}^{\infty} \mathsf{K}[\mathbf{x}_\nu, 4d_\nu]$. Protože je $\mathbf{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_\nu, 4d_\nu]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, je $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{x}_\nu) \leqq 2d_\nu$, čili $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$. Protože $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_{\nu+1,i} = a_i$ a $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_i(\mathbf{x}_\nu) = \varphi_i(\mathbf{a})$, je $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$.

II. Protože $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, je podle (2) $\delta_{\nu+1} \leqq \frac{1}{N!} n^N P_N \delta_\nu^N = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \delta_\nu^N$. Je-li však $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$, $\mathbf{a}' = \varphi(\mathbf{a}')$, $\mathbf{a}' \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, platí zřejmě také $\delta'_{\nu+1} \leqq \frac{1}{N!} n^N P_N \delta_\nu'^N = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \delta_\nu'^N$, kde $\delta'_\nu = \varrho(\mathbf{a}', \mathbf{x}_\nu)$. Nyní platí

$$
\frac{2}{\gamma} \delta'_\nu \leqq \left(\frac{2}{\gamma} \delta'_{\nu-1}\right)^N \leqq \ldots \leqq \left(\frac{2}{\gamma} \delta'_0\right)^{N\nu} \leqq \left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N\nu} \tag{14}
$$

a $d_0 < \frac{1}{2} \left(\frac{N!}{n^N P_N}\right)^{\frac{1}{N-1}}$. To je zřejmé, je-li $\frac{N!}{n^N P_N} < 1$, podle (8). Je-li $\frac{N!}{n^N P_N} \geqq 1$, potom kdyby $d_0 \geqq \frac{1}{2} \left(\frac{N!}{n^N P_N}\right)^{\frac{1}{N-1}}$, bylo by $\frac{1}{1!} nP_1 + \ldots + \frac{1}{N!} n^N P_N d_0^{N-1} \geqq \frac{1}{2^{N-1}}$, což je spor s (9). Dostáváme tedy, že

$$
\frac{4}{\gamma} d_0 < 2 \left(\frac{1}{N!} n^N P_N\right)^{\frac{1}{N-1}} \frac{1}{2} \left(\frac{N!}{n^N P_N}\right)^{\frac{1}{N-1}} = 1 . \tag{15}
$$

Ze (13) a (14) vyplývá, že $\lim\limits_{\nu \to \infty} \delta'_\nu = 0$, čili $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}' = \mathbf{a}$, což je spor.

III. Protože $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 4d_0]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, je podle (13)

$$d_{\nu+1} \leqq \frac{1}{1!} nP_1 d_\nu + \frac{1}{2!} n^2 P_2 d_\nu^2 + \ldots + \frac{1}{N!} n^N P_N d_\nu^N .$$

Kromě toho platí $\delta_{\nu+1} \leqq d_{\nu+1} + d_{\nu+2} + \ldots < d_{\nu+1} + \frac{1}{2} d_{\nu+1} + \ldots < 2d_{\nu+1}$, takže

$$\delta_{\nu+1} \leqq \frac{2}{1!} nP_1 d_\nu + \frac{2}{2!} n^2 P_2 d_\nu^2 + \ldots + \frac{2}{N!} n^N P_N d_\nu^N \leqq \tag{10}$$

$$\leqq 2P\,(e^{nd_\nu} - 1) + \frac{2}{N!} n^N P_N d_\nu^N .$$

IV. Protože je $\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \delta_\nu^N$, je stejně jako v (14) $\frac{2}{\gamma}\delta_\nu \leqq \left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N\nu}$ a v důsledku (15) existuje přirozené číslo ν_0 tak, že $\left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N\nu_0} \leqq \Delta$. Pro všechna $\nu \geqq \nu_0$ pak platí

$$\frac{2}{\gamma}\delta_\nu \leqq \left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N\nu} \leqq \left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N\nu_0} \leqq \Delta$$

a tedy $\delta_\nu \leqq \frac{\gamma}{2}\Delta$. Nyní stejným postupem jako v důkazu věty 2 dostaneme pro $\nu \geqq \nu_0$

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N} d_\nu^N , \tag{11}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}} d_\nu^N \left[1 + \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N} d_\nu^{N-1}\right]. \tag{12}$$

Poznámka. Věta 3 v případě $N = 2$ nabývá zvlášť jednoduchého znění, neboť podmínky (8), (9) se redukují zřejmě na jedinou podmínku

$$\mathrm{d}_0 < \beta,\ \beta = \frac{1 - 2nP_1}{n^2 P_2} > 0 .$$

Jakost odhadů z věty 3 bude nyní zřejmá z následujícího numerického příkladu.

Příklad. Větu 3 budeme aplikovat při řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

$$x^3 - 2xy + 2 = 0 ,$$

$$xy^2 - 2y \quad = 0$$

Newtonovou iterační metodou, která je s výjimkou bodů, ve kterých je funkční determinant soustavy rovnic roven nule, obecně řádu 2.
Volíme

$$\varphi_1 = \frac{2x^4y - 2x^3 + 2}{3x^3y - xy^2 - 3x^2 + 2y},\quad \varphi_2 = \frac{2x^3y^2 - xy^3 + y^2}{3x^3y - xy^2 - 3x^2 + 2y},$$

$x_0 = 1{,}3$, $y_0 = 1{,}6$. Potom $d_0 = 0{,}0385893$, $P_1 = 0{,}1$, $P_2 = 2$. Předpoklady věty 3 jsou zřejmě splněny. Odhady (10), (11), (12) při volbě $\Delta = 8d_0 = 0,3087144$ zní takto:

$$\delta_{\nu+1} \leqq 8,3703773 d_\nu^2 = A_{\nu+1}\,, \tag{11'}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq 5,7863204 d_\nu^2\,[1 + 8,3703773 d_\nu] = B_{\nu+1}\,, \tag{12'}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq 0,4 d_\nu + 8 d_\nu^2 = C_{\nu+1}. \tag{10'}$$

Jakost odhadů je nyní zřejmá z následující tabulky (přesné řešení soustavy je $X = \sqrt[3]{2} \doteq 1,2599210$, $Y = \sqrt[3]{4} \doteq 1,5874011$).

Tabulka

ν	x_ν	y_ν	z_ν	δ_ν	A_ν	B_ν	C_ν
0	1,3000000	1,6000000	0,0385893	0,0400790			
1	1,2614107	1,5864761	0,0014882	0,0014897	0,0124646	0,0114009	0,0273488
2	1,2599225	1,5873975	0,0000036	0,0000036	0,0000185	0,0000129	0,0006130
3	1,2599210	1,5874011		0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000014

Literatura

[1] *F. Rehbock:* Zur Konvergenz des Newtonsche Verfahrens für Gleichungsysteme; Zeit. f. angew. Math. u. Mech., 22 (1942), str. 361—362.

Резюме

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (Miroslav Šisler)

В работе доказаны некоторые достаточные условия для сходимости итерационных методов, при которых последовательность приближений решения определена формулой $\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbf{x}_\nu = (x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n})$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$; φ_i — это относительно к системе уравнений подходящим способом выбранные функции. Главным резултатом работы является следующая теорема: Пусть N — натуральное число, $P_k = \max Q_{i;k_1,\ldots,k_n}$, $K = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k_1 + \ldots + k_n = K$, $k_1 \geqq 0, \ldots, k_n \geqq 0$, где $Q_{i;k_1,\ldots,k_n} = \sup\limits_{|x_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0} \left| \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x}) \right|$, и пусть $d_0 = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{1,i} - x_{0,i}|$ удоблетворяет следующим условиям: $d_0 < \dfrac{1}{2} \dfrac{N!}{n^N P_N}$, $\dfrac{1}{1!} nP_1 + \dfrac{1}{2!} n^2 P_2 d_0 + \ldots + \dfrac{1}{N!} \cdot n^N P_N d_0^{N-1} < \dfrac{1}{2^{N-1}}$. Тогда существует хотя бы одна

точка $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ такая, что $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |a_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0$ и $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Если итерация порядка N в области $\Omega \subset \mathsf{E}_n$ содержащей множество точек $\mathbf{x}$, для которых $\max\limits_{=1,\ldots,n} |x_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0$, то для последовательности $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, $\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu)$ справедливы следующие утверждения:

1. Существует только одна точка $\mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$,

$$\max_{i=1,\ldots,n} |a_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0 \text{ и } \lim_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}\,;$$

2. $\delta_{\nu+1} \leqq \frac{2}{1!} nP_1 d_\nu + \frac{2}{2!} n^2 P_2 d_\nu + \ldots + \frac{2}{N!} n^N P_N d_\nu^N \leqq 2P\,(\mathrm{e}^{nd_\nu} - 1) + $
$+ \frac{2}{N!} n^N P_N d_\nu^N$,

где $P = \max\,(P_1, \ldots, P_{N-1})$, $\delta_{\nu+1} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu+1,i} - a_i|$, $d_\nu =$
$= \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu+1,i} - x_{\nu,i}|$;

3. если $0 < \Delta < 1$, $\gamma = \dfrac{2}{\left(\frac{1}{N!} n^N P_N\right)^{\frac{1}{N-1}}}$, то существует натуральное число ν_0 такое, что $\left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N_{\nu_0}} \leqq \Delta$ и для всех натуральных $\nu \geqq \nu_0$ имеют место следующие оценки ошибки:

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\, d_\nu^N,\quad \delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}}\,.$$
$$.\, d_\nu^N \left[1 + \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N}\, d_\nu^{N-1}\right].$$

Притом мы говорим, что итерация, определенная функцией φ, есть порядка N в области $\Omega \subset \mathsf{E}_n$, если она порядка N в каждой точке $\mathbf{a} \subset \Omega$, для которой $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$. Итерация, далее, будет порядка N в точке $\mathbf{a}$, для которой $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$, если все частные производные порядка $1, 2, \ldots, N - 1$ функцией φ_i, $i = 1, \ldots, n$ в точке $\mathbf{a}$ равны нулю и хотя бы одна частная производная порядка N в точке $\mathbf{a}$ не равна нулю.

Zusammenfassung

DIE KONVERGENZ DER ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DER SYSTEME NONLINEARER GLEICHUNGEN

MIROSLAV ŠISLER

In der Arbeit sind einige ausreichende Bedingungen für die Konvergenz der Iterationsverfahren nachgewiesen, für die man die Folge der Approxi-

mationen der Lösung mit Hilfe der Formel $\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbf{x}_\nu = (x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n})$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ definiert, wobei φ_i mit Rücksicht auf das System der Gleichungen geeignet gewählte Funktionen sind. Das Hauptresultat der Arbeit ist folgender Satz: Sei N eine natürliche Zahl, $P_k = \max Q_{i;k_1, \ldots, k_n}$, $K = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, n, k_1 + \ldots + k_n = K$, $k_1 \geqq 0, \ldots$ $\ldots, k_n \geqq 0$, $Q_{i;k_1, \ldots, k_n} = \sup\limits_{|x_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} (\mathbf{x}) \right|$, und $d_0 = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{1,i} - - x_{0,i}|$ soll diese Bedingungen erfüllen: $d_0 < \frac{1}{2} \frac{N!}{n^N P_N}$, $\frac{1}{1!} n P_1 + \frac{1}{2!} n^2 P_2 d_0 + + \ldots + \frac{1}{N!} n^N P_N d_0^{N-1} < \frac{1}{2^{N-1}}$. Dann existiert wenigstens ein Punkt $\mathbf{a} = = (a_1, \ldots, a_n)$ so, dass $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |a_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0$ und $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$ ist. Falls die Iteration die Ordnung N im Bereich $\Omega \subset \mathsf{E}_n$ hat, der die Menge der Punkte $\mathbf{x}$, für die $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{0,i}| \leqq 2d_0$ ist enthält, dann gelten für die Folge $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, $\mathbf{x}_{\nu+1} = \varphi(\mathbf{x}_\nu)$ diese Behauptungen:

1. Es existiert nur ein einziger Punkt $\mathbf{a}$ und zwar so, dass $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |a_i - x_{0\,i}| \leqq 2d_0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$ ist;

2. $\delta_{\nu+1} \leqq \frac{2}{1!} nP_1 d_\nu + \frac{2}{2!} n^2 P_2 d_\nu^2 + \ldots + \frac{2}{N!} n^N P_N d_\nu^N \leqq 2P(e^{nd_\nu} - 1) + \frac{2}{N!} \cdot \cdot n^N P_N d_\nu^N$, $P = \max (P_1, \ldots, P_{N-1})$, $\delta_{\nu+1} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu+1,i} - a_i|$, $d_\nu = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu+1,i} - x_{\nu,i}|$;

3. falls $0 < \Delta < 1$, $\gamma = \frac{2}{\left(\frac{1}{N!} n^N P_N\right)^{\frac{1}{N-1}}}$ ist, dann existiert eine natürliche Zahl ν_0 so, dass $\left(\frac{4}{\gamma} d_0\right)^{N^{\nu_0}} \leqq \Delta$ gilt, und für alle natürlichen $\nu \geqq \nu_0$ die folgenden Fehlerabschätzungen gelten:

$$\delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N} d_\nu^N,\ \delta_{\nu+1} \leqq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{2}{(1 - \Delta^{N-1})^{N-1}} d_\nu^N \cdot$$
$$\cdot \left[1 + \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{N-1} \frac{1}{(1 - \Delta^{N-1})^N} d_\nu^{N-1}\right].$$

Wir definieren dabei, dass die mittels der Funktion φ gegebene Iteration die Ordnung N im Bereich $\Omega \subset \mathsf{E}_n$ hat, falls sie in jedem Punkte $\mathbf{a}$, für welchen $\mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a})$ gilt, die Ordnung N hat, falls alle partiellen Ableitungen der Funktionen φ_i, $i = 1, \ldots, n$ der Ordnung $1, 2, \ldots, N-1$ im Punkte $\mathbf{a}$ gleich Null sind und wenigstens eine partielle Ableitung der Ordnung N im Punkte $\mathbf{a}$ von Null verschieden ist.