Emil Vitásek

Über die quasistationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 2, 109–140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102698

SVAZEK 5 (1960) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 2

ÜBER DIE QUASISTATIONÄRE LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

EMIL VITÁSEK

(Eingegangen am 9. Februar 1959.)

In dieser Arbeit wird die Existenz und Eindeutigkeit eines bestimmten Problems der Wärmeleitungsgleichung bewiesen.

EINLEITUNG

Beim Bau grosser Betonmassive, wie zum Beispiel Staumauern, vorallem Schwergewichtsmauern, spielt die Erwärmung und die dadurch hervorgerufene Deformation der Mauer auf Grund der Hydratationswärmeentwicklung des Zements bei seiner Erhärtung eine grosse Rolle. Damit der thermische Spannungszustand nicht das vorgeschriebene Mass überschreitet, wird gewöhnlich so vorgegangen, dass nicht stetig betoniert wird, sondern in Schichten von konstanter Höhe; z. Bspl. wird während 1—2 Tagen eine Schicht von 2—3 m Höhe gelegt und nach einer Pause von 7—8 Tagen wird wieder während 1—2 Tagen die weitere Schicht gelegt. Für das Studium des thermischen Spannungszustandes ist es notwendig und wichtig das Wärmefeld in der Mauer zu kennen. Mit dieser Thematik beschäftigten sich z. Bspl. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Diese Arbeit behandelt ein analoges Problem jedoch von einem anderen Standpukt aus. Wir setzen voraus, dass bei dem oben angeführten Arbeitsvorgang die äusseren Bedingungen, wie Anfangstemperatur der Mischung, Lufttemperatur usw. konstant sind. Dann können wir erwarten und die Praxis bestätigt dies auch, dass in dem Staumauerkörper ein quasistationärer Zustand in dem Sinne entsteht, dass in der n-ten Arbeitsschicht in der Zeit t das Wärmefeld ähnlich sein wird wie in der $n - 1$ in der Zeit $t - t_0$, wo t_0 die notwendige Zeitdauer zum Beenden eines Arbeitszyklus ist. Theoretisch werden die Wärmefelder zweier nacheinander gehenden Schichten gleich nur für $n \to \infty$. Praktisch wird der quasistationäre Zustand schon nach dem Auflegen einigen Schichten erreicht.

Die vorgelegte Arbeit behandelt den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der quasistationären Lösung den für eindimensionalen und linearen Fall.

Dem nichtlinearen Fall mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Hydratationsgeschwindigkeit des Zements von der Temperatur ist eine weitere Arbeit gewidmet. Die eigentliche Arbeit wird in vier Absätzen zusammengefasst.

Der erste Absatz, die Einleitung, befasst sich mit der mathematischen Formulierung des Problems. Wie schon früher erwähnt, besteht der quasistationäre Zustand theoretisch in einer unendlich hohen Mauer (nach dem Auflegen von unendlich vielen Arbeitsschichten). Darum können wir ihn auch folgendermassen beschreiben: Sei der Temperaturverlauf in unendlich vielen Arbeitsschichten gegeben. (Da es sich um einen eindimensionalen Fall handelt, ist der Temperaturverlauf eine Funktion einer Veränderlichen im Intervall $\langle 0, \infty)$.) Wir legen eine weitere Schicht auf und suchen den Temperaturverlauf in dem so entstandenen Körper. Wir sagen, dass eine quasistationäre Lösung unseres Problems existiert, wenn in der Mauer ein solcher Temperaturverlauf existiert, dass nach dem Auflegen einer weiteren Schicht sich dieser, nach einer Zeitdauer t_0, um eine Arbeitsschicht verschoben wiederholt. Um den Existenzbeweis zu vereinfachen, suchen wir die quasistationäre Lösung in der Klasse der Funktionen mit einem bestimmten Wachsen im Unendlichen.

Im zweiten Absatz wird die Existenz dieser quasistationären Lösung mit Hilfe des Fixpunktsatzes (siehe [10]) bewiesen.

Im dritten befassen wir uns mit der Eindeutigkeit der quasistationären Lösung und der Konvergenz der schrittweisen Näherungen im folgenden Sinne: Wir wählen einen beliebigen Temperaturverlauf in unendlich vielen Arbeitschichten, legen eine weitere auf und berechnen die Temperatur zu Ende des weiteren Arbeitzyklus. Die so entwickelte Temperatur nehmen wir von neuem als Anfangstemperatur und wiederholen den Vorgang. Der so entstandene Algorithmus konvergiert zur quasistationären Lösung.

Endlich im letzten, vierten Absatz, befassen wir uns mit der Beschräktheit der quasistationären Lösung unter der Voraussetzung, dass die inneren Wärmequellen eine endliche Wärmemenge entwickeln.

1. PROBLEMSTELLUNG

Definition 1.1. *Es sei B eine Klasse von Funktionen $u(x, t)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $u(x, t)$ ist im Intervall $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T\rangle$ definiert und stetig mit Ausnahmen endlich vieler Punkte auf der Halbgeraden $0 \leqq x < \infty, t = 0$ in deren Umgebung sie beschränkt ist;

(b) sei

$$f(x) = \sup_{t \in (0,T)} |u(x, t)| ,$$

dann ist $u(x, t) \in B$, wenn die Funktion $f(x)/1 + x^3$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ beschränkt ist.

Definition 1.2. *Das Problem No 1 ist folgendes: Es ist die Funktion* $u(x, t) \in B$ *zu bestimmen, für welche gilt:*

(*a*) *Die Funktion* $u(x, t)$ *hat in*

$$R_k = \underset{(x,t)}{E}[kb < x < (k + 1)\, b,\ 0 < t < T]$$

($b > 0$ *beliebig, fest gewählt*), $k = 0, 1, 2, \ldots$, *stetige partielle Ableitungen* $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$ *und erfüllt folgende Gleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t + kt_0)\,, \quad (x, t) \in R_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$a =$ *konst.* > 0, $t_0 > 0$ *beliebig, fest;* $q(t)$ *ist in* $\langle 0, \infty)$ *stetig, nichtnegativ und beschränkt;*

(*b*) *die Ableitungen* $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$ *sind auf dem Gebiet* $(0, \infty) \times (0, T)$ (*d. h. auch auf den Abschnitten* $x = kb$, $0 < t < T$, $k = 1, 2, \ldots$) *stetig;*

(*c*) (2) $$u(x, 0) = p(x) \quad \text{für} \quad x > 0, x \neq b\,,$$

$p(x)$ *ist im Intervall* $\langle 0, \infty)$ *stetig mit Ausnahmen des Punktes* b, *in dessen Umgebung sie beschränkt ist und*

$$\sup_{x \in \langle 0, \infty)} \frac{|p(x)|}{1 + x^3} < \infty\,,$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < T\,. \tag{3}$$

Satz 1.1. *Es existiert höchstens eine einzige Lösung des Problems No 1.*

Lemma 1.1. *Es sei*

$$D = \underset{(x,t)}{E}[0 < x < \alpha, 0 < t < T]\,,\ H = \underset{(x,t)}{E}[x = 0, 0 < t \leqq T] \cup \underset{(x,t)}{E}[0 \leqq x \leqq$$
$$\leqq \alpha, t = 0] \cup \underset{(x,t)}{E}[x = \alpha, 0 < z \leqq T]\,,$$

und $u(x, t)$ *definiert und beschränkt in* D, *für die*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\frac{\partial u}{\partial t} \leqq 0 \quad in \quad D \tag{4}$$

gilt und sie habe eine nichtnegative stetige Fortsetzung auf H *mit Ausnahme endlich vieler Punkte. Dann ist* $u \geqq 0$ *überall in* D.

Beweis: Ohne Verletzung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass es nur einen Punkt auf dem Geradenabschnitt $0 \leqq x \leqq \alpha$, $t = 0$ gibt, in dem die Funktion $u(x, t)$ keine stetige Forsetzung auf H hat. Es sei dieser Punkt $(x_0, 0)$ und wir setzen weiter voraus, dass für einen beliebigen Punkt $(x_1, t_1) \in D$

$$u(x_1, t_1) = c < 0 \tag{5}$$

gilt. Wir betrachten zuerst die Funktion

(6) $$f(x, t, h) = \frac{1}{\sqrt{t+h}} e^{-\frac{a(x-x_0)^2}{4(t+h)}}, \quad h > 0$$

(siehe [1]). Diese Funktion erfüllt in D die Gleichung

(7) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

und weiter gilt

(8) $$f(x, t, h) > \frac{e^{-1}}{\sqrt{t+h}} \quad \text{für} \quad 4(t+h) > a(x-x_0)^2$$

(d. h. innerhalb der Parabel $4(t+h) = a(x-x_0)^2$), sodass wir ein genügend kleines h und ein genügend kleines $r > h$ so wählen können, dass auf dem Bogen K mit dem Halbmesser r und dem Mittelpunkt im Punkte $(x_0, -h)$ aus D diese Funktion grösser als eine vorausgewählte Konstante ist. Es sei weiter $M = \sup_D |u(x, t)|$ und wir betrachten die Funktion

(9) $$g(x, t, h) = -c\sqrt{t_1} \frac{1}{\sqrt{t+h}} e^{-\frac{a(x-x_0)^2}{4(t+h)}}.$$

Wir wählen h und r so, dass

(10) $$g(x, t, h) > M$$

auf K gilt, was mit Rücksicht auf das Vorhergehende möglich ist. Das Gebiet, das aus D ensteht, wenn wir die geschlossene Umgebung des Punktes $(x_0, 0)$, die durch den Bogen K und einen Teil der Geraden $t = 0$ gebildet wird, entfernen, bezeichnen wir mit D' und seine parabolische Grenze mit H'; es gilt

(11) $$g + u \geqq 0 \quad \text{auf } H',$$

denn g ist eine nichtnegative Funktion, $u \geqq 0$ auf $H' - K$ und $g \geqq M$ auf K nach (10). Also nach dem Satz über das Minimum der Wärmeleitungsgleichung (siehe z. Bsp. [11]) gilt

(12) $$g + u \geqq 0 \quad \text{überall in } D',$$

speziell

$$-u(x_1, t_1) = -c \leqq g(x_1, t_1, h) = -c\sqrt{t_1} \frac{1}{\sqrt{t_1+h}} e^{-\frac{a(x_1-x_0)^2}{4(t_1+h)}} < -c$$

und das führt jedoch zu einem Widerspruch der das Lemma 1.1 beweist.

Beweis von Satz 1.1: u_1 und u_2 seien zwei Lösungen des Problem No 1. Wir setzen $v = u_1 - u_2$; für die Funktion v existieren positive Konstanten α_0, α_1 so, dass

(13) $$|v(x, t)| \leqq \alpha_0 + \alpha_1 x^3$$

gilt. Die Funktion $v(x, t)$ erfüllt weiter auf dem ganzen Gebiet $(0, \infty) \times (0, T)$ (einschliesslich des Geradenabschnittes $x = kb$, $0 < t < T$, $k = 1, 2, \ldots$) die Gleichung (7), wie man sich leicht aus der Eigenschaft (b) der Def. 1.2 und dem Mittelwertsatz überzeugen kann. Die Funktion $v(x, t)$ ist stetig zu den Nullwerten auf den Abschnitt $x = 0$, $0 \leqq t < T$ und die Halbgerade $t = 0$, $0 < x < \infty$ fortsetzbar mit Ausnahmen des Punktes $(b, 0)$ in dessen Umgebung sie beschränkt ist. Es ist zu beweisen, dass $v \equiv 0$ in $(0, \infty) \times (0, T)$ ist. Setzen wir also vorerst voraus, dass in einem beliebigen Punkt $(x_0, t_0) \in (0, \infty) \times \times (0, T)$

(14) $$v(x_0, t_0) = 2\varepsilon > 0$$

gilt. Betrachten wir die Funktion

(15) $$w(x, t) = (ax^2 + 2T)\, t + \frac{a^2}{12}\, x^4$$

(siehe [11]). Diese Funktion ist nichtnegativ in $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T \rangle$ und erfüllt die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a\, \frac{\partial w}{\partial t} \leqq 0\,.$$

Dieselben Eigenschaften hat offenbar auch die Funktion $\varepsilon w(x, t)/w(x_0, t_0)$. Da weiter

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varepsilon\, \frac{a^2}{12}\, x^4}{w(x_0, t_0)\,(\alpha_0 + \alpha_1 x^3)} = \infty$$

gilt ($w(x_0, t_0) > 0$, $\alpha_1 > 0$ nach Voraussetzung), so existiert $x_1 > x_0$ derart, dass

$$\frac{\varepsilon\, \frac{a^2}{12}\, x_1^4}{w(x_0, t_0)} \geqq \alpha_0 + \alpha_1 x_1^3$$

gilt, also ist

$$\frac{\varepsilon w(x_1, t)}{w(x_0, t_0)} \geqq \frac{\varepsilon\, \frac{a^2}{12}\, x_1^4}{w(x_0, t_0)} \geqq \alpha_0 + \alpha_1 x_1^3 > |v(x_1, t)|$$

und die Funktion $\varepsilon w(x, t)/w(x_0, t_0) - v(x, t)$ erfüllt auf dem Rechteck $0 < x < x_1$, $0 < t < T$ die Voraussetzungen aus Lemma 1.1, also gilt auf dem ganzen Rechteck

$$\frac{\varepsilon w(x, t)}{w(x_0, t_0)} - v(x, t) \geqq 0\,,$$

speziell im Punkte (x_0, t_0)

$$2\varepsilon = v(x_0, t_0) \leqq \varepsilon\,,$$

was ein Widerspruch ist. Für den Fall $v(x_0, t_0) = -2\varepsilon < 0$ kann man ganz analog vorgehen. Der Satz 1.1 ist also bewiesen.

Satz 1.2. *Die einzige Lösung des Problems No 1 ist durch die Formel*

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \tag{16}$$

gegeben, wobei

$$u_1(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t}} \right) p(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \tag{17}$$

$$u_2(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \right) z(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}\tau \tag{18}$$

und

$$z(x, t) = q(t + kt_0) \quad \text{für} \quad kb < x < (k+1)\, b\,, \quad 0 < t < T\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

gilt.

Beweis: Für die Funktion $u_1(x, t)$ gilt $u_1(x, t) \in B, \lim\limits_{t \to 0+} u_1(x, t) = p(x)$ in allen Punkten in denen $p(x)$ stetig ist. Die Funktion $u_1(x, t)$ hat stetige Ableitungen $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$ in $(0, \infty) \times (0, T)$ und erfüllt dort die Gleichung

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}\,, \tag{20}$$

wie man sich leicht überzeugen kann. (Siehe z. Bsp. [11].) Wenden wir uns nun der Funktion $u_2(x, t)$ zu. Es gilt

$$u_2(x, t) \in B \quad \text{und} \quad \lim_{t \to 0+} u_2(x, t) = 0\,;$$

(21)

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\infty \left(-\frac{a(x-\xi)}{2\tau}\, e^{-\frac{a(x-\xi)}{2\tau}} + \frac{a(x+\xi)}{2\tau}\, e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4\tau}} \right) z(\xi, t-\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau$$

und die Funktion $\partial u_2/\partial x$ ist in $(0, \infty) \times (0, T)$ stetig, wie aus den bekannten Sätzen über die Parameterableitungen des Integrals folgt (denn die Funktion $z(x, t)$ ist beschränkt, siehe z. Bsp. [12]). Betrachten wir nun die Funktion $\partial^2 u_2/\partial x^2$; dazu schreiben wir die Funktion $\partial u_2/\partial x$ in der Form

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \int_0^t H(x, t, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{22}$$

wo

(23)

$$H(x, t, \tau) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}} \int_0^\infty \left(-\frac{a(x-\xi)}{2\tau}\, e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4\tau}} + \frac{a(x+\xi)}{2\tau}\, e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4\tau}} \right) z(\xi, t-\tau)\, \mathrm{d}\xi$$

ist und weiter

$$(24)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}} \int_0^\infty \left[\left(-\frac{a}{2\tau} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4\tau^2}\right) e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4\tau}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{2\tau} - \frac{a^2(x+\xi)^2}{4\tau^2}\right) e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4\tau}}\right] z(\xi, t-\tau)\, \mathrm{d}\xi$$

gilt. Das letzte Integral können wir mit Hilfe der Integration per partes und dem Umstand, dass

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, t) = 0 \ \text{ für } \ kb < x < (k+1)\, b\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist, auf die Form

$$(25)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{a^{\frac{3}{2}} x}{2\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{ax^2}{4\tau}} z(0+, t-\tau) + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a(x-kb)}{2\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(x-kb)^2}{4\tau}} + \right.$$

$$\left. + \frac{a(x+kb)}{2\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(x+kb)^2}{4\tau}}\right) (z(kb-, t-\tau) - z(kb+, t-\tau))$$

bringen, denn die zuletzt angeschriebene Reihe konvergiert absolut für feste x, t, τ. Es sei weiter $x_0 \in (nb, (n+1)\, b)$, n sei eine fest gewählte ganze nichtnegative Zahl, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $2\delta = \operatorname{Min}(x_0 - nb, (n+1)\, b - x_0)$. Dann gilt

$$(26)\qquad \left|\frac{\partial H}{\partial x}(x, t_0, \tau)\right| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} (a_k(\tau) + b_k(\tau))\,,$$

$$(27)\qquad a_0(\tau) = \frac{a^{\frac{3}{2}}(x_0 + \delta)\, M}{2\sqrt{\pi}\, \tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(x_0-\delta)^2}{4\tau}}, \quad b_0(\tau) = 0\,,$$

$$a_k(\tau) = \frac{a^{\frac{3}{2}}(x_0 + \delta - kb)\, M}{2\sqrt{\pi}\, \tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(x_0-\delta-kb)^2}{4\tau}},$$

$$b_k(\tau) = \frac{a^{\frac{3}{2}}(x_0 + \delta + kb)\, M}{2\sqrt{\pi}\, \tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(x_0+kb-\delta)^2}{4\tau}}$$

für $1 \leqq k \leqq n$,

$$(27)\qquad a_k(\tau) = \frac{a^{\frac{3}{2}}(kb - x_0 + \delta)\, M}{2\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(kb-x_0-\delta)^2}{4\tau}},$$

$$b_k(\tau) = \frac{a^{\frac{3}{2}}(kb + x_0 + \delta)\, M}{2\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a(kb+x_0-\delta)^2}{4\tau}}$$

für $k \geqq n$ ist ($M = \operatorname{Sup} |z(x, t)|$).

Wählen wir $q < 1$ fest. Weil für $k > n$ und $0 < \tau < T$

$$\frac{a_{k+1}(\tau)}{a_k(\tau)} \leqq \frac{(k+1)\,b - x_0 + \delta}{kb - x_0 + \delta}\, e^{-\frac{a}{4T}(2b^2k + b^2 - 2b(x_0+\delta))}$$

gilt, existiert $N > n$ nur von q abhängig und unabhängig von τ so, dass

$$a_k(\tau) \leqq a_N(\tau)\, q^{k-N} \quad \text{für} \quad k > N \tag{28}$$

gilt und weil die Funktion $a_N(\tau)$ im Intervall $(0, T)$ beschränkt ist, folgt hieraus, dass die Reihe $\sum_0^\infty a_k(\tau)$ im Intervall $(0, T)$ gleichmässig konvergent ist. Die Behauptung lässt sich analog für die Reihe $\sum_0^\infty b_k(\tau)$ beweisen, sodass die Reihe $\sum_0^\infty (a_k(\tau) + b_k(\tau))$ im Intervall $(0, T)$ gleichmässig konvergent ist und aus (26) folgt daher (weil die Funktionen $a_k(\tau)$, $b_k(\tau)$ integrierbar sind), dass die Funtion $\partial H/\partial x$ in der Umgebung des Punktes (x_0, t_0) eine von x unabhängige integrierbare Majorante besitzt und folglich

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x_0, t_0) = \int_0^{t_0} \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t_0, \tau)\, d\tau \tag{29}$$

gilt.

Ganz analog kann man sich überzeugen, dass diese Funktion in der Umgebung jedes Punktes (x_0, t_0), $x_0 \neq kb$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ stetig ist. Wir wollen nun das Verhalten der Funktion $\partial^2 u_2/\partial x^2$ für $x \to nb -$ resp. $x \to nb +$, $n = 1, 2, \ldots$ untersuchen. Weil die Reihe (25) in τ für jedes feste $x \neq kb$ gleichmässig konvergent ist, so gilt

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x, t) = P_n(x, t) -$$

$$- a\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{a}(nb-x)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\, \frac{z\left(nb-,\, t - \dfrac{a(nb-x)^2}{4u^2}\right) - z\left(nb+,\, t - \dfrac{a(nb-x)^2}{4u^2}\right)}{2}\, du$$

für

$$x < nb$$

und

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x, t) = P_n(x, t) +$$

$$+ a\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{a}(x-nb)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\, \frac{z\left((nb-,\, t - \dfrac{a(x-nb)^2}{4u^2}\right) - z\left(nb+,\, t + \dfrac{a(x-nb)^2}{4u^2}\right)}{2}\, du$$

für $x > nb$, wo

$$P_n(x,t) = -a\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} z\left(0+, t-\frac{ax^2}{4u^2}\right) du +$$

$$+ a\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}(x-kb)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\frac{z\left(kb-, t-\frac{a(x-kb)^2}{4u^2}\right) - z\left(kb+, t-\frac{a(x-kb)^2}{4u^2}\right)}{2} du -$$

$$- a\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}(kb-x)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\frac{z\left(kb-, t-\frac{a(kb-x)^2}{4u^2}\right) - z\left(kb+, t-\frac{a(kb-x)^2}{4u^2}\right)}{2} du +$$

$$+ a\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}(x+kb)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\frac{z\left(kb-, t-\frac{a(kb+x)^2}{4u^2}\right) - z\left(kb+, t-\frac{a(kb+x)^2}{4u^2}\right)}{2} du$$

und $P_n(x, t)$ ist im Punkte (nb, t) stetig. Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(nb-, t) = P_n(nb, t) - a\frac{z(nb-, t) - z(nb+, t)}{2}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(nb+, t) = P_n(nb, t) + a\frac{z(nb-, t) - z(nb+, t)}{2}.$$

Es sei $x_0 \in (0, \infty)$ fest, $x_0 \neq kb$, $k = 1, 2, \dots$ und $t_0 > 0$. Dann sehen wir unter Anwendung des Satzes 109 aus [12] und analogen Abschätzungen wie im Vorgehenden, dass

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x_0, t_0) = z(x_0, t_0) + \frac{1}{a}\int_0^{t_0}\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t_0, \tau)\, d\tau \tag{31}$$

gilt. Hieraus, aus (29) und (30) folgt die Stetigkeit der Funtion $\partial u_2/\partial t$ in $(0, \infty) \times (0, T)$ und die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = z(x, t) + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad R_k, \tag{32}$$

was zusammen mit (20) und dem Satz 1.1 den völligen Beweis des Satzes 1.2 liefert.

Definition 1.3. *Es sei $f(x)$ eine im Intervall $\langle 0, \infty)$ definierte Funktion.*

Wir definieren den Operator A, welcher der Funktion $f(x)$ eine wieder im Intervall $\langle 0, \infty)$ definierte Funktion zuordnet durch die Vorschrift

$$(Af)(x) = u(x, t_0)\,, \tag{33}$$

wo $u(x, t)$ die Lösung des Problems No 1 aus Definition 1.2 für $t = t_0$ und

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 && \text{für} \quad 0 < x < b\,, \\ p(x) &= f(x - b) && \text{für} \quad b < x < \infty \end{aligned}$$

ist.

Satz 1.3. *Es sei P eine Menge im Intervall $\langle 0, \infty)$ stetiger Funktionen für die*

$$\sup_{x \in (0,\infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^3} < \infty \tag{34}$$

gilt. Der Operator A hat für alle $f \in P$ einen Sinn.

Beweis: Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 1.2.

Definition 1.4. *Die Funktion $f \in M \subset P$ nennen wir eine quasistationäre Lösung des Problems No 1 auf der Menge M, wenn*

$$Af = f \tag{35}$$

gilt.

2. DIE EXISTENZ DER QUASISTATIONÄREN LÖSUNG

Definition 2.1. *Einen Raum P nennen wir die Menge der Funktionen $f(x)$, die im Intervall $\langle 0, \infty)$ definiert und stetig sind und für die*

$$\sup_{x \in \langle 0,\infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^3} < \infty \tag{1}$$

gilt.

Satz 2.1. *Wenn wir die Norm im Raume P durch die Beziehung*

$$\|f\| = \sup_{x \in \langle 0,\infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^3} \tag{2}$$

definieren, so bildet P einen linearen normierten Raum.

Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich richtig.

Satz 2.2. *Es seien C, b_0, b_1 nichtnegative Konstanten und $f \in M$, $M \subset P$ wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) (3) $$\|f\| \leqq C\,,$$

(b) (4) $$\overline{D}f(x) \leqq b_0 + b_1 x\,, \quad \underline{D}f(x) \geqq = (b_0 + b_1 x)\,^{1)}$$

für $x \in \langle 0, \infty)$. Dann ist M kompakt.

[1]) Unter dem Symbol $\overline{D}f(x)$ resp. $\underline{D}f(x)$ verstehen wir

$$\limsup_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{resp.} \quad \liminf_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\,.$$

Lemma 2.1. *Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $\langle a, b\rangle$ für die*

$$\overline{D}f(x) \leqq b_0 + b_1 x\,, \quad \underline{D}f(x) \geqq -(b_0 + b_1 x)$$

für jedes $x \in (a, b)$ gilt. Dann existiert $c_1 \in (a, b)$ so, dass

$$|f(b) - f(a)| \leqq (b - a)(b_0 + b_1 c_1) \tag{5}$$

gilt.

Beweis: Der Beweis folgt leicht aus [13], Satz 87.

Beweis von Satz 2.2: Es sei $\{f_n\}$ eine beliebige Folge, $\{f_n\} \subset M$. Da für jedes n

$$|f_n(x)| \leqq C(1 + x^3)\,,$$

$$\overline{D}f_n(x) \leqq b_0 + b_1 x\,, \quad \underline{D}f_n(x) \geqq -(b_0 + b_1 x)$$

gilt, so ist nach Lemma 2.1 $\{f_n\}$ eine Folge von gleichmässig beschränkten und gleichmässig stetigen Funktionen in Intervall $\langle 0, N\rangle$, $N = 1, 2, \ldots$ und daher lässt sich nach dem Satz von Arzela eine im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ gleichmässig konvergente Folge $\{f_n^{(1)}\}$ auswählen. Aus dieser lässt sich wieder eine Folge $\{f_n^{(2)}\}$ auswählen die im Intervall $\langle 0, 2\rangle$ gleichmässig konvergent ist, usw. Die Diagonalfolge $\{f_n^{(n)}\}$ konvergiert offensichtlich lokal gleichmässig auf dem Intervall $\langle 0, \infty)$. Wir setzen nun

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} f_n^{(n)}(x)\,. \tag{6}$$

Wir beweisen zuerst, dass $\varphi \in M$ ist. Die Funktion $\varphi(x)$ ist offenbar auf $\langle 0, \infty)$ stetig und es gilt $\|\varphi\| \leqq C$. Nach Lemma 2.1 gilt für $h > 0$ und ein fest gewähltes $x \in \langle 0, \infty)$

$$-(b_0 + b_1(x + h)) \leqq \frac{f_n^{(n)}(x + h) - f_n^{(n)}(x)}{h} \leqq b_0 + b_1(x + h)\,.$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang (für ein festes h)

$$-(b_0 + b_1(x + h)) \leqq \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} \leqq b_0 + b_1(x + h)\,. \tag{7}$$

Daraus folgt weiter

$$\sup_{h < \delta} \frac{\varphi(x + b) - \varphi(x)}{h} \leqq b_0 + b_1(x + \delta)\,,$$

$$\limsup_{h \to 0,\, h > 0} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = D^+\varphi(x) \leqq b_0 + b_1 x\,.\text{[2]} \tag{8}$$

---

[2]) Mit dem Symbol $D^+\varphi(x)$ $(D_+\varphi(x))$, $D^-\varphi(x)$ $(D_-\varphi(x))$ bezeichnen wir die obere (untere) derivierte Zahl der Funktion $\varphi(x)$ von links resp. rechts.

Aus (7) erhalten wir analogisch

$$\inf_{h<\delta} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \geqq -(b_0 + b_1(x+\delta)),$$

und daher gilt

$$(9) \qquad \liminf_{h\to 0,\, h>0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = D_+\varphi(x) \geqq -(b_0 + b_1 x).$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Ungleichungen

$$(10) \qquad D^-\varphi(x) \leqq b_0 + b_1 x,$$

$$(11) \qquad D_-\varphi(x) \geqq -(b_0 + b_1 x)$$

beweisen und da

$$\overline{D}\varphi(x) = \operatorname{Sup}\,(D^+\varphi(x),\ D^-\varphi(x)),$$
$$\underline{D}\varphi(x) = \operatorname{Inf}\,(D_+\varphi(x),\ D_-\varphi(x)),$$

gilt, folgt aus (8), (9), (10), (11) sofort

$$\overline{D}\varphi(x) \leqq b_0 + b_1 x, \quad \underline{D}\varphi(x) \geqq -(b_0 + b_1 x),$$

also ist wirklich $\varphi \in M$.

Wir beweisen nun, dass $f_n^{(n)} \to \varphi$ in der Norm des Raumes P gilt, d. h. es gilt

$$(12) \qquad \|f_n^{(n)} - \varphi\| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Für die Funktion $\psi_n(x) = f_n^{(n)}(x) - \varphi(x)$ gilt offensichtlich für jedes $x \in \langle 0, \infty)$

$$(13) \qquad \overline{D}\psi_n(x) \leqq 2(b_0 + b_1 x), \ \underline{D}\psi_n(x) \geqq -2(b_0 + b_1 x).$$

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.1 gilt für jedes $x \in \langle 0, \infty)$

$$|\psi_n(x) - \psi_n(0)| \leqq 2x(b_0 + b_1 x),$$

oder

$$(14) \qquad \frac{\psi_n(0) - 2x(b_0 + b_1 x)}{1 + x^3} \leqq \frac{\psi_n(x)}{1 + x^3} \leqq \frac{\psi_n(0) + 2x(b_0 + b_1 x)}{1 + x^3},$$

und da die Zahlenfolge $\{\psi_n(0)\}$ beschränkt ist, folgt aus (14) die Existenz eines $\alpha > 0$ unabhängig von n so, dass

$$(15) \qquad x > \alpha \Rightarrow \left| \frac{\psi_n(x)}{1 + x^3} \right| < \varepsilon$$

gilt. Die Folge $\{f_n^{(n)}\}$ konvergiert im Intervall $\langle 0, \alpha\rangle$ gleichmässig gegen die Funktion $\varphi(x)$, also konvergiert die Folge $\{\psi_n\}$ im Intervall $\langle 0, \alpha)$ gleichmässig nach Null. Dasselbe gilt offensichtlich auch für die Folge $\{\psi_n(x)/1 + x^3\}$, also existiert ein $N > 0$ so, dass

$$(16) \qquad n > N \Rightarrow \left| \frac{\psi_n(x)}{1 + x^3} \right| < \varepsilon \ \text{für} \ x \in \langle 0, \alpha)$$

gilt. Aus (15) und (16) folgt nun

$$n > N \Rightarrow \|f_n^{(n)} - \varphi\| < \varepsilon .$$

Diese Ungleichung beweist (12), folglich auch unsseren Satz.

Satz 2.3. *Es sei P ein lokal konvexer linearer topologischer Raum. $M \subset P$ sei konvex und kompakt. Es sei A eine stetige Abbildung von M in M. Dann existiert $f_0 \in M$ so, dass*

(17) $$Af_0 = f_0$$

gilt.

Beweis: Siehe [10].

Satz 2.4. *(Die Existenz der quasistationären Lösung.) Es sei $G = \sup\limits_{(0,\infty)} |q(t)|$, t_0, b seien positive Konstanten und $q(t)$ die Funktion nach Definition 1.2,*

$$\alpha = \frac{Gt_0}{b}, \quad b_0 = \frac{2G\sqrt{a}\sqrt{t_0}}{\sqrt{\pi}} + \alpha, \; b_1 = \frac{G\sqrt{a}\sqrt{t_0}}{b\sqrt{\pi}} .$$

Es sei $f \in M$, $M \subset P$ nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

(a) $$0 \leqq f(x) \leqq \alpha x + b\alpha , \quad x \in \langle 0, \infty) ,$$

(b) $$\overline{D}f(x) \leqq b_0 + b_1 x , \quad \underline{D}f(x) \geqq -(b_0 + b_1 x) , \; x \in \langle 0, \infty) .$$

Dann existiert in M eine quasistationäre Lösung des Problems No 1.

Beweis: Den Satz beweisen wir an Hand von Satz 2.3. Wir prüfen nun die Anwendbarkeit dieses Satzes. Die Menge M ist offensichtlich konvex und nach Satz 2.2 auch kompakt. Wir beweisen weiter, dass die in Definition 1.3 definierte Abbildung A stetig auf M ist. Es seien $f_1, f_2 \in M \subset P$. Dann gilt nach der Definition der Norm im Raume P

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqq \|f_1 - f_2\| (1 + x^3) .$$

An Hand dieser Ungleichung und einfacher Ausrechnung gilt

$$|(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| \leqq (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) \|f_1 - f_2\|, x \in \langle 0, \infty) ,$$

wo α_i, $i = 0, 1, 2, 3$ von x unabhängige Konstanten sind, also existiert $K > 0$ so, dass

$$\|Af_1 - Af_2\| \leqq K \|f_1 - f_2\|$$

gilt, und hieraus folgt die Stetigkeit des Operators A. Zum Schluss ist es noch notwendig zu beweisen, dass

$$f \in M \Rightarrow Af \in M$$

gilt. Wenn $f \in M$ ist, so gilt für die Anfangsbedingung $p(x)$ der Definition 1.3, mit deren Hilfe die Abbildung A definiert ist, die Abschätzung

$$0 \leqq p(x) \leqq \alpha x , \quad x \in \langle 0, \infty) ,$$

folglich ist

$$0 \leqq (Af)(x) \leqq u_1(x, t_0) + u_2(x, t_0) \leqq$$

$$\leqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}} \right) \alpha \xi \, d\xi +$$

$$+ \frac{\sqrt{a}G}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - \tau}} \left[\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} \right) d\xi \right] d\tau \leqq$$

$$\leqq \alpha x + G t_0 = \alpha x + b\alpha \, .$$

Weiter ist

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (Af)(x) \right| \leqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_0^\infty \left(\frac{a\,|x - \xi)}{2t_0} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} + \frac{a\,|x + \xi|}{2t_0} e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}} \right) \alpha \xi \, d\xi +$$

$$+ \frac{\sqrt{a}G}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - \tau}} \left[\int_0^\infty \left(\frac{a|x - \xi|}{2(t_0 - \tau)} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{a(x + \xi)^2}{2(t_0 - \tau)} e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} \right) d\xi \right] d\tau \leqq b_0 + b_1 x \, .$$

Die Voraussetzungen des Satzes 2.3 sind also erfüllt (der normierte Raum ist offensichtlich lokal konvex) und die Existenz der quasistationären Lösung ist bewiesen.

3. DIE EINDEUTIGKEIT DER QUASISTATIONÄREN LÖSUNG UND DIE KONVERGENZ DER SCHRITTWEISEN NÄHERUNGEN

Definition 3.1. *Sei $\{\varphi_k\}$ eine Folge von Funktionen definiert durch die Vorschrift*

(1) $$\varphi_{k+1}(x) = (A_1 \varphi_k)(x) \, , \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

wo

(2) $$(A_1 \varphi)(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}} \right) \varphi(\xi - b) \, d\xi \, ,$$

(3) $$\varphi_0(x) \in M_1 = \underset{\varphi}{E}[\varphi \in P \, , \; |\varphi(x)| \leqq \alpha x + b\alpha]$$

ist. P ist ein Raum nach Definition 2.1, α, t_0, b sind Konstanten nach Satz 2.4.

Unsere Aufgabe ist es nun in diesem Absatz folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.1. *Für die Folge $\{\varphi_k\}$ nach Definition 3.1 gilt*

(4) $$\|\varphi_k\|_P \to 0 \qquad \text{für} \quad k \to \infty \, .$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir leicht die Eindeutigkeit der quasistationären Lösung wie auch die Konvergenz der schrittweisen Näherungen.

Satz 3.2. *(Die Eindeutigkeit der quasistationären Lösung.) In der Menge M die im Satz 2.4 definiert ist, existiert gerade nur eine quasistationäre Lösung des Problems No 1.*

Beweis: Es seien f_1 und f_2 zwei quasistationäre Lösungen. Wir setzen

$$\varphi_0 = f_1 - f_2 \,, \tag{5}$$

sodass $\varphi_0 \in M_1$ gilt, und definieren die Folge

$$\varphi_{k+1} = A_1 \varphi_k \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Weil offensichtlich

$$(Af)(x) = (A_1 f)(x) + u_2(x, t_0) \tag{7}$$

gilt und $u_2(x, t)$ durch die Formel (18) in Absatz 1 definiert ist, ist leicht durch vollständige Induktion zu zeigen, dass

$$\varphi_k(x) = \varphi_0(x) \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

gilt. Nach Satz 3.1 gilt jedoch

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\| = \|f_1 - f_2\| = 0 \,.$$

Hieraus folgt $f_1(x) = f_2(x)$ für jedes $x \in \langle 0, \infty)$ und da der Satz 2.4 die Existenz verbürgt, ist der Satz vollkommen bewiesen.

Satz 3.3. *(Die Konvergenz der schrittweisen Näherungen.) Es sei $f_0 \in M$ (nach Satz 2.4),*

$$f_{k+1} = A f_k \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_P = 0 \,, \tag{9}$$

wo f die quasistationäre Lösung des Problems No 1 ist.

Beweis: Vorallem gilt $f_k \in M$ für $k = 1, 2, \ldots$, wie aus dem Beweis des Satzes 2.4 folgt. Wir setzen

$$\varphi_k(x) = f_k(x) - f(x) \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dann gilt

$$\varphi_{k+1}(x) = f_{k+1}(x) - f(x) = (Af_k)(x) - (Af)(x) = (A_1 \varphi_k)(x) \,,$$

wobei $\varphi_0 \in M_1$ ist, also folgt (9) aus Satz 3.1.

Wir wenden uns nun dem Beweis des Satzes 3.1 zu.

Definition 3.2. *Wir definieren die Folge $\{\psi_k\}$ folgendermassen*

$$\begin{aligned} \psi_{k+1}(x) &= (A_1 \psi_k)(x) \,, \quad k = 1, 2, \ldots \,, \\ \psi_1(x) &= \alpha x \,, \end{aligned} \tag{10}$$

α, A_1 haben denselben Sinn wie in Definition 3.1.

Lemma 3.1. *Für die Folge* $\{\varphi_k\}$ *definiert durch die Definition 3.1 gilt die Abschätzung*

$$|\varphi_k(x)| \leqq \psi_k(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

für jedes $x \in \langle 0, \infty)$, $\{\psi_k\}$ *ist dieselbe Folge wie in Definition 3.2.*

Beweis: Durch Induktion. Für $k = 1$ ist die Behauptung offensichtich richtig (siehe Beweis zu Satz 2.4). Wir setzen voraus, dass die Behauptung für $k = n \geqq 1$ richtig ist und beweisen sie für $k = n + 1$:

$$|\varphi_{n+1}(x)| = |(A_1\varphi_n)(x)| \leqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) |\varphi_n(\xi - b)|\, d\xi \leqq$$

$$\leqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) \psi_n(\xi - b)\, d\xi = \psi_{n+1}(x)$$

nach unserer Voraussetzung, also ist die Ungleichung (11) bewiesen.

Definition 3.3. *Wir definieren die Folge* $\{\vartheta_k\}$ *durch die Vorschrift*

$$\vartheta_{k+1}(x) = \left(A_2 \frac{k}{k-1} \vartheta_k\left(\frac{k-1}{k}\, y\right)\right)(x)\,, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

$$\vartheta_2(x) = \psi_2(x)\,,$$

wo

$$(A_2 f(\xi))(x) \equiv \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) f(\xi)\, d\xi \tag{13}$$

ist.

Lemma 3.2. *Für* $k \geqq 2$ *gilt*

$$0 \leqq \vartheta_k(x) \leqq \alpha x\,,$$
$$0 \leqq \vartheta_k'(x) \leqq \alpha\,,$$
$$0 \leqq \vartheta_k''(x)\,.$$

Beweis: Durch Induktion. Für $k = 2$ sind die Behauptungen richtig, denn es gilt

$$\vartheta_2(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) (\alpha\xi - \alpha b)\, d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqq \vartheta_2(x) \leqq \alpha x\,,$$

$$\vartheta_2'(x) = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} + e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) d\xi \Rightarrow 0 \leqq \vartheta_2'(x) \leqq \alpha\,,$$

$$\vartheta_2''(x) = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \left(e^{-\frac{a(x-b)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+b)^2}{4t_0}}\right) \geqq 0\,.$$

Wir setzen voraus, dass die Behauptungen für $k = n \geqq 2$ richtig sind und beweisen sie für $k = n + 1$. Aus der Voraussetzung

$$0 \leqq \vartheta_n(x) \leqq \alpha x$$

folgt

$$\frac{n}{n-1}\, \vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\, x\right) \leqq \alpha x\,,$$

folglich ist

$$\vartheta_{n+1}(x) = \left(A_2\, \frac{n}{n-1}\, \vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\, y\right)\right)(x) \leqq (A_2 \alpha y)(x) = \alpha x\,.$$

Weiter gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\vartheta'_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} + e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) \vartheta'_n\left(\frac{n-1}{n}\, \xi\right) \mathrm{d}\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqq \vartheta'_{n+1}(x) \leqq \alpha$$

und

$$\vartheta''_{n+1}(x) = \frac{n-1}{n}\, \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) \vartheta''_n\left(\frac{n-1}{n}\, \xi\right) \mathrm{d}\xi \geqq 0\,.$$

Der Beweis ist erbracht.

Lemma 3.3. *Es gelte* $0 \leqq g(x) \leqq \alpha x$, $0 \leqq g'(x) \leqq \alpha$, $g''(x) \geqq 0$. *Dann gilt*

(14) $$\lim_{x\to\infty} [g(x) - (A_2 g(y))(x)] = 0\,.$$

Beweis:

$$g(x) - (A_2 g)(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) (g(x) - g(\xi))\, \mathrm{d}\xi\, +$$

$$+\, g(x)\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\sqrt{ax}}{2\sqrt{t_0}}}^\infty e^{u^2}\, \mathrm{d}u\,.$$

Aber

$$\lim_{x\to\infty} g(x)\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\sqrt{ax}}{2\sqrt{t_0}}}^\infty e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = 0\,,$$

weil $g(x) \leqq \alpha x$ ist, bleibt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) (g(x) - g(\xi))\, \mathrm{d}\xi = 0$$

zu beweisen. Es ist jedoch

$$\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}}\int\limits_0^\infty\left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}}-e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right)(g(x)-g(\xi))\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t_0}}}e^{-u^2}\left(g(x)-g\left(x-\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}u\right)\right)du-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-u^2}\left(g(x)-g\left(-x+\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}u\right)\right)du\,.$$

Das letzte Integral konvergiert für $x\to\infty$ nach Null, weil

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-u^2}\left(g(x)-g\left(-x+\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}u\right)\right)du\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2\alpha x}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-u^2}\,du+\frac{2\alpha\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty}ue^{-u^2}\,du\to 0$$

gilt. Weiter ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\sqrt{a}x}{2\sqrt{t_0}}}e^{-u^2}\left(g(x)-g\left(x-\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}u\right)\right)du=\frac{2\alpha_0\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ue^{-u^2}\,du=0\,,$$

da für ein festgewähltes u

$$\lim_{x\to\infty}\left(g(x)-g\left(x-\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}u\right)\right)=\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}\lim_{x\to\infty}g'(\Theta(x,u))\,,$$

gilt, wo

$$x-\frac{2\sqrt{t_0}}{\sqrt{a}}u<\Theta(x,u)<x\,,$$

ist, sodass

$$\lim_{x\to\infty}\Theta(x,u)=\infty$$

für ein festes u ist und es existiert

$$\lim_{t\to\infty}g'(t)=\alpha_0\leqq\alpha$$

und die unter dem Integralzeichen stehende Funktion hat offensichtlich im Intervall $(-\infty, \infty)$ eine integrierbare Majorante $2\alpha\sqrt{t_0}\,|u|\,e^{-u^2}/\sqrt{a}\sqrt{\pi}$. Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 3.4. *Für jede Funktion $\vartheta_k(x)$, $k = 2, 3, \ldots$ nach Definition 3.3 gilt*

$$\lim_{x\to\infty} (\vartheta_k(x) - (\alpha x - (k-1)\,\alpha b)) = 0 \,. \tag{15}$$

Beweis: Durch Induktion. Für $k = 2$ ist die Behauptung nach Lemma 3.2 und 3.3 richtig. Wir setzen voraus, dass sie für $k = n \geqq 2$ richtig ist und beweisen sie für $k = n + 1$:

$$\lim_{x\to\infty} (\vartheta_{n+1}(x) - (\alpha x - \alpha n b)) = \lim_{x\to\infty} \left(\vartheta_{n+1}(x) - \frac{n}{n-1}\,\vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\,x\right)\right) + \\ + \lim_{x\to\infty} \frac{n}{n-1} \left(\vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\,x\right) - \left(\alpha\,\frac{n-1}{n}\,x - \alpha(n-1)\,b\right)\right). \tag{16}$$

Der erste Limes auf der rechten Seite der Gleichung (16) ist nach der Definition der Funktionen ϑ_k und der Lemma 3.2 und 3.3 gleich Null. Das zweite Limes ist der Voraussetzung nach gleich Null, also gilt (15) für jedes $k \geqq 2$ und das Lemma ist bewiesen.

Lemma 3.5. *Es sei $\vartheta_k(x)$, $k = 2, 3, \ldots$ eine Funktion nach Definition 3.3. Dann gilt*

$$\frac{k}{k-1}\,\vartheta_k\left(\frac{k-1}{k}\,x\right) \geqq \vartheta_k(x-b) \quad \textit{für } x \geqq b \,. \tag{17}$$

Beweis: Wir setzen

$$\Theta_k(x) = \frac{k}{k-1}\,\vartheta_k\left(\frac{k-1}{k}\,x\right) - \vartheta_k(x-b) \quad \text{für} \quad x \geqq b \,. \tag{18}$$

Es sei zuerst $b \leqq x \leqq kb$. Dann ist $(k-1)x\,/\,k \geqq x - b$ und weil die Funktion $\vartheta_k(x)$ nach Lemma 3.2 nicht fallend ist und $k/k - 1 > 1$ für $k \geqq 2$ gilt, ist

$$\Theta_k(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad b \leqq x \leqq kb \,. \tag{19}$$

Es sei weiter $x > kb$. Dann ist $(k-1)\,x/k < x - b$ und

$$\Theta_k'(x) = \vartheta_k'\left(\frac{k-1}{k}\,x\right) - \vartheta_k'(x-b) \leqq 0 \,, \tag{20}$$

weil die Funktion $\vartheta_k'(x)$ nach Lemma 3.3 nicht fallend ist. Weiter gilt nach Lemma 3.4

$$\lim_{x\to\infty} \Theta_k(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{k}{k-1}\,\vartheta_k\left(\frac{k-1}{k}\,x\right) - \vartheta_k(x-b)\right) = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{k}{k-1} \left(\vartheta_k\left(\frac{k-1}{k}\,x\right) - \left(\alpha\,\frac{k-1}{k}\,x - \alpha(k-1)\,b\right)\right) + \\ + \lim_{x\to\infty} ((\alpha(x - b) - \alpha(k-1)\,b) - \vartheta_k(x-b)) = 0 \,. \tag{21}$$

Aus (20) folgt, dass die Funktion $\Theta_k(x)$ für $x > kb$ nicht steigend ist, also folgt aus (19) und (21) $\Theta_k(x) \geqq 0$, was unser Lemma beweist.

Lemma 3.6. *Für die Funktion $\psi_k(x)$ nach Definition 3.2 gilt die Abschätzung*

$$\psi_k(x) \leqq \vartheta_k(x)\,, \quad k = 2, 3, \ldots\,, \tag{22}$$

wo $\vartheta_k(x)$ die Funktion nach Definition 3.3 ist.

Beweis: Durch Induktion. Für $k = 2$ folgt die Behauptung aus der Definition der Funktion $\vartheta_2(x)$. Wir setzen voraus, dass die Behauptung für $k = n \geqq \geqq 2$ richtig ist und beweisen sie für $k = n + 1$. Nach (17) und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\frac{n}{n-1}\,\vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\,x\right) \geqq \psi_n(x-b) \quad \text{für} \quad x > b\,.$$

Hieraus folgt

$$\vartheta_{n+1}(x) = \left(A_2\,\frac{n}{n-1}\,\vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\,y\right)\right)(x) \geqq (A_1\psi_n)(x) = \psi_{n+1}(x)\,,$$

weil $(A_1\psi_n)(x) = (A_2h)(x)$ ist, wo $h(x) = 0$ für $x \leqq b$ ist und $h(x) = \psi_n(x-b)$ für $x > b$.

Lemma 3.7. *Es sei $\Theta(x, t)$ die Lösung der Gleichung*

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = a\,\frac{\partial\Theta}{\partial t} \tag{23}$$

für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \Theta(x, 0) &= 0 && \textit{für} \quad 0 \leqq x \leqq b\,, \\ \Theta(x, 0) &= \alpha(x-b) && \textit{für} \quad x > b\,, \end{aligned}$$

und die Randbedingung

$$\Theta(0, t) = 0 \quad \textit{für} \quad t > 0\,.$$

Dann gilt

$$\vartheta_k(x) = (k-1)\,\Theta\left(\frac{1}{k-1}\,x,\ t_0\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l^2}\right) \quad \textit{für} \quad k = 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Beweis: Durch Induktion. Für $k = 2$ ist die Behauptung nach der Definition der Funktion $\vartheta_2(x)$ richtig. Wir setzen also die Gültigkeit der Behauptung für $k = n \geqq 2$ voraus und beweisen, dass sie auch für $k = n + 1$ gilt. Es sei $\vartheta(x, t)$ die Lösung der Gleichung (23) für die Anfangsbedingung

$$\vartheta(x, 0) = \frac{n}{n-1}\,\vartheta_n\left(\frac{n-1}{n}\,x\right)$$

und die Randbedingung gleich Null. Dann gilt

$$\vartheta_{n+1}(x) = \vartheta(x, t_0)\,.$$

Wir setzen

$$\bar{\vartheta}(x, t) = \frac{n-1}{n} \vartheta\left(\frac{n}{n-1} x, \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 t\right).$$

Diese Funktion ist wieder eine Lösung der Gleichung (23) aber für die Anfangsbedingung $\bar{\vartheta}(x, 0) = \vartheta_n(x)$ und es gilt

$$\vartheta_{n+1}(x) = \frac{n}{n-1} \bar{\vartheta}\left(\frac{n-1}{n} x, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 t_0\right). \tag{25}$$

Wir setzen weiter

$$\bar{\bar{\vartheta}}(x, t) = (n-1)\, \Theta\left(\frac{1}{n-1} x, t_0 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l^2} + \frac{1}{(n-1)^2} t\right). \tag{26}$$

Diese Funktion ist nach der Induktionsvoraussetzung die Lösung der Gleichung (23) für die Anfangsbedingung $\bar{\bar{\vartheta}}(x, 0) = \vartheta_n(x)$, also gilt nach dem Satz über die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung (23) (siehe Beweis des Satzes 1.1)

$$\bar{\bar{\vartheta}}(x, t) \equiv \bar{\vartheta}(x, t).$$

Hieraus, aus (25) und (26) folgt

$$\vartheta_{n+1}(x) = \frac{n}{n-1} \bar{\bar{\vartheta}}\left(\frac{n-1}{n} x, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 t_0\right) = n\Theta\left(\frac{1}{n} x, \; t_0 \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l^2}\right),$$

was unser Lemma beweist.

Lemma 3.8. *Für jedes feste $x \in \langle 0, \infty)$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \vartheta_k(x) = \lambda x, \tag{27}$$

wo λ eine feste Zahl ist, $0 < \lambda < \alpha$ und α aus Definition 3.1 ist.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\vartheta_k(x) = (k-1)\, \Theta\left(\frac{1}{k-1} x, t_0 \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l^2}\right) = x \left[\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\left(\xi, t_0 \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l^2}\right)\right]_{\xi = \frac{1}{k-1}\nu x},$$

wo $0 < \nu < 1$. Hieraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} \vartheta_k(x) = \lambda x,$$

wo

$$\lambda = \left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x, t)\right]_{\substack{x=0 \\ t = t_0 \frac{\pi^2}{6}}} = \alpha \operatorname{cerf} \frac{\sqrt{6}\sqrt{ab}}{2\pi\sqrt{t_0}} < \alpha$$

ist, was zu beweisen war.

Lemma 3.9. *Es sei*

$$\eta_1(x) \in M_2 = \underset{\eta}{\mathrm{E}}[\eta \in P, 0 \leqq \eta(x) \leqq \alpha x],$$

$$\eta_{k+1}(x) = (A_1 \eta_k)(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dann gilt für jedes feste $x \in \langle 0, \infty)$

$$\limsup_{k\to\infty} \eta_k(x) \leqq \lambda x\,, \tag{28}$$

wo λ wie in Lemma 3.8 definiert ist.

Beweis: Genauso wie für das Lemma 3.1 kann man beweisen dass

$$\eta_k(x) \leqq \psi_k(x),\ k = 1, 2, \ldots, x \in \langle 0, \infty)$$

gilt. Hieraus und aus Lemma 3.6 und 3.8 folgt (28).

Lemma 3.10. *Die Funktionenfolge $\{\psi_k\}$ nach Definition 3.2 ist im Intervall $\langle 0, \infty)$ konvergent.*

Beweis: Es genügt offenbar zu beweisen, dass die Zahlenfolge $\{\psi_k(x)\}$ für jedes fest gewählte $x \in \langle 0, \infty)$ nicht wachsend ist, weil $\psi_n(x) \geqq 0$ ist. Um dies also zu beweisen definieren, wir die Folge von Funktionen

$$\mu_{k+1}(x) = (A_1\mu_k)(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\mu_1(x) = \psi_2(x) - \psi_1(x)\,.$$

Es gilt offensichtlich

$$\mu_{k+1}(x) = \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Weiter lässt sich durch Induktion leicht zeigen, dass für jedes $k \geqq 1$ und $x \in \langle 0, \infty)$ $\mu_k'(x) \leqq 0$ gilt. Also ist die Funktion $\mu_k(x)$ für jedes feste $k \geqq 1$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ nicht wachsend und so gilt

$$\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x) = \mu_k(x) \leqq \mu_k(0) = 0$$

für alle $x \in \langle 0, \infty)$ und die Zahlenfolge $\{\psi_n(x)\}$ ist wirklich für jedes $x \in \langle 0, \infty)$ nicht wachsend, was unser Lemma beweist.

Lemma 3.11. *Es gilt $\psi_k(x) \to 0$ für $k \to \infty$ gleichmässig auf jedem Intervall $\langle 0, \beta\rangle$, $\beta < \infty$.*

Beweis: Nach Lemma 3.10 existiert für jedes $x \in \langle 0, \infty)$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = \psi(x)\,.$$

Für diese Funktion gilt offenbar

$$\psi(x) = (A_1\psi)(x) \tag{29}$$

und nach Lemma 3.9

$$0 \leqq \psi(x) \leqq \lambda x\,. \tag{30}$$

Wir setzen weiter

$$\eta_1(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\,\psi(x)\,, \quad \eta_{k+1}(x) = (A_1\eta_k)\,(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Aus (29) folgt, dass

$$\eta_k(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\,\psi(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{31}$$

gilt und da aus (30) folgt, dass $\eta_1 \in M_2$ ist, so erhalten wir unter Anwendung von Lemma 3.9

$$\frac{\alpha}{\lambda}\,\psi(x) \leqq \lambda x\,,$$

oder

$$\psi(x) \leqq \lambda\,\frac{\lambda}{\alpha}\,x\,.$$

Analog beweisen wir

$$0 \leqq \psi(x) \leqq \lambda \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n x \tag{32}$$

für jedes natürliche n und da $\frac{\lambda}{\alpha} < 1$ ist, folgt für jedes $x \in \langle 0, \infty)$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = 0\,.$$

Weil die Funktionen $\psi_k(x)$ für jedes k offensichtlich nicht fallend sind, folgt aus dem früher bewiesenem die geforderte gleichmässige Konvergenz auf jedem endlichen Intervall.

Beweis des Satzes 3.1: Es gilt offenbar

$$|\varphi_k(x)| \leqq \alpha x\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

für jedes $x \in \langle 0, \infty)$. Wir wählen $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\beta > 0$ so, dass

$$x \geqq \beta \Rightarrow \frac{\alpha x}{1 + x^3} < \varepsilon \tag{34}$$

gilt. Aus Lemma 3.11 folgt weiter die Existenz eines $K > 0$ so, dass

$$k \geqq K \Rightarrow \frac{\psi_k(x)}{1 + x^3} < \varepsilon \tag{35}$$

für alle $x \in \langle 0, \beta\rangle$ gilt. Aus (11), (33) (34) und (35) folgt

$$k \geqq K \Rightarrow \left|\frac{\varphi_k(x)}{1 + x^3}\right| < \varepsilon$$

für jedes $x \in \langle 0, \infty)$, was den Beweis liefert.

4. DIE BESCHRÄNKTHEIT DER QUASISTATIONÄREN LÖSUNG

Satz 4.1. *Es sei $\{f_k\}$ eine Folge, die durch die Bedingungen*

$$f_0 = 0\,, \quad f_{k+1} = Af_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

definiert sei. Es sei $q(t)$ die im Punkte (a) der Definition 1.2 definierte Funktion und sei noch $q(t)$ fallend und es gelte

$$\int_0^\infty q(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty\,. \tag{1}$$

Dann ist $\{f_k\}$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ gleichmässig beschränkt.

Bevor wir diesen Satz beweisen, beweisen wir einige Hilfssätze.

Lemma 4.1. *Es sei $U(x, t)$ durch die Formel*

$$U(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \tilde{z}(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \tag{2}$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} \tilde{z}(x, t) &= z(x, t) \quad \text{für} \quad x > 0\,, \\ \tilde{z}(x, t) &= q(t - kt_0) \; \text{für} \; -kb < x < -(k-1)\,b,\; t > kt_0,\; k = 1, 2, \ldots, \\ \tilde{z}(x, t) &= 0 \qquad \text{für die anderen}\; (x, t),\; -\infty < x < 0,\; t > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

gilt ($z(x, t)$ ist eine Funktion nach Satz 1.2, $q(t)$ nach Definition 1.2). Dann gilt für ein beliebiges $T_0 > 0$ und $t > T_0$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t - T_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-T_0)}} U(\xi, T_0) \, d\xi \; + \\ &+ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t-T_0} \frac{1}{\sqrt{t - (\tau + T_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-(\tau+T_0))}} \tilde{z}(\xi, \tau + T_0) \, d\xi \, d\tau\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t-T_0} \frac{1}{\sqrt{t - (\tau + T_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-(\tau+T_0))}} \tilde{z}(\xi, \tau + T_0) \, d\xi \, d\tau = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \tilde{z}(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t - T_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-T_0)}} U(\xi, T_0) \, d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t - T_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-T_0)}} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{T_0} \frac{1}{\sqrt{T_0 - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(u-\xi)^2}{4(T_0-\tau)}} \tilde{z}(u, \tau) \, du \, d\tau \, d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t - T_0}} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{T_0} \frac{1}{\sqrt{T_0 - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(u, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{a(x-\xi)^2}{4(t-T_0)} + \frac{a(\xi-u)^2}{4(T_0-\tau)}\right)} d\xi \, du \, d\tau = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{T_0} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-u)^2}{4(t-\tau)}} \tilde{z}(u, \tau) \, du \, d\tau\,, \end{aligned}$$

was zusammen mit (5) das Lemma beweist.

Lemma 4.2. *Für die Folge $\{f_k\}$, die in Satz 4.1 definiert wird, gilt die Abschätzung*

$$0 \leqq f_n(x) \leqq U(x-(n-1)\,b,\, nt_0)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

wobei $U(x, t)$ durch die Formel (2) *gegeben ist.*

Beweis: Durch Induktion. Für $n = 0$ ist die Behauptung offensichtlich richtig; wir setzen also voraus, dass sie für $n = k$ gilt und beweisen sie für $n = k + 1$: Nach Lemma 4.1 gilt

$$\begin{aligned} U(x-kb, (k+1)\,t_0) &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-kb-\xi)^2}{4t_0}}\, U(\xi, kt_0)\, \mathrm{d}\xi\, + \\ &+ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-kb-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}}\, \tilde{z}(\xi, \tau + kt_0)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Weiter ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-kb-\xi)^2}{4t_0}}\, U(\xi, kt_0)\, \mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}}\, U(\xi-kb, kt_0)\, \mathrm{d}\xi \geqq \\ &\geqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^{\infty} \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) U(\xi-kb, kt_0)\, \mathrm{d}\xi \geqq \\ &\geqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_b^{\infty} \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4t_0}}\right) f_k(\xi-b)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{8}$$

und weiter gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-kb-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}}\, \tilde{z}(\xi, \tau+kt_0)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}}\, \tilde{z}(\xi-kb, \tau+kt_0)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0-\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}}\, z(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau \geqq \\ &\geqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t_0-\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} - e^{-\frac{a(x+\xi)^2}{4(t_0-\tau)}}\right) z(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Durch Einsetzen von (8) und (9) in (7) erhalten wir

$$U(x - kb, (k + 1)\, t_0) \geqq (Af_k)(x) = f_{k+1}(x)\ ,$$

was das Lemma beweist.

Lemma 4.3. *Für die Funktion $U(x, t)$, die durch die Formel (2) definiert ist, gilt*

$$(10)\quad U(x, (n + 1)\, t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x+(n-k)b-\xi)^2}{4kt_0}} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + f(x + nb)\ ,$$

wobei

$$(11)\qquad f(x) = \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0 - \tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} z(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau$$

ist.

Beweis: Durch Induktion. Die Behauptung gilt offenbar für $n = 0$. Wir setzen voraus, dass sie für $n = m$ gilt und beweisen sie für $n = m + 1$. Nach Lemma 4.1 und unserer Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
U(x,(m + 2)\, t_0) = {} & \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} f(\xi + mb)\, \mathrm{d}\xi + \\
& + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(\xi+(m-k)b-u)^2}{4kt_0}} f(u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}\xi + \\
& + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} z(\xi, \tau + (m + 1)\, t_0)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\ .
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir durch einfache Umformung unsere Behauptung.

Lemma 4.4. *Wir setzen*

$$(12)\qquad F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{a((x-\xi)^2+\alpha^2 b^2)}{4\alpha t_0}}\ ,$$

$$(13)\qquad \Phi(\alpha) = F(k)\ \text{für}\ k \leqq \alpha < k + 1\ ,\ k = 1, 2, \ldots$$

Dann gilt für jedes $\alpha \geqq 1$

$$(14)\qquad \Phi(\alpha) \leqq CF(\alpha)\ ,$$

worin

$$(15)\qquad C = 2e^{\frac{ab^2}{4t_0}}$$

ist.

Beweis: Es gilt für $k = 1, 2, \ldots$

(16) $$\frac{F(k)}{F(k+1)} = \sqrt{1 + \frac{1}{k}\, e^{\frac{ab^2}{4t_0}}\, e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4t_0k(k+1)}}} \leqq C\,,$$

wobei C durch die Formel (15) gegeben ist. Weiter existiert ein Punkt $\alpha_0 \in \langle 1, \infty)$ so, dass im Intervall $\langle 1, \alpha_0)$[3] $F(\alpha)$ wachsend ist und im Intervall $\langle \alpha_0, \infty)$ fallend. Es existiert also ein $k_0 \geqq 1$ so, dass

(17) $$k_0 \leqq \alpha_0 < k_0 + 1$$

gilt. Es sei zuerst $\alpha \in \langle n, n+1)$, worin $n \leqq k_0 - 1$ ist. Dann gilt für diese α

$$\Phi(\alpha) = F(n) \leqq F(\alpha) < CF(\alpha)\,,$$

weil $C > 1$. Es sei weiter $\alpha \in \langle n, n+1)$, wobei $n \geqq k_0 + 1$ ist. Dann gilt nach (16), (17) und der Definition der Zahl α_0

$$\Phi(\alpha) = F(n) \leqq CF(n+1) \leqq CF(\alpha)\,.$$

Es sei endlich $\alpha_0 \in \langle k_0, k_0 + 1)$. Dann ist $\Phi(\alpha) = F(k_0)$. Wenn $\alpha_0 = k_0$ ist, so ist unsere Behauptung offenbar richtig. Es sei also $k_0 < \alpha_0 < k_0 + 1$. Wir untersuchen und unterscheiden zwei Fälle

(a) $$F(k_0) \leqq F(k_0 + 1):$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(k_0) &\leqq F(\alpha) < CF(\alpha) && \text{für} \quad k_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0\,,\\ F(k_0) &\leqq F(k_0+1) \leqq F(\alpha) < CF(\alpha) && \text{für} \quad \alpha_0 < \alpha < k_0 + 1\,. \end{aligned}$$

(b) $$F(k_0) > F(k_0 + 1):$$

Dann existiert ein $\alpha_1 \in (\alpha_0, k_0 + 1)$, weil die Funktion $F(\alpha)$ im Intervall $(\alpha_0, k_0 + 1)$ fallend und stetig ist, für das

$$F(\alpha_1) = F(k_0)$$

gilt. Nun gilt

$$\begin{aligned} F(k_0) &\leqq F(\alpha) < CF(\alpha) && \text{für} \quad \alpha \in \langle k_0, \alpha_1\rangle\,,\\ F(k_0) &\leqq CF(k_0+1) \leqq CF(\alpha) && \text{für} \quad \alpha \in (\alpha_1, k_0 + 1)\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Formel (14) für alle $\alpha \geqq 1$ bewiesen.

Beweis des Satzes 4.1: Nach Lemma 4.2 und 4.3 gilt

(18) $$0 \leqq f_{n+1}(x) \leqq$$

$$\leqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ab(x-\xi)}{2t_0}} \frac{1}{\sqrt{k}}\, e^{-\frac{a((x-\xi)^2 + k^2b^2)}{4t_0k}} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + f(x)\,,$$

[3]) Das Symbol $\langle 1,0)$ bezeichnet eine leere Menge.

oder nach Lemma 4.4

$$(19) \qquad 0 \leqq f_{n+1}(x) \leqq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ab(x-\xi)}{2t_0}} \int\limits_{1}^{n+1} \Phi(\alpha)\, f(\xi)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\xi + f(x)\,.$$

$$\int\limits_{1}^{n+1} \Phi(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \leqq C\int\limits_{1}^{n+1} F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \leqq C\int\limits_{0}^{\infty} F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = C\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{a((x-\xi)^2+\alpha^2b^2)}{4t_0\alpha}}\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= C\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{|x-\xi|}}{\sqrt{b}\sqrt{u}}\, e^{-\frac{1+u^2}{\frac{4t_0}{ab}\frac{1}{|x-\xi|}u}}\,\mathrm{d}u = C\,\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}}{\sqrt{ab}}\, e^{-\frac{ab}{2t_0}|x-\xi|}\,.$$

Hieraus erhalten wir durch Einsetzen in (19)

$$0 \leqq f_{n+1}(x) \leqq \frac{C}{b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ab}{2t_0}((x-\xi)-|x-\xi|)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + f(x) \leqq \frac{C}{b}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + f(x)$$

und weil $f(x)$ offensichtlich beschränkt ist, genügt es zu beweisen, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ beschränkt ist. Es ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{0} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0-\tau}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{a(x-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}} z(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{0}^{t_0}\int\limits_{0}^{\infty} z(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{0}^{t_0}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{kb}^{(k+1)b} q(\tau+kt_0)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau = b\int\limits_{0}^{t_0}\sum_{k=0}^{\infty} q(\tau+kt_0)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Die Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty} q(\tau+kt_0)$ ist im Intervall $\langle 0, t_0\rangle$ nach Voraussetzung über die Funktion $q(t)$ gleichmässig konvergent, sodass sie Glied für Glied integrierbar ist, wodurch wir der Voraussetzung nach

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = b\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{t_0} q(\tau+kt_0)\,\mathrm{d}\tau = b\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{kt_0}^{(k+1)t_0} q(\tau)\,\mathrm{d}\tau = b\int\limits_{0}^{\infty} q(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty$$

erhalten (siehe Ungleichung (1)). Der Satz 4.1 ist hiermit vollkommen bewiesen.

Satz 4.2. *Wenn die Funktion $q(t)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.1 erfüllt, ist die quasistationäre Lösung des Problems No 1 beschränkt.*

Beweis: Nach den Sätzen 3.2 und 3.3 konvergiert die Folge $\{f_k\}$ aus Satz 4.1 lokal gleichmässig zu der quasistationären Lösung. Die Folge ist jedoch nach Satz 4.1 gleichmässig beschränkt, also ist auch ihr Grenzwert beschränkt.

Literatur

[1] *K. Rektorys:* Výpočet teploty v přehradě při uvažování vnitřních zdrojů tepla. Rozpravy ČSAV, 1956.

[2] *J. Kautský:* Řešení quasilineární parabolické diferenciální rovnice s absolutním členem speciálního typu metodou sítí. Aplikace mat., 2 (1957), 327—341.

[3] *A. Stucky, M. H. Derron:* Problèmes thermiques posés par la construction des barrages — reservoirs. Science et Technique, Paul Feissly, Lausanne, 1957.

[4] *I. Babuška, L. Mejzlík:* Über die Anwendungsmöglichkeit hoher Arbeitsschichten beim Bau Schwergewichtsmauer. Acta Technica, 1958, No 5, 353—398.

[5] *Glover:* Flow of heat in dams. Journ. of the Amer. Concr. Inst., 31 (1934), 113—124.

[6] *Glover:* Calculation of temperature distribution in a succession of lifts due to release of chemical heat. Journ. of the Amer. Concr. Inst., 34 (1937), 105—116.

[7] *Рожаницын:* Температурные напряжения возникающие в бетонных плотинах от действия наружных температур. Иссл. по строит. мех. ЦНИПЦ, Москва, 1954, 24—43.

[8] *Фрид:* Расчет изменения температуры бетонных массивов под влиянием экзотермии цемента. Изв. ВНИИГ, 41 (1949).

[9] *Фрид:* Некоторые частные задачи расчета температурного режима бетонных массивов. Изв. ВНИИГ, 43 (1950).

[10] *A. Tichonov:* Ein Fixpunktsatz. Math. Ann., 111 (1935), 767—776.

[11] *И. Г. Петровский:* Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. II., ГИТТЛ, Москва, 1953.

[12] *V. Jarník:* Integrální počet II. Nakl. ČSAV, Praha 1955.

[13] *V. Jarník:* Diferenciální počet II. Nakl. ČSAV, Praha 1956.

[14] *A. Tichonov:* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. Матем. сборник, T. 42 : 2 (1935), 199—216.

Souhrn

O QUASISTACIONÁRNÍM ŘEŠENÍ ROVNICE PRO VEDENÍ TEPLA

EMIL VITÁSEK

Při stavbě velkých betonových masivů (např. gravitačních přehrad), se obvykle postupuje tak, že se nebetonuje spojitě, nýbrž přerušovaně po vrstvách konstantní výšky. Předpokládáme-li, že při tomto pracovním postupu jsou vnější podmínky (tj. pokládací teplota betonové směsi a teplota ovzduší) konstantní, dá se očekávat, že v n-té pracovní vrstvě a v čase t bude tepelné pole podobné, jako bylo v $n - 1$ pracovní vrstvě a v čase $t - t_0$, kde t_0 je čas potřebný k ukončení jednoho pracovního cyklu a že souhlas bude tím lepší, čím bude počet pracovních vrstev větší. Jak ukazuje praxe, nastane tento stav, nazvěme jej quasistacionárním, již po vybetonování několika vrstev. Existence quasistacionárního stavu má značný význam pro výpočet tepelného pole v přehradě, protože quasistacionární stav vypočteme obvykle značně rychleji než průběh teploty v jednotlivých pracovních vrstvách.

Předložená práce se zabývá shora popsaným problémem v lineárním a jednodimensionálním případě. V tomto případě se dá problém formulovat takto:

Buď A operátor, který funkci $f(x)$, definované na intervalu $\langle 0, \infty)$, přiřazuje řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t + kt_0)\,, \quad kb < x < (k+1)\,b,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

($q(t)$ je daná funkce, a, b jsou kladné konstanty) při počáteční podmínce

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 && \text{pro} \quad 0 < x < b\,,\\ u(x, 0) &= f(x - b) && \text{pro} \quad b < x < \infty \end{aligned}$$

a okrajové podmínce

$$u(0, t) = 0 \quad \text{pro} \quad t > 0$$

v čase $t = t_0$ (tj. $(Af)(x) = u(x, t_0)$).

Řekneme, že v nějaké třídě funkcí M existuje quasistacionární řešení, existuje-li funkce $f \in M$ taková, že platí

$$(Af)(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0, \infty)\,. \tag{2}$$

V práci jsou dokázány následující základní věty o quasistacionárním řešení:

Věta 1. *Buď M třída funkcí $f(x)$ definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, \infty)$, pro které platí*

(a) $0 \leqq f(x) \leqq \alpha x + b\alpha\,,$

(b) $\limsup\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqq b_0 + b_1 x\,,$

$\liminf\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqq -(b_0 + b_1 x)$ *pro všechna* $x \in \langle 0, \infty)\,,$

kde α, b_0, b_1 jsou jisté konstanty a buď funkce $q(t)$ z rovnice (1) spojitá, nezáporná a omezená v $\langle 0, \infty)$. Pak existuje v M právě jedno quasistacionární řešení.

Věta 2. *Buď $f_0 \in M$, $f_{k+1} = Af_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots;$ pak funkce $f_k(x)$ konvergují lokálně stejnoměrně ke quasistacionárnímu řešení.*

Věta 3. *Je-li funkce $q(t)$ z rovnice (1) navíc klesající a platí-li*

$$\int_0^\infty q(t)\,\mathrm{d}t < \infty\,,$$

je quasistacionární řešení omezené.

Резюме

О КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ЭМИЛЬ ВИТАСЕК (Emil Vitásek)

На стройках больших бетонных массивов (напр., гравитационных плотин) поступают обыкновенно так, что не бетонируют непрерывно, но укладывают бетон постепенно по слоям постоянной высоты. Если предположить, что при таком процессе работы внешние условия (т. е. температура укладываемой бетонной смеси и температура воздуха) постоянны, то можно ожидать, что в n-ом рабочем слое и во времени t будет температурное поле подобно тому, каким оно было в $(n - 1)$-ом рабочем слое и во времени $t - t_0$, где t_0 — это время, необходимое к совершению одного рабочего цикла, и что согласование будет тем лучшие, чем больше будет число рабочих слоев. На практике оказывается, что такое состояние, которые назовем квазистационарным, настает уже после укладки нескольких слоев. Наличие квазистационарного состояния имеет большое значение для расчета температурного поля в плотине, потому что квазистационарное состояние вычислим обыкновенно значительно быстрее, чем температуру в отдельных рабочих слоях.

Предлагаемая работа занимается описанной выше проблемой в линейном и одномерном случае. Задачу можно тогда сформулировать следующим образом:

Пусть A-оператор, которой функции $f(x)$, определенной на интервале $\langle 0, \infty)$, ставит в соответствие решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t + kt_0), \quad kb < x < (k + 1)\, b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

($q(t)$ заданная фнкция, a, b — положительные постоянные) при начальном условии

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < b\,,$$
$$u(x, 0) = f(x - b) \quad \text{для} \quad b < x < \infty$$

и краевом условии

$$u(0, t) = 0 \quad \text{для} \quad t > 0$$

во времени $t = t_0$ (т. е. $(Af)(x) = u(x, t_0)$).

Мы скажем, что в некотором классе функций M существует квазистационарное решение, если существует функция $f \in M$ такая, что

$$(Af)(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in \langle 0, \infty)\,. \tag{2}$$

В работе доказаны следующие основные теоремы о квазистационарном решении:

Теорема 1. *Пусть M — класс функций $f(x)$, определенных и непрерывных на интервале $\langle 0, \infty)$, для которых*

(а) $0 \leqq f(x) \leqq \alpha x + b\alpha$,

(б) $$\limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqq b_0 + b_1 x ,$$

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqq -(b_0 + b_1 x) \text{ для всех } x \in \langle 0, \infty) ,$$

где α, b_0, b_1 — некоторые постоянные, и пусть функция $q(t)$ из уравнения (1) непрерывна, неотрицательна и ограничена в $\langle 0, \infty)$. Тогда в M существует одно и только одно квазистационарное решение.

Теорема 2. *Пусть $f_0 \in M$, $f_{k+1} = Af_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; тогда функции $f_k(x)$ сходятся локально равномерно к квазистационарному решению.*

Теорема 3. *Если функция $q(t)$ уз уравнениа (1), помимо прочего, еще является убывающей и если*

$$\int_0^\infty q(t)\,\mathrm{d}t < \infty ,$$

то квазистационарное решение ограничено.