

# Aplikace matematiky

---

Jaroslav Dvořák

Koncentrace napětí v okolí otvoru

*Aplikace matematiky*, Vol. 5 (1960), No. 2, 81–108

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102697>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ČLÁNKY

## KONCENTRACE NAPĚTÍ V OKOLÍ OTVORŮ

JAROSLAV DVOŘÁK

(Došlo dne 9. června 1958.)

V článku jsou přehledně uvedeny nejnovější poznatky o koncentraci napětí v okolí otvorů a o jejich aplikaci v technické praxi. V jednotlivých odstavcích článku se zabýváme vždy souborem problémů, jež jsou charakterisovány určitým znakem nebo vlivem jistých veličin, např. tvarem vyšetřované oblasti, tvarem hranice otvorů, vlivem anisotropie materiálu, po případě vlivem přestoupení meze pružnosti apod. V nejdůležitějších případech jsou pak uvedeny formulace jednotlivých základních problémů pružnosti, jsou vyloženy principy použitých metod řešení a uvedeny nejzávažnější výsledky.

## 1. ÚVOD

V současné době se ve zvýšené míře požaduje, aby všechna inženýrská díla splňovala společný požadavek: byla dostatečně pevná a stabilní při minimální spotřebě materiálu, z něhož jsou zhotovena.

Při navrhování stavebních, strojních, důlních a jiných zařízení, musí projektant či konstruktér brát v úvahu řadu různých faktorů. Jedním z nich je faktor koncentrace napětí v okolí otvorů rovinných nebo prostorových konstrukčních prvků.

V tomto článku bychom chtěli shrnout nejzávažnější a nejnovější práce z tohoto oboru a zhodnotit dosažené výsledky jak po stránce technicko-inženýrské, tak i po stránce teoreticko-matematické. Chceme tím upozornit jednak praktiky na současný stav poznatků o těchto otázkách s uvedením příslušné literatury, jednak matematiky na problémy dosud nevyřešené, po případě na neúplnost stávajících řešení.

Poznamenejme, že se budeme zabývat pouze úlohami rovinnými, tj. otázkami koncentrace napětí v okolí rovinných prvků. Při tom si budeme všimati výsledků uveřejněných od roku 1951 do současné doby. Výsledky prací z doby před rokem 1951 jsou s dostatečnou úplností shrnuty v knize G. N. SAVINA [83].

Koncentrace napětí v zatíženém konstrukčním prvku vlivem otvoru má lokální charakter. Je-li tedy zatížený prvek dostatečně velký (nebo obráceně,

otvor dostatečně malý), můžeme tento prvek nahradit nekonečnou rovinou, což také většina autorů činí. V případech, kdy tomu tak není, např. otvor je umístěn poblíž přímkového okraje, nahrazuje se prvek polorovinou, polopásem nebo nekonečným pásem. Přitom se vždy předpokládá materiál prvku homogenní.

Pokud jde o otvory, budeme z matematického hlediska uvažovat zvlášť otvory s dostatečně hladkou hraniční křivkou, tj. otvory bez úhlových bodů, a zvlášť otvory s hraniční křivkou po částech hladkou, tj. otvory s úhlovými body.

V dalším budeme dostatečně hladkou křivkou rozumět toto: Nechť křivka  $c$  je dána parametrickými rovnicemi

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad \alpha \leq s \leq \beta,$$

kde  $s$  je parametr délky. Říkáme, že křivka  $c$  je dostatečně hladká, mají-li funkce  $x(s)$  a  $y(s)$  tři spojité derivace v  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , přičemž pro žádné  $s$  není současně  $x'(s) = y'(s) = 0$ . V případě, že jde o uzavřenou křivku, žádáme, aby mimo vztahy  $x(\alpha) = x(\beta)$ ,  $y(\alpha) = y(\beta)$  byly splněny obdobné vztahy pro všechny tři derivace, přičemž derivací v bodě  $\alpha$  rozumíme derivaci zprava, v bodě  $\beta$  zleva.

K těmto základním typům otvorů přistupuje pak skupina otvorů, jež jsou zpevněny (vyztuženy) rámem nebo diskem (čepem) buď z téhož nebo jiného pružného materiálu, nebo rámem či diskem absolutně tuhým.

Při řešení problémů koncentrace napětí v okolí otvorů se naráží na další zásadní skutečnost, která řešení problémů komplikuje, a tou je vícenásobná souvislost vyšetřovaných oblastí. Již v případě jednoduše souvislé oblasti vede rovinný problém pružnosti na řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$(1,1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} &= 0, \\ \Delta(X_x + Y_y) &= 0, \end{aligned}$$

kterým, při daných okrajových podmínkách, musí složky  $X_x$ ,  $X_y$  a  $Y_y$  tenzoru napětí vyhovovat. Takovýto problém je i u jednoduchých praktických úloh velmi složitou záležitostí. Řešení soustavy (1,1) s danými okrajovými podmínkami se proto zpravidla převádí na problém jiný.

G. B. AIRY ukázal, že v případě jednoduše souvislé oblasti se dají složky tenzoru napětí vyjádřit jako derivace biharmonické funkce. Následkem toho můžeme řešení soustavy (1,1) s danými okrajovými podmínkami převést na problém nalezení jisté biharmonické funkce  $U(x, y)$ , tj. funkce, která vyhovuje jedině rovnici.

$$\Delta \Delta U(x, y) = 0,$$

jejíž první derivace vyhovují předepsaným podmínkám na hranici vyšetřované oblasti.

Tento problém je již jednodušší, poněvadž řešíme jedinou rovnici. V některých jednoduchých případech se dá Airyho funkce bez velkých nesnází přímo určit. Obecně však i tento problém je poměrně velmi složitý.

E. GOURSAT dokázal, že každá biharmonická funkce  $U(x, y)$  se dá jednoduchým způsobem vyjádřit pomocí dvou analytických funkcí  $\varphi$  a  $\psi$  komplexní proměnné  $z$

$$(1,2) \quad U(x, y) = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)].$$

Protože teorie analytických funkcí je velmi široce vybudována, převádí se problém nalezení biharmonické funkce na problém nalezení dvou analytických funkcí  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z) = \chi'(z)$ , které mají opět splňovat jisté podmínky na hranici vyšetřované oblasti. Tím, že najdeme funkce  $\varphi(z)$  a  $\psi(z)$  je problém řešen, neboť jak složky tenzoru napětí, tak i složky vektoru posunutí z těchto dvou funkcí snadno určíme. Užitečnost zavedení komplexních funkcí  $\varphi(z)$  a  $\psi(z)$  se projevuje zejména při úlohách obtížnějších.

Mimo to existuje řada dalších způsobů řešení rovinných problémů pružnosti, které využívají specifických vlastností konkrétních úloh, ale v podstatě jsou založeny na některém výše uvedeném způsobu řešení.

Protože v případě vícenásobně souvislé oblasti je Airyho funkce napětí mnohoznačná, čímž by nám mohly vzniknout jisté nesnáze, budeme v dalším většinou pracovat s Goursatovými funkcemi  $\varphi$ ,  $\psi$ , viz rovnici (1,2). V případě vícenásobně souvislé oblasti jsou sice tyto funkce také mnohoznačné, ale charakter této mnohoznačnosti je poměrně jednoduchý.

Když na hranici  $c$  vyšetřovaného oboru máme předepsáno napětí, potom hovoříme o prvním základním problému pružnosti. Je-li na hranici předepsáno posunutí, pak hovoříme o druhém základním problému pružnosti. Třetím, čili smíšeným problémem pružnosti nazýváme problém, formulovaný podobně jako první a druhý, přičemž na části hranice je předepsáno napětí a na jiné části hranice je předepsáno posunutí. V literatuře se někdy mluví i o čtvrtém a pátém nebo šestém problému. Je to určitý druh problémů se smíšenými okrajovými podmínkami.

Ve většině prací o koncentraci napětí v okolí otvorů se vyšetřuje první problém pružnosti nebo jistá jeho modifikace. Méně pozornosti je věnováno druhému problému a jen ojediněle jsou řešeny úlohy o tepelné napjatosti prvků s otvory.

Pro větší přehlednost poznatků o koncentraci napětí v okolí otvorů a jejich aplikaci pro technickou praxi, jsou tyto poznatky rozděleny do několika kapitol. V každé kapitole se pak zabýváme souborem problémů, jenž jsou charakterisovány určitým znakem nebo vlivem jistých veličin, např. tvarem vyšetřované oblasti, tvarem hranice otvorů, vlivem anisotropie materiálu, po případě vlivem přestoupení meze pružnosti a podobně. V nejdůležitějších případech

jsou pak uvedeny formulace jednotlivých základních problémů pružnosti, jsou vyloženy principy použitých metod řešení a uvedeny nejzávažnější výsledky.

Poznámka 1,1. Význam symbolů a pojmů užitých v této práci budeme chápat v tom smyslu, jak jsou uvedeny v knize I. BABUŠKA, K. REKTORYS, F. VYČICHLO: *Matematická teorie rovinné pružnosti*, Nakl. ČSAV, Praha 1955. Rovněž některé formulace základních problémů jsou převzaty z této knihy.

Poznámka 1,2. Pokud nebude jinak uvedeno, budeme předpokládat materiál vyšetřovaných těles isotropní a homogenní, pro něž platí Hookův zákon a z něho plynoucí princip superposice.

## KAPITOLA I

### ROZLOŽENÍ NAPJATOSTI V NEKONEČNÉM ROVINNÉM POLI, OSLABENÉM LIBOVOLNÝMI OTVORY S DOSTATEČNĚ HLADKÝMI HRANIČNÍMI KŘIVKAMI

#### 2. PRVNÍ ZÁKLADNÍ PROBLÉM

Budeme uvažovat nekonečné rovinné pole, oslabené konečným počtem otvorů. V tom případě je hraniční křivka  $c$  konečná a jde tedy v podstatě o nekonečná tělesa třetího typu (viz pozn. 2,1).

Při formulování prvního problému pružnosti pro tato tělesa musíme dbát na to, aby byla zaručena jednoznačnost řešení. Na rozdíl od konečných těles není třeba požadovat, aby celkový hlavní vektor,<sup>1)</sup> působící na hranici tělesa, byl roven nule. Přesto budeme v níže uvedené definici prvního problému pružnosti pro  $(m + 1)$ -násobně souvislá, nekonečná tělesa  $T$  třetího typu předpokládat, že celkový hlavní vektor je roven nule. Jestliže tomu tak nebude, budeme řešením prvního problému rozumět funkce  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  tvaru  $\varphi(z) = \varphi_1 + \varphi_0$ ,  $\psi(z) = \psi_1 + \psi_0$ , kde  $\varphi_0$  a  $\psi_0$  jsou holomorfní v  $T$  a

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^m (X_k + iY_k) \ln(z - z_k),$$

$$\psi_1(z) = +\frac{\kappa}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^m (X_k - iY_k) \ln(z - z_k).$$

Přitom  $X_k + iY_k$  jsou hlavní vektory působící na hraničních křivkách  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), přičemž  $c = \bigcup_{k=1}^m c_k$  je hranice tělesa  $T$ . Body  $z_k$  leží uvnitř  $c_k$ .

<sup>1)</sup> Hlavním vektorem, působícím na orientovaný oblouk  $\widehat{AB}$  a vyjádřeným v komplexním tvaru, nazýváme výraz

$$X + iY = \int_{\widehat{AB}} [X_n(s) + iY_n(s)] ds.$$

**Definice 2,1.** (První problém pružnosti pro nekonečná tělesa třetího typu.) Budiž  $T$   $(m + 1)$ -násobně souvislé, nekonečné těleso třetího typu. Nechť na hranici  $c = \bigcup_{k=1}^m c_k$  jsou definovány funkce  $f_k(s)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) po částech dostatečně hladké. Potom řešením prvního problému pružnosti nazýváme funkce  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  holomorfní v  $T$  takové, že:

1.

$$(2,1) \quad \varphi, \varphi', \psi \text{ a } F[F(z) = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]$$

jsou spojitě prodlužitelné na hranici  $c$  s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), v jejichž okolí se funkce  $\varphi(z)$  a  $F(z)$  chovají tak, že

$$(2,2) \quad |\varphi(z)| \leq \left| \frac{1}{z - t_j} \right|^{\frac{1}{2} - \alpha}, \quad |F(z)| \leq \left| \frac{1}{z - t_j} \right|^{\frac{1}{2} - \alpha}, \quad (\alpha > 0).$$

2. Spojité prodloužení funkce  $F(z)$  je všude (s výjimkou bodů  $t_j$ ) na  $c_k$  rovno  $f_k(s) + \beta_k$ , kde  $\beta_k$  jsou neurčené komplexní konstanty, z nichž jednu je možno zvolit libovolně. Funkce  $f_k(s)$  se určí pomocí daných napětí na hranici vztahem  $f_k(s) = i[X_k(s) + i Y_k(s)]$ , kde  $X_k(s)$ ,  $Y_k(s)$  jsou složky hlavního vektoru, působícího se strany kladné normály na část hranice dané parametrem délky  $s$ .

3.

$$(2,3) \quad \text{Pro velká } z \text{ je } F(z) \text{ omezená a } \varphi'(z) \text{ řádu } o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Podmínky (2,3) zaručují jednoznačnost řešení. Dá se však ukázat, že v některých případech můžeme tyto podmínky nahradit podmínkami slabšími. Obvyklou a v současné době častou náhradou (2,3) pro nekonečná tělesa třetího typu je podmínka, že složky tenzoru napětí mají konečné (předepsané) limity pro  $z \rightarrow \infty$ . Pro polorovinu se této modifikace užívá méně často. I v těchto případech se dá ukázat, že při uvedené modifikaci prvního problému pro tělesa třetího typu a pro polorovinu bude rovněž jednoznačnost řešení zaručena.

Poznámka 2,1. O nekonečném tělese budeme říkat, že je třetího typu, jestliže jeho hranici tvoří jen konečné křivky. Další podrobnosti lze najít v [6] na straně 144—149.

Poznámka 2,2. Jsou-li napětí v nekonečnu omezená, nijak z toho ještě neplyne, že také posunutí jsou v okolí nekonečna omezená. K tomu je třeba splnění dalších podmínek. Aby složky tenzoru napětí byly v nekonečnu omezené, je nutno a stačí, aby funkce napětí  $\varphi$ ,  $\psi$  měly v okolí nekonečna tvar

$$(2,4) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma' z + \psi^*(z), \end{aligned}$$

kde  $X + iY$  je celkový hlavní vektor, působící na hranici,  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  jsou funkce holomorfní v nekonečnu a  $\Gamma = B + iC$ ,  $\Gamma' = B' + iC'$  jsou komplexní konstanty. Následkem toho má posunutí v okolí nekonečna tvar

$$(2,5) \quad 2\mu(u + iv) = -\frac{\alpha(X + iY)}{2\pi(1 + \alpha)} \ln |z|^2 + (\alpha\Gamma - \bar{\Gamma})z - \bar{\Gamma}'z + O(1),$$

kde  $u, v$  jsou složky vektoru posunutí,  $\alpha = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$ ,  $\lambda$  a  $\mu$  jsou Laméovy elastické konstanty.

Chceme-li, aby také posunutí bylo v okolí nekonečna omezené, je třeba, aby celkový hlavní vektor  $X + iY$  a konstanty  $\Gamma, \Gamma'$ , byly rovny nule, jak je přímo vidět z (2,5).

Poznámka 2,3. Konstanty  $\Gamma = B + iC$ ,  $\Gamma' = B' + iC'$  mají jednoduchý fyzikální význam. Reálná čísla  $B, B', C'$  jsou určena napětím v nekonečnu, zatím co veličina  $C$  vyjadřuje rotaci tělesa v nekonečnu.

Poznámka 2,4. Okrajová podmínka prvního problému pružnosti může být vyjádřena ve dvou tvarech:

1.

$$(2,6) \quad \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) = f_1(t) + if_2(t),$$

nebo

2.

$$(2,7) \quad \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\alpha}\{t\overline{\Phi'(t)} + \Psi(t)\} = N(t) - iT(t),$$

kde  $\Phi(t) = \varphi'(t)$ ,  $\Psi(t) = \psi'(t)$ .  $N(t)$  a  $T(t)$  jsou normální a tečná složka vnějšího zatížení působícího na hranici tělesa a  $\alpha$  je úhel, který svírá normála s osou  $x$ . Tohoto druhého tvaru se většinou užívá při řešení poloroviny a vztah (2,7) dostaneme buď tím, že derivujeme prostě za příslušných předpokladů funkce napjatosti v rovnici (2,6), nebo uijeme vzorců

$$Y_y = \operatorname{Re}(2\Phi + \bar{z}\Phi' + \Psi), \\ X_y = \operatorname{Im}(\bar{z}\Phi' + \Psi).$$

Formulaci prvního problému pružnosti pro polorovinu, při okrajové podmínce ve tvaru (2,7), lze najít např. v [63] na str. 353, nebo v [6] na str. 246. Výhodou prvního tvaru je téměř shodný tvar s okrajovou podmínkou pro druhý základní problém, takže oba problémy se řeší téměř stejně. Výhoda druhého tvaru spočívá v tom, že funkce  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  jsou jednoznačné i pro tělesa vícenásobně souvislá. Tohoto tvaru užíval hlavně G. V. KOLOSOV.

### 3. METODY ŘEŠENÍ

V tomto odstavci si všimneme nejčastěji užívaných metod k řešení prvního problému pružnosti nebo jeho modifikace pro tělesa třetího typu. Většina

těchto metod má obecnější charakter, tzn. že mohou být užity i na jiná tělesa než třetího typu. Zbývající metody jsou pak založeny na využití jistých specifických zvláštností konkrétních úloh.

**a) Metoda nekonečných řad.** Tento způsob řešení se zpravidla používá pro oblasti ohraničené jednou nebo dvěma koncentrickými kružnicemi. Ve spojení s konformním zobrazením se může metoda užít i na oblastech obecnějších typů.

Metodu vyložíme na tělese třetího typu s jednou hraniční křivkou a za předpokladu, že složky tenzoru napětí jsou v nekonečnu omezené.

Mějme tedy řešit první problém pružnosti pro těleso třetího typu (např. vnějšek kruhu o poloměru  $R$ ) s okrajovou podmínkou ve tvaru (2,7). Podle předpokladu budou mít funkce napjatosti  $\varphi, \psi$  tvar (2,4). Diferencováním těchto výrazů obdržíme pro funkce  $\Phi(z), \Psi(z)$  výrazy

$$(3,1) \quad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}.$$

Za předpokladu, že řady (3,1) konvergují i na hranici  $c$ , dosazením do (2,7) a po jednoduchých úpravách obdržíme

$$(3,2) \quad N(t) - iT(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{R^k} (1+k) e^{-ik\vartheta} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{R^k} e^{ik\vartheta} - b_0 e^{i2k\vartheta} - \\ - \frac{b_1}{R} e^{i\vartheta} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{k+2}}{R^{k+2}} e^{-ik\vartheta}.$$

Rozviňme dále funkci  $N(t) - iT(t)$ , definovanou na hranici  $c$ , v komplexní Fourierovu řadu

$$(3,3) \quad N - iT = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\vartheta},$$

kde

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (N - iT) e^{-ik\vartheta} d\vartheta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Dosadíme do levé strany rovnice (3,2) výraz (3,3) a porovnejme absolutní členy i koeficienty při stejných mocninách  $e^{i\vartheta}$ . Z tohoto porovnání dostaneme

$$(3,4) \quad 2a_0 - \frac{b_2}{R^2} = A_0, \quad \frac{1}{R} (\bar{a}_1 - b_1) = A_1, \quad \frac{\bar{a}_2}{R^2} - b_0 = A_2, \\ \frac{\bar{a}_n}{R^n} = A_n \quad (n \geq 3), \quad \frac{1+n}{R^n} a_n - \frac{b_{n+2}}{R^{n+2}} = A_{-n} \quad (n \geq 1).$$

Z (3,2) je vidět, že

$$(3,5) \quad a_0 = \Gamma = B, \quad b_0 = \Gamma' = B' + iC',$$

kde  $\Gamma, \Gamma'$  jsou dané veličiny, charakterisující rozložení napjatosti v nekonečnu.



Vztahy (3,4), (3,5), spolu s podmínkou jednoznačnosti, která v našem případě má tvar  $za_1 + \bar{b}_1 = 0$ , určují všechny potřebné koeficienty  $a_n, b_n$ , čímž úloha je řešena.

**b) Metoda Muschelišviliho.** Těto metody se užívá pro oblasti, které leží buď uvnitř nebo vně jediné uzavřené křivky  $c$ . V praxi touto křivkou bývá obvykle kružnice. Je založena na použití integrálů Cauchyova typu a zejména jejich hraničních hodnot. Jejich pomocí se první problém rovinné pružnosti převede na integrální rovnici

$$(3,6) \quad \frac{\overline{\varphi}(t_0)}{\varphi(t_0)} + \frac{1}{\pi} \int_c \varphi(t) \vartheta'(t_0, t) dt - \frac{1}{\pi} \int_c \varphi(t) \vartheta'(t_0, t) \exp[-i 2\vartheta(t_0, t)] dt = A(t_0),$$

přičemž  $A(t_0) = \lim_{z^* \rightarrow t_0} A(z^*)$  a

$$A(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{F(t)}{t - z^*} dt, \quad F(t) = \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}.$$

Mimo to  $\vartheta(t_0, t)$  je úhel, který svírá vektor  $\vec{t_0 t}$  s kladným směrem osy  $x$ ,  $c = \bigcup_{k=1}^m c_k$  je hranice tělesa  $T$ ,  $c_k$  jsou uzavřené a dostatečně hladké křivky,  $\vartheta'(t_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(t_0, t)$ ,  $t_0$  bod ležící na  $c$ .

Integrální rovnice (3,6) vyjadřuje podmínku pro funkci  $\varphi(t)$  na hranici vyšetřovaného tělesa  $T$ . Její řešení, pokud existuje, nalezneme obvyklými metodami řešení integrálních rovnic.

Podrobné a úplné odvození Muschelišviliho integrální rovnice lze najít např. v [63] na str. 364 a dalších. Poznamenejme, že je-li  $\varphi(t)$  řešením rovnice (3,6), potom funkce

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(t)}{t - z} dt,$$

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(t)}{(t - z)^2} dt,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_c \frac{f(t)}{t - z} dt - \int_c \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z} dt - \int_c \frac{\overline{t \varphi'(t)}}{t - z} dt \right]$$

( $z$  je uvnitř  $T$ ), jsou skutečně hledané funkce napjatosti v  $T$  a mají všechny vlastnosti, které vyžaduje naše formulace prvního problému pružnosti.

**e) Metoda Lauricellova-Šermanova.** Tato metoda představuje další způsob, kterým se mohou problémy rovinné pružnosti převést na integrální rovnici. Integrální rovnice Lauricellova-Šermanova je podobná rovnici Muschelišviliho

liho, ale má ve srovnání s ní mnohé přednosti, zejména pokud jde o numerické řešení. Podle Šermanovy myšlenky budeme hledat řešení ve tvaru

$$(3,7) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(t) dt}{t-z} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z-z_j},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\overline{\omega(t)} dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\overline{t} \omega(t) dt}{(t-z)^2} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z-z_j}.$$

Přitom  $c$  značí celou hranici ( $c = \bigcup c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ),  $\omega(t)$  je hledaná funkce na hranici tělesa,  $z_j$  jsou libovolné, ale pevně zvolené body uvnitř  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) a  $b_j$  jsou zatím neznámé reálné konstanty, dané vztahem

$$(3,8) \quad b_j = i \int_{c_j} [\overline{\omega(t)} dt - \omega(t) dt].$$

Postupem, který je úplně a podrobně popsán např. v [6] na str. 256–264, lze odvodit tzv. integrální rovnici Lauricellovu-Šermanovitu pro neznámou funkci  $\omega(t)$ :

$$(3,9) \quad \omega(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{c_k} \omega(t) \vartheta'(t_0, t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{c_k} \overline{\omega(t)} \exp [2i\vartheta(t_0, t)] \vartheta'(t_0, t) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_j}{t_0 - z_j} + \frac{\overline{b_j}}{t_0 - \overline{z_j}} \left( 1 - \frac{t_0}{t_0 - \overline{z_j}} \right) \right\} - \beta_k = f(t_0)$$

na  $c_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ ),  $z_0 = 0$ . Konstanty  $\beta_k$  můžeme psát ve tvaru

$$(3,10) \quad \beta_k = - \int_{c_k} \omega(t) ds \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad \beta_0 = 0.$$

Po dosazení (3,10) do (3,9) obdržíme rovnici, která obsahuje jedinou neznámou funkci  $\omega(t)$ .

**d) Metoda křivočarých souřadnic.** Řešení mnoha problémů rovinné i prostoro-  
vé pružnosti můžeme podstatně zjednodušit zavedením vhodně zvoleného  
systému křivočarých, ortogonálních souřadnic, přičemž přihlížíme k tomu, aby  
zvolený systém umožňoval, pokud možno, nejjednodušší formulaci okrajových  
podmínek. Mimo to je třeba požadovat, a v tom právě tkví podstata této me-  
tody, aby pro daný problém (tj. pro danou diferenciální rovnici) byla ve zvole-  
ném systému souřadnic přípustná separace proměnných. Řešení se pak hledá  
obvyklými metodami.

Jako jednoduché příklady takovýchto systémů mohou sloužit souřadnice po-  
lární, cylindrické nebo sférické. Poměrně složitější jsou např. v rovině sou-  
řadnice eliptické, parabolické a bipolární, v prostoru pak souřadnice prostoro-  
vě bipolární, toroidální a další.

Úloha, najít k dané diferenciální rovnici systém křivočarých, ortogonálních

souřadnic, které by připouštěly separaci proměnných, není nikterak snadná. O obtížnosti této úlohy svědčí ta skutečnost, že obecné řešení této úlohy nebylo do současné doby udáno. Bylo však nalezeno řešení několika speciálních případů tohoto problému. Mezi nimi je také řešení pro biharmonickou rovnici, které, jak známo, vyhovuje Airyho funkce napětí. Všimneme si tohoto případu blíže.

Buďte  $\lambda$  a  $\mu$  libovolné parametry a necht  $(\alpha, \beta)$  je systém rovinných křivočarých a ortogonálních souřadnic, definovaných rovnicí

$$(3,11) \quad x + iy = f(x + i\beta).$$

Aby takto definovaný systém  $(\alpha, \beta)$  připouštěl pro biharmonickou rovnici  $\Delta\Delta u(x, y) = 0$  separaci proměnných, je třeba a stačí, aby pro funkci  $f(x + i\beta) = f(\zeta)$  platilo

$$(3,12) \quad f(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{F^2(\zeta)},$$

kde  $F(\zeta)$  je integrál diferenciální rovnice

$$(3,12a) \quad F''(\zeta) - \mu^2 F(\zeta) = 0.$$

Potom biharmonická rovnice  $\Delta\Delta u(x, y) = 0$  má nekonečně mnoho partikulárních řešení tvaru

$$(3,13) \quad u(\alpha, \beta) = |f'| A(\alpha) \frac{\cos \lambda\beta}{\sin \lambda\beta}.$$

Na základě (3,11) a (3,12) se dá již poměrně snadno ukázat, že dvourozměrná biharmonická rovnice připouští separaci proměnných v kartézských, polárních, bipolárních a degenerovaných polárních souřadnicích.

Obecný typ substituce (3,11) je pro vyšetřovaný typ rovnice dán formálí

$$(3,14) \quad f(\zeta) = \frac{a}{\mu \operatorname{ctgh}(\mu\zeta) + b} + d,$$

kde  $a, b, d$  jsou libovolné konstanty, jejichž vhodnou volbou dostaneme přípustné systémy souřadnic. Na příklad:

1. Kartézské souřadnice:  $a = 1, b = d = 0, \mu = 0, f(\zeta) = \zeta, \alpha = x, \beta = y$ , partikulární řešení budou mít tvar

$$u(x, y) = (A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + Cx \operatorname{ch}(\lambda x) + Dx \operatorname{sh}(\lambda x)) \frac{\cos(\lambda y)}{\sin(\lambda y)}.$$

2. Polární souřadnice:  $a = d = 1, b = -\frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}, f(\zeta) = \exp(\zeta), \alpha = \ln r, \beta = \varphi$ , partikulární řešení budou mít tvar

$$u(r, \varphi) = (Ar^\lambda + Br^{-\lambda} + Cr^{\lambda+2} + Dr^{-\lambda+2}) \frac{\cos \lambda\varphi}{\sin \lambda\varphi}.$$

3. Bipolární souřadnice:  $a = \frac{1}{2}c$ ,  $b = d = 0$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $f(\zeta) = c \cdot \operatorname{tgh} \frac{1}{2}\zeta$ , partikulární řešení budou mít tvar

$$u(\alpha, \beta) = \frac{c}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} [A \operatorname{ch} (\lambda + 1) \alpha + B \operatorname{sh} (\lambda + 1) \alpha + C \operatorname{ch} (\lambda - 1) \alpha + D \operatorname{sh} (\lambda - 1) \alpha] \frac{\cos \lambda \beta}{\sin \lambda \beta}.$$

4. Degenerované polární souřadnice:  $a = -\frac{C}{\mu^2}$ ,  $b = \frac{1}{\mu}$ ,  $d = \frac{C}{\mu}$ ,  $\mu \rightarrow 0$ ,  $f(\zeta) = \frac{C}{\zeta}$ , partikulární řešení budou mít tvar

$$u(\alpha, \beta) = \frac{C}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} [A \operatorname{ch} \lambda \alpha + B \operatorname{sh} \lambda \alpha + C \alpha \operatorname{ch} \lambda \alpha + D \alpha \operatorname{sh} \lambda \alpha] \frac{\cos \lambda \beta}{\sin \lambda \beta}.$$

Poznámka 3,1. V některých konkrétních případech je možno užít metody křivočarých souřadnic ve spojení s jistým obratem např. ve spojení s Fourierovým integrálem nebo s jinou metodou např. s metodou Muschelšviliho.

**e) Metoda přibližného konformního zobrazení.** Metoda přibližného konformního zobrazení umožňuje přibližně řešit otázky rozložení napjatosti v okolí otvorů s úhlovými body nejvýše pro dvojnásobně souvislé oblasti. Na příklad nechť funkce  $z = \omega(\zeta)$  konformně zobrazuje vnějšek čtverce, tj. rovinu se čtvercovým otvorem, na vnějšek jednotkového kruhu. Protože funkce  $\omega(\zeta)$  je vně jednotkového kruhu holomorfní, může tam být vyjádřena mocninou řadou

$$(3,15) \quad \omega(\zeta) = C_0 \left[ \zeta + \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_2}{\zeta^2} + \frac{C_3}{\zeta^3} + \dots \right].$$

Je jasné, že vezmeme-li v (3,15) pouze konečný počet členů řady, nebude mít uvažovaný otvor přesný tvar čtverce, ale čtverce se zakřivenými stranami a zaoblenými vrcholy. Protože řada (3,15) poměrně rychle konverguje, můžeme si vždy zvolit takový počet členů této řady, aby odchylka hranice  $\gamma_0$  tohoto otvoru od přesné hranice čtverce vyhovovala požadované přesnosti.

Fyzikálně to znamená, že v podstatě neřešíme problém koncentrace napětí v okolí čtverce, ale v okolí otvoru, který v jistém smyslu se libovolně málo liší od čtverce, ale s tím rozdílem, že jeho hranice již neobsahuje úhlové body. Tímto postupem se řada úvah při řešení podobných problémů podstatně zjednoduší. Této metody si nyní všimneme blíže. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že hlavní vektor působící na hranici je roven nule. Poznamenejme, že otázky existence a jednoznačnosti řešení rovinných problémů pružnosti při použití této metody jsou vyřešeny. Další podrobnosti jakož i vysvětlení přibližného charakteru této metody lze najít v [6] na str. 366.

Podstata této metody pro dvojnásobně souvislou oblast spočívá v tom, že tato vyšetřovaná oblast  $\Omega$  s hraniční křivkou  $c$  po částech hladkou se konformně

zobrazí na vnějšek  $\Omega^*$  jednotkové kružnice  $\gamma_0$ . Protože hranice  $\gamma_0$  oblasti  $\Omega^*$  je hladká, můžeme pro tuto oblast užít všech metod vyložených v předcházejících odstavcích, a tím najít řešení dané úlohy.

Předpokládejme, že známe funkci  $z = \omega(\zeta)$ ,  $z \in \Omega$ ,  $\zeta \in \Omega^*$ , realisující konformní zobrazení oblasti  $\Omega$  na  $\Omega^*$  a to tak, že bodu  $\xi = \infty$  odpovídá bod  $z = \infty$ , a že bod  $\zeta = 0$  (resp.  $z = 0$ ) neleží v  $\Omega^*$  (resp. v  $\Omega$ ). Potom funkce  $\omega(\zeta)$  má tvar

$$(3,16) \quad z = \omega(\zeta) = A\zeta + \omega_0(\zeta),$$

kde  $\omega_0(\zeta)$  je holomorfní v  $\Omega^*$ . Jsou-li  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  holomorfní v  $\Omega$ , pak  $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$ ,  $\psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta))$  jsou holomorfní v  $\Omega^*$ , neboť

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi_1(\omega(\zeta)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_1(z)$$

a podobně pro funkci  $\psi(\zeta)$ .

Hraniční podmínka (např. prvního problému pružnosti) má tvar (2,6). Z ní, užitím transformace (3,16), dostaneme

$$(3,17) \quad \varphi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\varphi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = f(\tau), \quad t = \omega(\tau).$$

Jestliže se nám podaří jakýmkoliv způsobem určit funkci  $\varphi(\zeta)$ , potom budeme moci funkci  $\psi(\zeta)$  vypočítat přímo, neboť rovnice (3,17) určuje hraniční hodnotu  $\psi(\tau)$  funkce  $\psi(\zeta)$ , kterou tedy můžeme definovat vzorcem

$$(3,18) \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \zeta}.$$

Po dosazení za  $\psi(\tau)$  z (3,17) do (3,18) dostaneme pro funkci  $\psi(\zeta)$  rovnici

$$(3,19) \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\bar{f} - \bar{\varphi}}{\tau - \zeta} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau.$$

Zbývá určit funkci  $\varphi(\zeta)$ . Za tím účelem sestavíme funkcionální rovnici obsahující pouze  $\varphi(\zeta)$  a plynoucí bezprostředně z okrajové podmínky. Napišme okrajovou podmínku (3,17) ve tvaru

$$(3,20) \quad \overline{\psi(\tau)} = f(\tau) - \varphi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\varphi'(\tau)}$$

a označme pravou stranu (3,20) symbolem  $H(\tau)$ . K tomu, aby funkce  $H(\tau)$  byla hraniční hodnotou jisté funkce  $\psi(\zeta)$  holomorfní v  $\Omega^*$  je nutné a stačí, aby

$$(3,21) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\overline{H(\tau)}}{\tau - \zeta} d\tau = 0$$

pro všechna  $\zeta$  vně  $\gamma_0$ . Píšeme-li místo  $H(\tau)$  pravou stranu (3,20), obdržíme

$$(3,22) \quad \varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \cdot \frac{\overline{\varphi'(\tau)}}{\tau - \zeta} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - \zeta}.$$

To je funkcionální rovnice pro funkci  $\varphi(\zeta)$ . Otázky úpravy a řešitelnosti této rovnice jsou podrobně prodiskutovány v [63] nebo v [6].

Poznámka 3,1. V obecném případě (nenulový hlavní vektor) mají funkce  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  pro oblast  $\Omega$  tvar (2,4). Ne zcela jednoduchou úvahou se dá dokázat, že v tomto případě, užitím transformace (3,16), budou mít transformované funkce napjatosti v  $\Omega^*$  tvar

$$(3,23) \quad \varphi(\zeta) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \varkappa)} \ln \zeta + A\Gamma\zeta + \varphi_0(\zeta),$$

$$(3,24) \quad \psi(\zeta) = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1 + \varkappa)} \ln \zeta + A\Gamma'\zeta + \psi_0(\zeta),$$

kde  $\varphi_0(\zeta)$  a  $\psi_0(\zeta)$  jsou funkce holomorfní vně  $\gamma_0$  a v nekonečnu. Dosadíme-li (3,23) a (3,24) do okrajové podmínky (3,17), vidíme, že funkce  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  musí vyhovovat téže okrajové podmínce (3,17) s tím rozdílem, že místo  $f(\tau)$  třeba uvažovat  $f_0(\tau)$ , přičemž

$$f_0(\tau) = f(\tau) + \frac{X + iY}{2\pi} \ln \tau - A\Gamma\tau - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \left\{ \frac{X - iY}{2\pi(1 + \varkappa)} \tau - A\Gamma' \right\} - \frac{A\Gamma'}{\tau}.$$

Poznámka 3,2. Analogickým způsobem se řeší i druhý základní problém pružnosti.

**f) Metoda Greenovy funkce.** Metoda Greenovy funkce je ve své podstatě další způsob, jak rovinný problém teorie pružnosti převést na integrální rovnici. Při odvozování této rovnice, na rozdíl od rovnice Muschelišviliho či Lauricellovy-Šermanovy, se využívá některých důležitých vlastností Schwarzova jádra pro vyšetřovanou oblast.

Tato metoda je zobecněním metody přibližného konformního zobrazení na vícenásobně souvislé oblasti, protože metody přibližného konformního zobrazení je možno užít nejvýše na oblasti dvojnásobně souvislé.

Poznámka 3,3. Pro ilustraci výše uvedených metod řešení uvedeme vždy několik nejnovějších prací, v nichž je k řešení užito některé z příslušných metod. Přitom si budeme všimnout hlavně způsobu zatížení, metody řešení a pokud v jednotlivých případech budou, i numerických výsledků.

#### 4. VÝSLEDKY ŘEŠENÍ

**4,1.** ANIKIN [3] vyšetřoval koncentraci napětí v okolí obdélníkového otvoru v nekonečné rovině, zatížené jednak rovnoměrným tahem v nekonečnu, jednak prostým smykem v nekonečnu, v závislosti na poměru  $R : b$  ( $R$  — poloměr křivosti v bodech, které při použitém přibližném konformním zobrazení, odpovídají vrcholům obdélníkového otvoru;  $b$  — menší strana otvoru). Uvedena ta-

bulka koeficientu koncentrace napětí na obvodě otvoru při různých hodnotách  $a : b$ ,  $R : b$  v obou případech zatížení ( $a$  — větší strana otvoru). Obdobný problém řešil JAEGER [38]. Pro otvor tvaru rovnoramenného lichoběžníka v nekonečné rovině zatížené v nekonečnu prostým tahem řešil problém БОЖМ [9]. Je uveden číselný příklad a grafy napětí po obvodě otvoru.

**4.2. DEAN** (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, No 4) vyšetřoval napjatost nekonečné desky, oslabené eliptickým otvorem a podél obvodu tohoto otvoru vetknuté. Deska byla zatížena singulární transversální silou, působící v libovolném bodě desky. Vzhledem k tomu, že v žádné z novějších prací o koncentraci napětí v okolí otvorů není použito metody Greenovy funkce, uvádíme tuto práci, která jinak do našeho přehledu nezapadá, jako ilustraci postupu při konstrukci Greenovy funkce. Je to hlavně první část uvedené práce, ve které nepříliš složitým způsobem je zkonstruována Greenova funkce pro rovinu s eliptickým otvorem v uzavřeném tvaru. Přitom bylo užito konformního zobrazení vnějšku elipsy na vnějšek kruhu pomocí funkce

$$z = a(\zeta + m\zeta^{-1}), \quad a > 0, \quad 0 \leq m \leq 1.$$

V druhé části jsou pak vyšetřeny dva speciální případy, a to  $m = 0$  a  $m = 1$ . První odpovídá kružnici, druhý pak úzké šterbině. Snad proto, že problém není příliš složitý, vyniknou všechny operace a obraty, kterých autor při řešení těchto speciálních případů užil. Je to pěkný příklad užití metody Greenovy funkce.

**4.3. KOŽEVNIKOVA** [43] analysovala tři případy zatížení roviny, oslabené obdélníkovým otvorem s poměrem stran  $a : b = 2$ , a to:

- a) jednoosý, rovnoměrný tah v nekonečnu;
- b) vliv vlastní váhy;
- c) hydrostatický tlak na okraji otvoru.

Výsledky jsou vyjádřeny tabulkami, v nichž je několik nepřesností, např. není uvedeno, pro které poloměry zaoblení rohů jsou tyto tabulky sestaveny.

**4.4. MOSSAKOVSKIJ-ZARUBIŽENKO** ve své práci [60] se zabývali úlohou o rozložení napjatosti v nekonečné rovině, oslabené obdélníkovou šterbinou a zatížené v nekonečnu rovnoměrným tlakem, jehož směr svírá jistý úhel se směrem šterbiny. Práce obsahuje několik snadno odstranitelných chyb.

V další jejich práci [61] je dáno vyšetření předchozího problému za předpokladů, že

- a) šířka šterbiny je zanedbatelná,

b) šířka šterbiny je souměřitelná s pružnými deformacemi. Je ukázáno, že v případě a) dochází ke styku roviny po celé délce šterbiny; v případě b) je třeba rozlišovat tři intervaly: dva volné na okrajích šterbiny a jeden dotykový uprostřed šterbiny. V obou případech a) i b) jsou určeny složky tenzoru napětí a v případě b) též délka dotýkajícího se intervalu.

4,5. PODSTRIGAČ [74] řešil úlohu o napětí v rovině, oslabené dvěma nestejně velkými kruhovými otvory, na jejichž okraje působí normální a tečné síly, které jsou v každém otvoru v rovnováze. Problém je řešen užitím bipolárních souřadnic  $\xi, \eta$  jež jsou vázány zobrazením

$$z = x + iy = -a \cdot \operatorname{tgh} \left( \frac{1}{2} i \zeta \right), \quad \zeta = \xi - i \eta.$$

Pomocí tohoto zobrazení se biharmonická rovnice pro Airyho funkci napětí  $U(x, y)$  transformuje na rovnici

$$(4,1) \quad \left[ \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right] (gU) = 0$$

pro neznámou funkci  $gU$ , kde  $g$  je první diferenciální parametr bipolární soustavy souřadnic. Řešení rovnice (4,1) se hledá ve tvaru

$$\frac{1}{a} gU = D_1 \eta \operatorname{ch} \eta + K (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi) \ln (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \cos n \xi,$$

kde

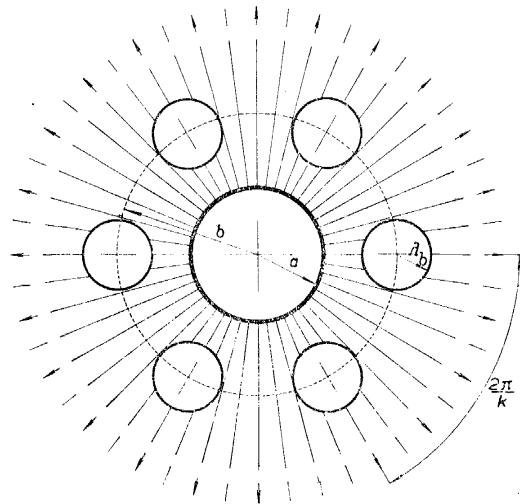
$$\begin{aligned} f_n(\eta) &= A_n \operatorname{ch} (n+1) \eta + B_n \operatorname{ch} (n-1) \eta + C_n \operatorname{sh} (n+1) \eta + \\ &\quad + D_n \operatorname{sh} (n-1) \eta \quad (n > 1), \\ f_1(\eta) &= A_1 \operatorname{ch} 2\eta + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\eta - D_1 \eta. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky se píší ve tvaru

$$\sigma_{\eta}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k \xi, \quad \tau_{\xi \eta}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin k \xi \quad (i = 1, 2).$$

Využitím známých vztahů, jež vázou v bipolárních souřadnicích složky tenzoru napětí  $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \tau_{\xi \eta}$  a funkci  $gU$ , dále okrajových podmínek a podmínky v nekonečnu  $(gU)_{\infty} = 0$ , se obdrží systém lineárních rovnic pro určení konstant  $A_n, B_n, C_n, D_n$  a  $K$ .

Příklad uvádíme z důvodu, že názorně ilustruje použití bipolárních souřadnic při řešení problémů rovinné pružnosti. Podrobné informace o bipolárních souřadnicích podává monografie JA. S. UFLJANDA, *Биполарные координаты в теории упругости*, Moskva 1950.



Obr. 1.



**4.6.** RADKOWSKI [75] řešil problém roviny oslabené kruhovým otvorem, kolem kterého je kruhový věnec sestávající z dalších  $k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) kruhových otvorů (obr. 1). Kruhový věnec může obsahovat libovolný konečný počet otvorů (na obr. 1 je namalováno těchto otvorů šest). Rovina je v nekonečnu zatížena rovnoměrným všestranným tahem. Distribuce napětí v této rovině je reprezentována Airyho funkcí, která jest kombinací Airyho funkce pro rovinu s kruhovým otvorem

$$S_1 = A \ln r + B r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^2 + B_n) r^{-n} \cdot \cos nk\varphi$$

a Airyho funkce  $S_2$  pro rovinu s kruhovými otvory, uspořádanými do kruhu. Funkci  $S_2$  autor definuje poněkud složitým způsobem pomocí jisté třídy harmonických funkcí. V každém z těchto případů jde o řadu biharmonických funkcí s neurčitými koeficienty. K jejich určení se z podmínek volných okrajů a z podmínky v nekonečnu obdrží nekonečný systém lineárních rovnic.

**4.7.** ROTHMAN-ROSS [77] vyšetřovali vliv různého zatížení nekonečné roviny oslabené obdélníkovou štěrbinou (všestranný tah v nekonečnu, prostý tah v nekonečnu, na koncích menší osy působí dvě opačné singulární síly). Obdržené teoretické výsledky byly srovnány se zkouškami (pro konečné desky, přičemž délka štěrbin byla menší než  $\frac{1}{6}$  šířky desky), které byly prováděny fotoelastickými metodami.

**4.8.** SAITO [79] částečně řešil úlohu o „perforované rovině“. Jak jsme již uvedli, jde o problém roviny oslabené nekonečným počtem otvorů (v tomto případě kruhových), jejichž středy  $O_{m,n}$  jsou uzlovými body sítě, tvořené dvěma navzájem kolmými osnami rovnoběžných přímek, přičemž vzájemná vzdálenost přímek v první osnově je  $a$  a v druhé osnově  $b$ . Nejdříve autor zavádí pro každý otvor pravoúhlé souřadnice s počátkem ve středu příslušného otvoru a se souřadnými osami rovnoběžnými s řadami děr. Příslušné komplexní souřadnice vzhledem k  $(m, n)$ -tému otvoru jsou potom dány vztahem

$$z_{m,n} = x_{m,n} + iy_{m,n} = a \varrho_{m,n} e^{i\varphi_{m,n}} \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots),$$

kde  $\varrho_{m,n}$ ,  $\varphi_{m,n}$  jsou polární souřadnice s pólem v  $O_{m,n}$ . Označíme-li  $z_{0,0} = z$  a  $O_{0,0} = 0$ , potom  $z_{m,n} = z - q_{m,n}$ ,  $q_{m,n} = ar_{m,n} e^{i\varphi_{m,n}}$ ,

$$r_{m,n} = \sqrt{m^2 + n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \varphi_{m,n} = \operatorname{arctg} \frac{nb}{ma}.$$

Poloměr otvorů je vyjádřen pomocí parametru  $\lambda$  ve tvaru  $r = \lambda a$ . Hranice otvorů jsou nezatíženy, v nekonečnu je rovina namáhaná konstantním tahovým zatížením  $p$ , které svírá s osou  $x$  úhel  $\alpha$ . Počátek souřadného systému je umístěn do středu jednoho otvoru. Protože v tomto případě nejde o těleso třetího typu, je užitá metoda nekonečných řad poněkud modifikována.

Problém vede na úlohu stanovit z podmínky volných okrajů otvorů a z podmínky v nekonečnu dvě analytické funkce  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  tvaru

$$\varphi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^{-k}, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{a}\right)^{-k-2},$$

kde  $A_k = a_k + ia'_k$ ,  $B_k = b_k + ib'_k$  jsou neznámé konstanty, jež je třeba určit. Konstanty  $a_k, a'_k, b_k, b'_k$  se hledají ve tvaru nekonečných řad parametru  $\lambda$  (při  $b \geq a$  je  $\lambda < 0,5$ )

$$(4,2) \quad a_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2t}^{(j)} \lambda^{2t+j}, \quad b_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2t}^{(j)} \lambda^{2t+j+2},$$

$$a'_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} a'_{2t}{}^{(j)} \lambda^{2t+j}, \quad b'_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{2t}{}^{(j)} \lambda^{2t+j+2},$$

kde  $b_0^{(0)} = \frac{1}{2}p$ ,  $b_2^{(0)} = -\frac{3}{2}p \cos 2\alpha$ ,

$$b_2^{(0)'} = -\frac{3}{2}p \sin 2\alpha,$$

$$a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}p \cos 2\alpha,$$

$$a_2^{(0)'} = -\frac{1}{2}p \sin 2\alpha,$$

$$a_{2t}^{(0)} = a'_{2t}{}^{(0)} = b_{2t}^{(0)} = b'_{2t}{}^{(0)} = 0$$

pro  $t \geq 2$ ,

$$a_{2t}^{(j)} = a'_{2t}{}^{(j)} = b_{2t}^{(j)} = b'_{2t}{}^{(j)}$$

a nezávisí na parametru  $\lambda$ .

Konvergence řad (4,2) není vyšetřena.

Pouze pro  $a : b = 1$  se bez důkazu tvrdí, že největší hodnota parametru  $\lambda$ , pro niž řady (4,2) konvergují, je rovna 0,27.

Práce je psána anglicky a je poměrně stručná, informativní a neobsahuje důkazy některých tvrzení.

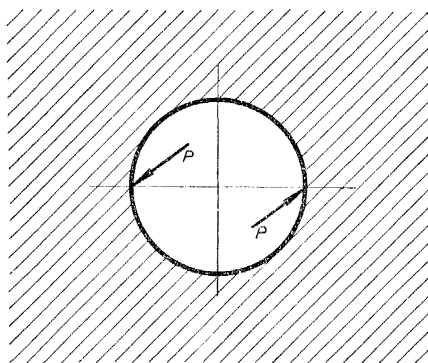
4,9. SAVRUK [84] řešil problém roviny oslabené dvěma kruhovými otvory stejného poloměru, jež je v nekonečnu zatížena čistým smykem. K řešení bylo užito metody bipolárních souřadnic.

4,10. SZELAGOWSKI [96] řešil problém roviny s kruhovým otvorem, jehož hranice je zatížena dvojicí singulárních sil (obr. 2). K řešení užito vlastnosti Poissonova integrálu a vztahů G. V. KOLOSOVA, jež vážou složky tenzoru napětí s Goursatovými funkcemi  $\varphi, \psi$

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \{ \varphi'(z) \},$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)].$$

Přitom řešena pomocná úloha pro rovinu s kruhovým otvorem, namáhaným rovnoměrným tečným zatížením na intervalech  $(\operatorname{Re} i\alpha, \operatorname{Re} -i\alpha)$ ,  $(\operatorname{Re} i(\pi-\alpha), \operatorname{Re} i(\pi+\alpha))$  hranice.



Obr. 2.

Tento poměrně jednoduchý příklad a rovněž tak příklad následující uvádíme jako ukázkou poněkud neobvyklého využití vlastností Poissonova integrálu k řešení rovinných problémů pružnosti. Domníváme se, že metoda Muschelišviliho nebo Lauricellova-Šermanova je jednodušší než způsob použitý autorem.

**4.11.** SZELAGOWSKI [95] řešil úlohu o vlivu dvou protisměrných singulárních sil, působících na průměru kruhového otvoru v nekonečné rovině. Podobně jako ve své předchozí práci použil autor stejného postupu a vlastností Poissonova integrálu. Jiné metody jsou, jak jsme již řekli, jednodušší.

**4.12.** VAJNBERG [114] vyšetřil rozložení napjatosti v pružné, nekonečné rovině se čtvercovým otvorem v případě, že část hranice otvoru je zatížená předepsaným zatížením (první základní problém).

**4.13.** ZABLUDOVSKIJ [116] řešil problém roviny se dvěma různě velkými kruhovými otvory. Rovina je namáhána v nekonečnu jednoosým tahem. Užito metody Muschelišviliho ve spojení s konformním zobrazením vyšetřované oblasti na mezikruží. Numericky vyšetřen speciální případ:  $r_1 = 3r_2$ ,  $O_1O_2 = 5r_2$ ,  $r_1, r_2$  jsou poloměry otvorů a  $O_1O_2$  je vzdálenost jejich středů. Podobnou úlohu řešil PODSTRIGAČ [72].

Poznámka 4.1. U tzv. problému „perforované roviny“ jde v podstatě o rovinu oslabenou nekonečným počtem otvorů, čímž se hraniční křivka stává nekonečnou a nejde tedy o těleso třetího typu. Přesto si, pro úplnost, všimáme tohoto problému, o němž nelze zatím říci, že by byl vyřešen. Výše uvedená práce řešení spíše jen naznačuje, protože řada konvergenčních otázek je otevřena.

## 5. DRUHÝ ZÁKLADNÍ PROBLÉM

Při druhém základním problému pružnosti jde v podstatě o to, že z daného posunutí na hranici tělesa  $T$  je třeba stanovit rozložení napjatosti v tělese  $T$ .

Tento druh úloh se vyskytuje např. v případech, kdy do otvorů je zalisováno jádro z jiného nebo téhož materiálu, jako je materiál oslabené roviny. Při formulaci druhého problému pro nekonečná tělesa třetího typu budeme předpokládat, že celkový hlavní vektor působící na vyšetřované těleso je roven nule. V opačném případě zvolíme libovolné partikulární řešení takové, že celkový hlavní vektor bude roven předepsanému hlavnímu vektoru  $X + iY$ , na příklad

$$\varphi^*(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + z)} \ln(z - z_0),$$

$$\psi^*(z) = \frac{z(X - iY)}{2\pi(1 + z)} \ln(z - z_0),$$

kde  $z_0$  je libovolný, ale pevně zvolený bod, ležící mimo těleso  $T$ . Toto partikulární řešení nám způsobí deformaci  $g_0(s)$  hraničních křivek. Máme-li nyní předepsanou funkci  $g(s)$  na hranici, potom najdeme řešení s předepsaným nulovým hlavním vektorem druhého problému, které přísluší okrajové funkci  $g(s) - g_0(s)$ . Nyní stačí sečíst nalezené funkce napjatosti s funkcemi  $\varphi^*(z)$ ,  $\psi^*(z)$ , čímž obdržíme řešení druhého problému s předepsaným nenulovým hlavním vektorem.

**Definice 5.1.** (Druhý problém pružnosti pro nekonečná tělesa třetího typu.) Buď  $T$  nekonečné těleso třetího typu s dostatečně hladkými hraničními křivkami  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Necht' na hranici je definována funkce  $g(s)$  po částech dostatečně hladká. Potom druhým problémem teorie pružnosti nazýváme problém určení komplexních konstant  $A_1, A_2, \dots, A_m$  a funkcí  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$ , holomorfních v  $T$  a rovných nule v nekonečnu, takových, že

1. funkce  $\varphi_0(z)$ ,  $\varphi_0'(z)$ ,  $\psi_0(z)$  a funkce  $G_0(z) = \varkappa \varphi_0(z) - z \overline{\varphi_0'(z)} - \overline{\psi_0(z)}$  jsou spojitě prodloužitelné na hranici nejvýše s výjimkou konečného počtu bodů  $t_k$ , v jejichž okolí platí

$$|\varphi_0(z)| \leq \left| \frac{1}{z - t_k} \right|^{\frac{1}{2} - \beta}, \quad |G_0(z)| \leq \left| \frac{1}{z - t_k} \right|^{\frac{1}{2} - \beta} \quad (\beta > 0);$$

2. spojitě prodloužení funkce  $G_0(z)$  jest všude na hranici (s výjimkou bodů  $t_k$ ) rovno funkci  $g_0(t)$ , kde

$$g_0(t) = g(t) + \frac{\varkappa}{2\pi(1 + \varkappa)} \sum_{k=1}^m A_k \ln(t - z_k) \overline{(t - z_k)} - \\ - \frac{1}{2\pi(1 + \varkappa)} \sum_{k=1}^m \overline{A_k} \frac{t}{t - z_k} + C$$

a  $z_k$  jsou body libovolně zvolené uvnitř  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ );

$$3. \sum_{k=1}^m A_k = 0.$$

Dá se dokázat (viz [6], str. 273), že pro takto definovaný problém existuje řešení, a to jediné, přičemž hledané funkce  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  a konstanty  $A_k$  a  $C$  jsou dány vztahy

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(t) dt}{t - z}, \\ \psi_0(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_c \frac{\overline{\omega(t)} dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(t) d\bar{t}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\bar{t} \omega(t)}{(t - z)^2} dt, \\ A_k = -2\pi(1 + \varkappa) \int_{c_k} \omega(t) ds \quad (k = 1, 2, \dots, m - 1),$$

$$A_m = - \sum_{k=1}^{m-1} A_k = 2\pi(1 + \varkappa) \int_{c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_{m-1}} \omega(t) ds ,$$

$$C = \int_{c_m} \omega(t) ds .$$

Funkce  $\omega(t)$  je určena rovnicí

$$(5,1) \quad \varkappa \omega(t_0) + \frac{\varkappa}{\pi} \int_c \omega(t) \vartheta'(t_0, t) dt + \frac{1}{\pi} \int_c \omega(t) \exp [2i\vartheta(t_0, t)] \vartheta'(t_0, t) dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \varkappa \left[ \ln \left( 1 + \frac{z_m - z_k}{t_0 - z_m} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\overline{z_m - z_k}}{t_0 - z_m} \right) \int_c \omega(t) ds - \right.$$

$$\left. - t_0 \frac{\overline{z_k - z_m}}{(t_0 - z_k)(t_0 - z_m)} \int_c \overline{\omega(t)} ds \right] - \int_{c_m} \omega(t) ds = g(t_0) ,$$

kde  $c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_m$ ,  $\vartheta(t_0, t) = \arg(t_0 - t)$ ,  $ds$  je diferenciál délky oblouku hranice.

Integrální rovnice (5,1) má jedno a jen jedno řešení. Poznamenejme, že rovnice (5,1) je rovnice Lauricellova-Šermanova. Stejně tak jsme mohli pro druhý problém sestavit i rovnici Muschelišviliho. Podobně je použitelná pro druhý problém též metoda nekonečných řad.

## 6. METODY ŘEŠENÍ

Z předchozího je vidět, že ve většině případů obecné metody řešení prvního problému jsou použitelné i pro druhý problém pružnosti. Proto v tomto odstavci si všimneme pouze těch způsobů řešení, o nichž jsme se v případě prvního problému nezmiňovali.

**Problém lineárního sdružení** (tzv. úloha Riemann-Hilbertova). Budeme říkat, že funkce  $F(z)$  je spojitě prodlužitelná v bodě  $t$  křivky  $L$  zleva (resp. zprava), jestliže  $F(z)$  konverguje k určité limitě, ať se bod  $z$  blíží bodu  $t$  jakkoliv, s tou podmínkou, že  $z$  zůstává stále vlevo (resp. vpravo) od křivky  $L$ . Limitu zleva budeme značit  $F^+(t)$ , limitu zprava pak  $F^-(t)$ .

Problém lineárního sdružení spočívá v tomto: Budiž  $c_0$  daná hladká křivka. Jest třeba určit po částech holomorfní funkci  $F(z)$  s křivkou skoků  $c_0$  (viz definici v [63], str. 389), jejíž spojitě prodloužení zleva a zprava vyhovuje na  $c_0$  podmínce

$$(6,1) \quad F^+(t) = G(t) \cdot F^-(t) + f(t)$$

kromě konců křivky  $c_0$  (jestliže je má), kde  $G(t)$  a  $f(t)$  jsou na  $c_0$  dané funkce. Přitom všude na  $c_0$  předpokládáme  $G(t) \neq 0$ . O funkcích  $G(t)$ ,  $f(t)$  se dále před-

pokládá, že vyhovují podmínce Hölderově. Je-li  $f(t) = 0$  všude na  $c_0$ , mluvíme o úloze homogenní. Metody lineárního sružení se užívá v teorii pružnosti hlavně při řešení druhého problému (úlohy o zalisovaných discích), přičemž se zpravidla vystačí s tím, že  $G(t)$  je na  $c_0$  konstantní. Pro naše potřeby pak postačí, aby  $G(t) \equiv 1$ , tj. podmínka (6,1) bude mít tvar

$$(6,2) \quad F^+(t) - F^-(t) = f(t) \text{ na } c_0.$$

Řešení úlohy lineárního sružení, vyhovující podmínce (6,2), má tvar (viz [63], str. 401)

$$(6,3) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(t)}{t-z} dt + C,$$

kde  $C$  je libovolná konstanta. Je-li třeba, aby  $F(\infty) = 0$ , pak nutno položit  $C = 0$ .

Poznámka 6,1. Definici pojmu po částech holomorfní funkce můžeme zobecnit i na případ, kdy funkce  $F(z)$  není definovaná na celé rozříznuté rovině  $S^n$ , ale pouze na některé její souvislé části  $\Omega_0$ . V tom případě říkáme analogicky, že funkce  $F(z)$  je po částech holomorfní v  $\Omega_0$ . Tuto funkci pak můžeme vyjádřit ve tvaru součtu holomorfní funkce v  $\Omega_0$  a integrálu Cauchyova typu

$$(6,4) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(t) dt}{t-z} + F^*(z),$$

kde  $F^*(z)$  je holomorfní funkce v  $\Omega_0$ . Výsledek (6,4) plyne z toho, že rozdíl

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(t) dt}{t-z} = F^*(z)$$

je holomorfní funkce v  $\Omega_0$  vyjma bodů křivky  $c_0$ , přičemž platí  $F^+(t) - F^-(t) = 0$  na  $c_0$ . Výsledku (6,4) se dá užít, jak ukázal ŠERMAN (DAN-SSSR, 1940, t. 27, No 9, str. 907—910), mimo jiné, také na řešení úloh o discích zalisovaných do pružné roviny (viz např. metodu lineárního sružení). Přitom nutno však předpokládat, že elastické vlastnosti materiálu disků a roviny jsou stejné.

**Metoda lineárního sružení.** Poznámka 6,2. Metodu vyložíme v obecnější formě a to na tzv. úloze o dislokacích. Je-li vnější zatížení rovno nule, máme co dělat s druhým problémem.

Uvažujme mnohonásobně souvislou oblast  $\Omega_0$  v komplexní rovině  $z = x + iy$  a ohraničenou z vnějška uzavřenou křivkou nebo přímkou  $c_0$  a zevnitř dostatečně hladkými křivkami  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m, \dots, s$ ), které se neprotínají ani navzájem ani s hraniční křivkou  $c_0$ . Necht' do některých otvorů  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) jsou zalisovány disky  $\Omega_k$  s daným předpětím, jejichž těžiště označme  $b_k$ . Na disk  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) necht' působí rovinný systém sil, který můžeme nahradit výslednicí  $P_k$  a silovou dvojicí  $M_k$ . Na ostatních křivkách  $c_k$  ( $k = m + 1, \dots, s$ ) a na  $c_0$  necht' jsou dána libovolná napětí.

Mnohonásobně souvislou oblast  $\Omega_0$  se zalisovanými disky  $\Omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ) označme  $\Omega$ , takže oblast  $\Omega$  bude oblast omezená uzavřenou křivkou nebo přímkou  $c_0$  zevně a křivkami  $c_n$  ( $n = m + 1, \dots, s$ ) zevnitř.

Poznámka 6.3. Jestliže při zalisování disku  $\Omega_n$  do odpovídajícího otvoru v oblasti  $\Omega_0$  nedojde k posunutí středu disku (těžiště)  $\Omega_n$  vzhledem ke středu (těžišti) příslušného otvoru, potom skok posunutí  $\delta'_n$  se bude rovnat geometrickému rozdílu původních průvodičů disku  $r_n''$  a otvoru  $r_n'$ , vedených z bodu  $b_n$  k odpovídajícím bodům hranice disku a otvoru, ležících na společné normále k hranici  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ). Dojde-li však při zalisování disku  $\Omega_n$  do otvoru roviny  $\Omega$  k vzájemnému posunutí středů (těžišť) disku a otvoru, potom velikost skoku nespojitosti posunutí podél hranice nebude konstantní, ale proměnlivá. V obecném případě bude zákon změny  $\delta'_n$  závislý na velikosti vzájemného posunutí středů (těžišť) otvoru a disku a na tvaru otvoru. Některé např. křivka  $c_n$  je kružnice a nechť střed kruhového disku  $\Omega_n(b'_n, a'_n)$  se vzhledem ke středu otvoru posune o veličinu  $\beta'_n$  ve směru osy  $x_n$ , která s původní osou  $x$  svírá úhel  $\Theta_n^0$  a vytíná na ní úsek  $b_n^0$ . Potom velikost skoku posunutí v radiálním směru můžeme psát ve tvaru

$$\delta'_{nx} = \delta_n \pm \frac{\beta'_n}{2r_n} (t_n + \bar{t}), \quad t_n = (t - b_n^0) e^{-i\Theta_n^0} - \varrho_n,$$

kde  $t_n, \bar{t}$  jsou odpovídající si body kružnice v systémech  $x_n, y_n$  a  $x, y$ ;  $\varrho_n^2 = a_n^2 + (b'_n - b_n^0)^2$ ,  $\delta'_n = r_n'' - r_n'$ .

Řešení uvedeného problému se převádí na určení funkcí  $\varphi_n, \psi_n$  holomorfních v odpovídajících oblastech  $\Omega_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, m$ ) a vyhovujících na hranici podmínkám

$$(6,5) \quad \varphi_0(t) + t \overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_0(t) + C \text{ na } c_0,$$

$$(6,6) \quad \varphi_n^*(t) + t \overline{\varphi_n^{*'}(t)} + \overline{\psi_n^*(t)} = 0 \text{ na } c_n \text{ (} n = 1, \dots, m \text{)},$$

$$(6,7) \quad \kappa \varphi_n^*(t) - t \overline{\varphi_n^{*'}(t)} - \overline{\psi_n^*(t)} = \delta_n^* e^{i\Theta_n} \text{ na } c_n \text{ (} n = 1, \dots, m \text{)},$$

$$(6,8) \quad \varphi_0(t) + t \overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_n(t) + C_n \text{ na } c_n \text{ (} n = m + 1, \dots, s \text{)},$$

přičemž  $\delta_n^* = 2\delta'_n G$ ,  $\kappa = (3 - \sigma)(1 + \sigma)^{-1}$ ,  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $\sigma$  Poissonův koeficient,  $\Theta_n$  úhel sevřený normálou v libovolném bodě křivky  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ) a osou  $x$ . Mimo to jsme na  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ) položili

$$(6,9) \quad \varphi_0(t) - \varphi_n(t) = \varphi_n^*(t), \quad \psi_0(t) - \psi_n(t) = \psi_n^*(t).$$

Jde tedy v podstatě o to, určit metodou lineárního sdružení funkce  $\varphi_n^*, \psi_n^*$ , které jsou analytické v  $\Omega_0 \cup \Omega_n$ .

Podmínka (6,5) a (6,8) vyjadřuje, že je dáno vnější zatížení, působící na hranici  $c_0$  těleso  $\Omega_0$ . Podmínka (6,6) vyjadřuje princip akce a reakce a konečně podmínka (6,7) udává velikost skoků (nespojitosť) posunutí na  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ).

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru

$$(6,10) \quad \varphi_0(z) = \varphi_{00}(z) + \sum_{n=1}^k A_n \ln(z - b_n),$$

$$\psi_0(z) = \psi_{00}(z) + \sum_{n=1}^k [B_n \ln(z - b_n) + (C_n + E_n)(z - b_n)^{-1}],$$

$$(6,11) \quad \varphi_n(z) = \varphi_{0n}(z) + A_n \ln(z - b_n),$$

$$\psi_n(z) = \psi_{0n}(z) + B_n \ln(z - b_n) + (C_n + E_n)(z - b_n)^{-1}$$

pro  $n = 1, 2, 3, \dots, m$ . Konstanty  $A_n, B_n, C_n, E_n$  ve vzorcích (6,10) a (6,11) jsou závislé na  $P_n$  a  $M_n$ .  $\varphi_{00}, \psi_{00}, \varphi_{0n}, \psi_{0n}$  jsou holomorfní funkce v příslušných oblastech  $\Omega_0, \Omega_n$ , přičemž  $B_n = -\kappa \bar{A}_n, C_n = -\bar{b}_n A_n, A_n = -\frac{P_n}{2\pi(1 + \kappa)},$

$E_n = \frac{iM_n}{2\pi}$ . Dále z (6,6) a (6,7) určíme funkce  $\varphi_n^*$  a  $\psi_n^*$ , které potom dosadíme do (6,9). Tím obdržíme

$$(6,12) \quad \varphi_0(t) = \varphi_n(t) + \delta_n(t), \quad \psi_0(t) = \psi_n(t) - \omega_n(t),$$

kde

$$(6,13) \quad \delta_n(t) = \frac{\delta_n^* e^{i\theta_n}}{1 + \kappa}, \quad \omega(t) = \frac{\delta_n^* \left[ e^{-i\theta_n} + t \frac{d}{dt} (e^{i\theta}) \right]}{1 + \kappa}.$$

Obě poslední funkce  $\delta_n(t)$  a  $\omega(t)$  můžeme psát ve tvaru okrajových hodnot dvou funkcí

$$(6,14) \quad \delta_n(z) = \delta_{0n}(z) + \delta_{1n}(z), \quad \omega_n(z) = \omega_{0n}(z) + \omega_{1n}(z),$$

kde  $\delta_{0n}(z), \omega_{0n}(z)$  jsou holomorfní funkce v oblasti  $\Omega_n$  a  $\delta_{1n}(z), \omega_{1n}(z)$  jsou holomorfní vně oblasti  $\Omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ).

Zavedme nyní nové holomorfní funkce v  $\Omega_0$  tímto vztahem:

$$(6,15) \quad \varphi(z) = \varphi_{00}(z) - \sum_{n=1}^m \delta_{1n}(z), \quad \psi(z) = \psi_{00}(z) + \sum_{n=1}^m \omega_{1n}(z).$$

Užitím rovnic (6,10) a (6,15) dostaneme

$$(6,16) \quad \varphi_0(t) = \varphi(t) + \sum_{n=1}^m [A_n \ln(t + b_n) + \delta_{1n}(t)] + \sum_{n=m+1}^k A_n \ln(t - b_n),$$

$$\psi_0(t) = \psi(t) + \sum_{n=1}^m [B_n \ln(t - b_n) + (C_n + E_n)(t - b_n)^{-1} - \omega_{1n}(t)] +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^k [B_n \ln(t - b_n) + (C_n + E_n)(t - b_n)^{-1}].$$



Podobným způsobem z rovnic (6,12) a (6,16) najdeme

$$(6,17) \quad \varphi_n(t) = \varphi(t) + \sum_{n=1}^k A_n \ln(t - b_n) + \sum_{n=1}^k \delta_{1n}(t) - \delta_0(t),$$

$$\psi_n(t) = \psi(t) + \sum_{n=1}^k \left[ B_n \ln(t - b_n) + \frac{C_n + E_n}{t - b_n} \right] -$$

$$- \sum_{n=1}^m \omega_{1n}(t) + \omega_{0n}(t).$$

Symbol  $\Sigma'_n$  značí, že při sčítání vynecháváme  $n$ -tý sčítanec. Rovnice (6,17) spolu s (6,10), (6,11) a (6,15) ukazují, že funkce  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  jsou holomorfní v  $\Omega_0$ , na  $c_n$  se ztotožňují s hraničními hodnotami jistých funkcí, holomorfních v  $\Omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ). Následkem toho jsou  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  analyticky prodlužitelné z  $\Omega_0$  do každé  $\Omega_n$  a budou holomorfní v oblasti  $\Omega$  omezené křivkami  $c_0$  a  $c_n$  ( $n = m + 1, \dots, s$ ).

Vyloučením  $\varphi_0(t)$ ,  $\psi(t_0)$  z (6,5) a (6,8) a pomocí rovnic (6,16) obdržíme na  $c$

$$(6,18) \quad \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = - \sum_{n=1}^m [\delta_{1n}(t) + t \delta'_{1n}(t) - \omega_{1n}(t)]_1 -$$

$$- \sum_{n=1}^k \left[ A_n \ln(t - b_n) + \frac{t \overline{A}_n}{t - \overline{b}_n} + \overline{B}_n \ln(\overline{t} - \overline{b}_n) + \frac{\overline{C}_n + \overline{E}_n}{\overline{t} - \overline{b}_n} \right]_2 +$$

$$+ f_0(t) + C_0 \quad \text{na } c_0,$$

$$(6,19) \quad \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = - \sum_{n=1}^m [\dots]_1 - \sum_{n=1}^k [\dots]_2 + f_n(t) + C_n$$

na  $c_n$  ( $n = m + 1, \dots, s$ ).

Tyto poslední rovnice ukazují, že původní úloha byla převedena na poměrně jednodušší — na první problém pro mnohonásobně souvislou oblast. Přitom napětí na hranici vyšetřované oblasti je dáno pravými stranami rovnic (6,18) a (6,19).

Poznámka 6,4. V případě kruhových disků je  $\omega_{0n}(t) = \delta_{1n}(t) = 0$  a výraz pro  $\omega_{1n}(t)$ , s přihlédnutím k vzájemnému posunutí středů (těžišť) disků a otvorů, bude mít tvar

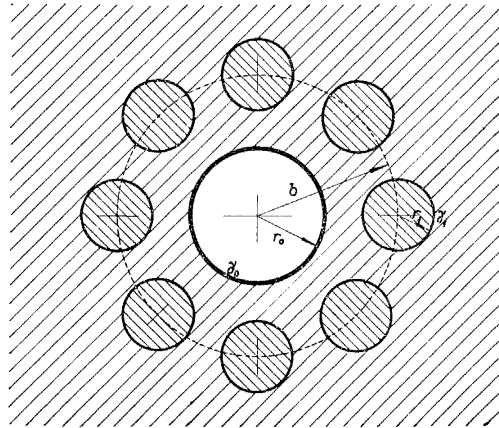
$$(6,20) \quad \overline{\omega_{1n}(t)} = \frac{r_n^2}{2(1 + \alpha)(\overline{t} - \overline{b}_n)} \left[ 4\delta_n \mp \frac{2\beta_n}{r_n} (2Q_n + 2b_n^0 \cos \Theta_n^0 - \right.$$

$$\left. - \overline{b}_n e^{i\Theta_n} - b_n e^{-i\Theta_n}) \right] \pm \frac{\beta_n r_n^2 e^{-i\Theta}}{(t - \overline{b}_n)^2}.$$

Poznámka 6,5. Při řešení konkrétních úloh největší potíž působí právě volba (nalezení) pomocných funkcí  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ . Určení těchto funkcí (tj. řešení pomocné úlohy) je ve značné míře závislé na počtu zbylých nezalisovaných otvorů  $\Omega_n$  v oblasti  $\Omega_0$ . Tento počet je roven číslu  $s - m$ , kde  $s$  je počet všech a  $m$  je počet nezalisovaných otvorů. Řešení pomocné úlohy je nejsnazší v případě, kdy  $m = s$ . Tehdy okrajové podmínky (6,19) odpadají a podmínky (6,18) ukazují, že řešení se převádí na řešení prvního problému pro jednoduše souvislou oblast.

## 7. VÝSLEDKY ŘEŠENÍ

7,1. HAMPL [27] řešil problém rozložení napjatosti v nekonečné rovině, oslabené dvěma kruhovými otvory stejného poloměru  $a$  (vzdálenost středů =  $2a$ ) a v kruhových čepích s poloměry  $a(1 + \alpha)$   $\alpha > 0$ , které do těchto otvorů byly za tepla zalisovány. Přitom byl učiněn předpoklad, že radiální i smykové napětí roviny v nekonečnu je nulové a na styčných kružnicích čepů a roviny jsou posunutí, radiální a smykové napětí v čepích i v rovině, stejná. Řešení bylo provedeno vhodnou volbou Airyho funkce napětí, která v podstatě je jistou superposicí Airyho funkce pro případ roviny s jedním zalisovaným čepem. V druhé části práce jsou stanoveny křivky konstantních hlavních napětí.



Obr. 3.

7,2. TARABASOV [110] řešil úlohu o rovině  $\Omega_0$  oslabené kruhovým otvorem poloměru  $r_0$ , kolem něhož je kruhový věnec zalisovaných kruhových disků (obr. 3). Elastické vlastnosti materiálu roviny  $\Omega_0$  i disků jsou stejné. Metodou lineárního sdružení byla úloha převedena na první problém pružnosti pro rovinu s kruhovým otvorem a s hraniční podmínkou

$$(7,1) \quad \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \sum_{n=1}^m \frac{D_n t}{r_0^2 - b_n t} = f(t),$$

kde  $D_n = \frac{2r_n^2 \delta_n}{1 + \alpha}$ ,  $\delta_n = 2Gr_n^{-1}(r_n'' - r_n')$ , přičemž  $r_n''$  je poloměr  $n$ -tého disku,  $r_n'$  je poloměr a  $b_n$  střed  $m$ -tého otvoru.  $G$  je modul pružnosti ve smyku.

Řešení okrajového problému (7,1) je dáno (viz např. [63], str. 251) ve tvaru

$$(7,2) \quad \varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(t) dt}{t-z},$$

$$(7,3) \quad \psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} - \frac{r^2 \varphi'(z)}{z}.$$

Vyčíslením (7,2) pomocí Cauchyho formule obdržíme

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(t) dt}{t-z} = \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{D_n z}{r_0^2 - \overline{b_n} z}. \end{aligned}$$

Podobným způsobem ze vztahu (7,3) ihned dostaneme

$$\psi(z) = -\frac{r_0^2}{z} \varphi'(z),$$

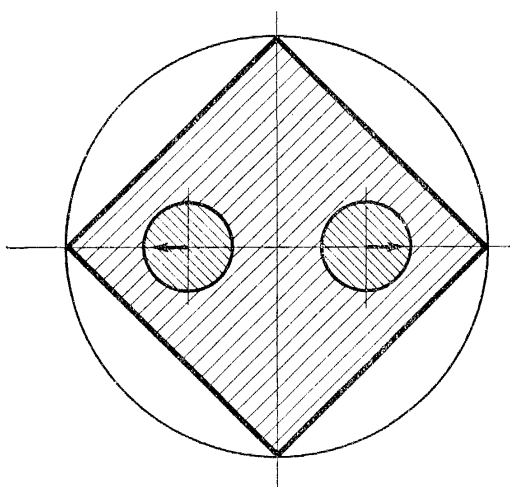
takže řešení okrajové úlohy (7,1) můžeme napsat ve tvaru

$$(7,4) \quad \varphi(z) = \sum_{n=1}^m \frac{D_n z}{r_0^2 - \overline{b_n} z},$$

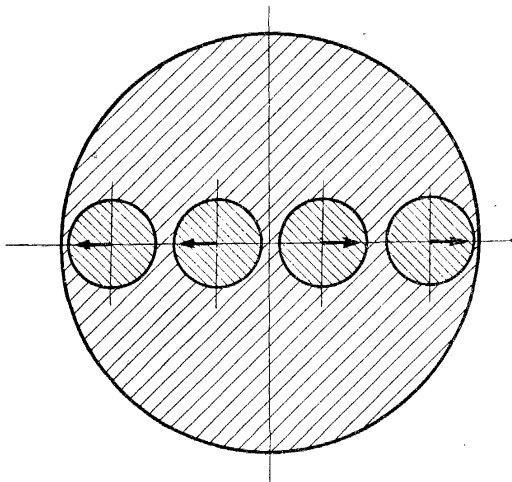
$$\psi(z) = -\sum_{n=1}^m \frac{D_n r_0^4}{z(r_0^2 - \overline{b_n} z)^2}.$$

Pro úplnost uvedme ještě práci téhož autora [109], ve které jsou řešeny dva problémy, týkající se několikánásobně souvislých konečných oblastí. V prvním je vyšetřována čtvercová oblast s dvěma vloženými kruhovými disky, které jsou zatíženy dvěma stejnými singulárními silami  $P$ , viz obr. 4. Poté byl výpočet proveden znovu pro kruhovou oblast, opsanou původnímu čtverci, a oba výsledky byly srovnány.

Ve druhém problému byla vyšetřena konečná kruhová oblast, do níž



Obr. 4.



Obr. 5.

byly podle obr. 5 zalisovány se stejným předpětím čtyři kruhové disky. Mimo to na každý disk působila singulární síla velikosti  $P$ . Na konci práce jsou uvedeny některé numerické výsledky. Obě práce byly řešeny metodou lineárního sdružení pro konečné oblasti.

## KAPITOLA II

### ROZLOŽENÍ NAPJATOSTI V NEKONEČNÉM ROVINNÉM POLI, OSLABENÉM LIBOVOLNÝMI OTVORY S HRANIČNÍMI KŘIVKAMI PO ČÁSTECH HLADKÝMI, TJ. S ÚHLOVÝMI BODY

Řešení základních problémů pružnosti pro nekonečná tělesa třetího typu, jejichž hranice má úhlové body, vyžaduje subtilnějších úvah než metody řešení, uvedené v předchozí kapitole. Obecný postup řešení úloh tohoto typu, pokud je nám známo, není prozatím dán a jen v jednom zvláštním případě (tj. pro jistý speciální typ úloh) je řešení známo. Tímto zvláštním typem jsou úlohy o rozložení napjatosti v nekonečném rovinném poli, oslabeném otvory s hraničními křivkami po částech hladkými, avšak mimo to hranice otvorů má takový tvar, že existuje ortogonální soustava křivočarých souřadnic  $(\xi, \eta)$ , v níž se tato hranice dá vyjádřit rovnicemi  $\xi = \text{konst}$  nebo  $\eta = \text{konst}$ . Potom, užitím metody křivočarých souřadnic (viz odstavec 3, d), můžeme stanovit řešení úloh tohoto typu. Pro ilustraci uvedeme některé nejnovější výsledky řešení úloh uvedené třídy.

#### 8. VÝSLEDKY ŘEŠENÍ

**8.1.** GRUŠKO ve své disertační práci [25] řešil úlohu o nekonečné rovině, oslabené otvorem polokruhovitěho tvaru. Protože uvedená práce nám prozatím nebyla dostupná, nemůžeme říci, jaké metody bylo k řešení užito a k jakým výsledkům autor dospěl.

**8.2.** SAVRUK [84] řešil úlohu o rovině oslabené „čočkovitým“ otvorem, jehož hranice je vytvořena dvěma oblouky vzájemně se protínajících kružnic. Předpokládá se, že v nekonečnu působí prostý smyk. K řešení bylo použito bipolárních souřadnic. Podobnou úlohu řešil již dříve KARUNES [41].

**8.3.** SENGUPTA [87] řešil úlohu o napětích v rovině s otvorem ve tvaru lemniskaty ( $r^2 = 2c^2 \cos 2\theta$ ) pro případy, že v nekonečnu působí prostý smyk anebo jednoosý tah. Rovněž v tomto případě bylo použito bipolárních souřadnic. Podobným problémem se zabýval SNOWDON [89].

Poznámka 8.1. Pokud vyšetřovaná oblast, oslabená otvorem s hranicí po částech hladkou, je dvojnásobně souvislá, lze k řešení užít metody přibližného konformního zobrazení. Tím, v jistém smyslu, nahradíme po částech hladkou křivku křivkou hladkou a můžeme pak použít obvyklých metod řešení pro oblasti s hladkými hraničními křivkami.

*(Pokračování.)*