

Aplikace matematiky

František Nožička

O jednom modelu v klasickém problému dvou těles

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 1, 1-29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102690>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

O JEDNOM MODELU V KLASICKÉM PROBLÉMU DVOU TĚLES

FRANTIŠEK NOŽIČKA

(Došlo dne 24. listopadu 1958.)

V článku je podán velmi jednoduchý geometrický model dráhy hmotného bodu v gravitačním poli druhého hmotného bodu (resp. dvojice hmotných homogenních nebo po vrstvách homogenních koulí) za předpokladu platnosti pohybových zákonů klasické mechaniky. Jako speciální případ je zde diskutován v detailech eliptický oběh tělesa zanedbatelně malých rozměrů vzhledem k hmotné po vrstvách homogenní kouli za daných počátečních podmínek (případ Země—umělá družice).

1. GEOMETRICKÝ ÚVOD

V trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 o pravoúhlých kartézských souřadnicích x, y, z je systémem rovnic

$$(1,1) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r, \quad r \in \langle 0, \infty \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

popsán rotační kužel s osou rotace v ose z (obr. 1).

Zvolme v souřadnicové rovině (x, y) bod P_0 o souřadnicích

$$(1,2) \quad x_0 = r \cos \varphi, \quad y_0 = r \sin \varphi, \quad r > 0,$$

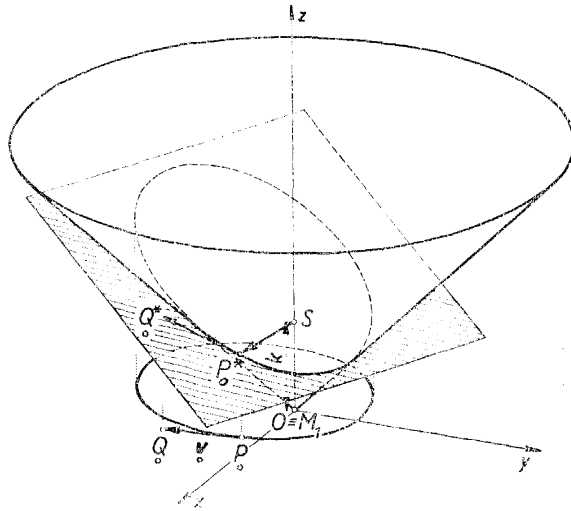
tedy bod různý od počátku souřadnicového systému. Dále zvolme v souřadnicové rovině (x, y) nenulový vektor \mathbf{v} s počátečním bodem v bodě P_0 o složkách $(v_x, v_y, 0)$ v daném souřadnicovém systému v E_3 . Předpokládejme ještě, že průvodič \mathbf{r} a vektor \mathbf{v} jsou lineárně nezávislé, tj.

$$(1,3) \quad z = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bod P^* o souřadnicích

$$(1,4) \quad x_0^* = x_0, \quad y_0^* = y_0, \quad z_0^* = r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

je zřejmě bodem uvažovaného kužele: průmětem bodu P_0^* do souřadnicové roviny (x, y) ve směru osy z je zřejmě bod P_0 (obr. 1). Je tedy též bod P_0^* různý od počátku souřadnicového systému, tj. od vrchole uvažovaného kužele.



Obr. 1.

Konecový bod Q_0 vektoru \mathbf{v}_0 má souřadnice $x_0 + v_x, y_0 + v_y, 0$. Přímka jdoucí bodem Q_0 rovnoběžná s osou z protne tečnou rovinu kužele (v jeho bodě P_0^*) v bodě Q_0^* , přičemž souřadnice bodu Q_0^* (obr. 1) jsou

$$x_0 + v_x, \quad y_0 + v_y, \quad r_0 + v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi,$$

jak se výpočtem snadno přesvědčíme.

Označme symbolem \mathbf{v}^* vektor v E_3 s počátečním bodem v bodě P_0^* a koncovým bodem v bodě Q_0^* . Má tedy vektor \mathbf{v}^* složky

$$(1,5) \quad v_x^* = v_x, \quad v_y^* = v_y, \quad v_z^* = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi.$$

Na základě jeho konstrukce je evidentní, že tento vektor leží v tečné rovině kužele v bodě P_0^* a že jeho průmětem ve směru osy z do roviny souřadnicové (x, y) je právě vektor \mathbf{v}_0 . Z předpokladu (1,3) pak vyplývá, že vektor \mathbf{v}^* neleží v povrchu kužele, která prochází bodem P_0^* .

Na rotační ose kužele zvolme nyní bod $S(0, 0, k)$, kde $k > 0$ zvolíme libovolně. Rovina $R(P_0^*, Q_0^*, S)$, jednoznačně určená body P_0^*, Q_0^*, S , protne kužel v nedegenerované (reálné) kuželosečce $\mathcal{E}^*(P_0^*)$, která prochází bodem P_0^* . Průmětem této kuželosečky ve směru osy z do souřadnicové roviny (x, y) je opět nedegenerovaná kuželosečka $\mathcal{E}(P)$, která prochází bodem P .

V dalším nám půjde o to, určit matematický popis kuželosečky $\mathcal{E}(P)$, tj. najít její rovnici.

Rovina jdoucí body P_0^*, Q_0^*, S je popsána implicitně rovnicí

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z - k \\ v_x, & v_y, & v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \\ -x, & -y, & k - r \end{vmatrix} = 0,$$

neboť jde o rovinu jednoznačně určenou vektory $\mathbf{v}_0^* = \overrightarrow{P_0^*Q_0^*}, \overrightarrow{SP_0^*}$. Rozepsáním předešlé rovnice dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned} & x(v_y k - v_y r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + v_x y \cos \varphi + v_y y \sin \varphi) + \\ & + y(-k v_x + v_x r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - v_x x \cos \varphi - v_y x \sin \varphi) + \\ & + (z - k)(-v_x y + x v_y) = 0. \end{aligned}$$

Zavedeme-li do této relace symbol z z relace (1,3), dostaneme po úpravě

$$(1,6) \quad x \left(\frac{k}{z} v_y - \cos \varphi \right) + y \left(-\frac{k}{z} v_x - \sin \varphi \right) + z = k.$$

Pro průnik roviny (1,6) s kuželem (1,1) plyne

$$r \left\{ \left(\frac{k}{z} v_y - \cos \varphi \right) \cos \varphi + \left(-\frac{k}{z} v_x - \sin \varphi \right) \sin \varphi + 1 \right\} = k,$$

tj.

$$(1,7) \quad r = \frac{k}{1 + \frac{k}{z} (v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi) - \cos(\varphi - \varphi)},$$

což je rovnice kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ v polárních souřadnicích r, φ v souřadnicové rovině (x, y) .

Uvedeme nyní bez výpočtu známou skutečnost z analytické geometrie: *Každá rovina, která protíná kužel s popisem (1,1) a která neprochází jeho vrcholem a není rovnoběžná s osou z , protne tento kužel v nedegenerované kuželosečce (elipse, parabole nebo hyperbole), jejímž průmětem ve směru osy z do souřadnicové roviny*

(x, y) je nedegenerovaná kuželosečka (elipsa, parabola nebo hyperbola), pro kterou je počátek souřadnicového systému (tj. bod O) ohniskem.

Pro zjištění-li bližších dat o kuželosečce $\mathcal{E}(P)$ s popisem (1,7) je např. vhodné přejít zpět ke kartézským souřadnicím x, y v souřadnicové rovině (x, y) , tj. zavést do relace (1,7) proměnné x, y z relací

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Učiníme-li tak, dostaneme po úpravě

$$(1,8) \quad \Phi(x, y) \equiv x^2 \left[\left(-\frac{k}{\varkappa_0} v_y + \cos \varphi_0 \right)^2 - 1 \right] + y^2 \left[\left(\frac{k}{\varkappa_0} v_x + \sin \varphi_0 \right)^2 - 1 \right] + \\ + 2xy \left(-\frac{k}{\varkappa_0} v_y + \cos \varphi_0 \right) \left(\frac{k}{\varkappa_0} v_x + \sin \varphi_0 \right) + \\ + 2kx \left(-\frac{k}{\varkappa_0} v_y + \cos \varphi_0 \right) + 2ky \left(\frac{k}{\varkappa_0} v_x + \sin \varphi_0 \right) + k^2 = 0,$$

což je rovnice typu

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kde

$$(1,9) \quad a_{11} = \left(-\frac{k}{\varkappa_0} v_y + \cos \varphi_0 \right)^2 - 1, \\ a_{22} = \left(\frac{k}{\varkappa_0} v_x + \sin \varphi_0 \right)^2 - 1, \\ a_{12} = \left(-\frac{k}{\varkappa_0} v_y + \cos \varphi_0 \right) \left(\frac{k}{\varkappa_0} v_x + \sin \varphi_0 \right), \\ a_{13} = k \left(-\frac{k}{\varkappa_0} v_y + \cos \varphi_0 \right), \\ a_{23} = k \left(\frac{k}{\varkappa_0} v_x + \sin \varphi_0 \right), \\ a_{33} = k^2.$$

Snadno si ověříme, že jest

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = k^2 > 0,$$

což je jen ověření faktu, že kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ je nedegenerovaná. Pro diskriminant $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ dostaneme z (1,9)

$$(1,10) \quad D = -\frac{k^2}{\varkappa_0^2} v^2 + \frac{2k}{r}, \quad \text{kde } v_0^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Je tedy kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ s popisem (1,8)

a) elipsou, je-li

$$-\frac{k^2}{\alpha_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0} > 0;$$

b) parabolou, je-li

$$-\frac{k^2}{\alpha_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0} = 0;$$

c) hyperbolou, je-li

$$-\frac{k^2}{\alpha_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0} < 0.$$

Řešením lineárních rovnic $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, kde $\Phi(x, y)$ je kvadratický polynom na levé straně v (1,8), dostaneme

v případě a), c) souřadnice x_s, y_s středu elipsy resp. hyperboly, a to:

$$(1,11)a \quad x_s = k \frac{-\frac{k}{\alpha_0} v_y + \cos \varphi_0}{D} = k \frac{-\frac{k}{\alpha_0} v_y + \cos \varphi_0}{-\frac{k^2}{\alpha_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}},$$

$$y_s = k \frac{\frac{k}{\alpha_0} v_x + \sin \varphi_0}{D} = k \frac{\frac{k}{\alpha_0} v_x + \sin \varphi_0}{-\frac{k^2}{\alpha_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}};$$

v případě b) směr osy paraboly charakterizované vektorem \mathbf{u} v souřadnicové rovině (x, y) o složkách

$$(1,11)b \quad u_x = -\frac{k}{\alpha_0} v_y + \cos \varphi_0, \quad u_y = \frac{k}{\alpha_0} v_x + \sin \varphi_0,$$

jehož počáteční bod je počátek souřadnicového systému.

V případech a), c) zjistíme hlavní poloosy kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ velmi snadno, např. tak, že najdeme průsečík spojnice středu kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ a jejího ohniska O (tj. počátku systému souřadnicového) s kuželosečkou $\mathcal{E}(P)$. Snadný výpočet vede k následujícím formulím pro souřadnice vrcholů V_1, V_2 elipsy resp. hyperboly na hlavní ose

$$V_1: \quad x_1 = \frac{kA}{D} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right), \quad y_1 = \frac{kB}{D} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right),$$

$$V_2: \quad x_2 = \frac{kA}{D} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right), \quad y_2 = \frac{kB}{D} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right),$$

kde pro stručnost jsme položili

$$(1,12) \quad \begin{aligned} A &\equiv -\frac{k}{\kappa_0} v_y + \cos \varphi_0, \\ B &\equiv \frac{k}{\kappa_0} v_x + \sin \varphi_0, \\ D &\equiv -\frac{k^2}{\kappa_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}. \end{aligned}$$

Poloviční vzdálenost bodů A_1, A_2 určuje pak velikost a hlavní poloosy kuželosečky (tj. elipsy resp. hyperboly), pro kterou plyne z předchozích formulí

$$(1,13) \quad a = \frac{k}{D} = \frac{k}{-\frac{k^2}{\kappa_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}} = \frac{1}{-\frac{k}{\kappa_0^2} v^2 + \frac{2}{r_0}}.$$

V případech a), c) určuje zřejmě velikost průvodiče středu kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ (tj. v případě elipsy resp. hyperboly) její ohniskovou vzdálenost e , pro kterou plyne z (1,11) a (1,12)

$$e^2 = k^2 \frac{A^2}{D^2} + k^2 \frac{B^2}{D^2} = \frac{k^2}{D^2} (A^2 + B^2).$$

Z definičních relací (1,12) vyčteme, že je

$$(1,12)' \quad D = 1 - (A^2 + B^2).$$

S přihlédnutím k této relaci můžeme pak předchozí vztah pro e^2 přepsat na tvar

$$(1,14) \quad e^2 = \frac{k^2}{D^2} (1 - D).$$

Pro velikost b vedlejší poloosy kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ dostaneme (vzhledem k (1,13),

(1,14)) po úpravě

1. v případě elipsy

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{\frac{k^2}{\left(-\frac{k^2}{\kappa_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}\right)^2} - \frac{k^2}{\left(-\frac{k^2}{\kappa_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}\right)}};$$

2. v případě hyperboly

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{\frac{k^2}{-\frac{k^2}{\kappa_0^2} v^2 + \frac{2k}{r_0}} - \frac{k^2}{\left(\frac{k^2}{\kappa_0^2} v^2 - \frac{2k}{r_0}\right)}}.$$

Jak v případě elipsy tak hyperboly (tj. v případech a), c)) platí pro vedlejší poloosu kuželosečky $\mathcal{E}(P)$

$$(1,15) \quad b = \frac{k}{\sqrt{\left| -\frac{k^2}{z_0^2} v^2 + \frac{2k}{r} \right|}}$$

V případě b) na str. 5, tj. za předpokladu, že kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ je parabolou, najdeme vrchol této paraboly tak, že najdeme průsečík přímky jdoucí počátkem souřadnicového systému (tj. ohniskem paraboly) ve směru vektoru \mathbf{u} v (1,11)_b s kuželosečkou $\mathcal{E}(P)$. Snadným výpočtem se přesvědčíme, že souřadnice x_1, y_1 tohoto vrcholu V jsou popsány relacemi

$$(1,15)^* \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{k}{2} A = -\frac{k}{2} \left(-\frac{k}{z_0} v_y + \cos \varphi \right), \\ x_2 &= -\frac{k}{2} B = -\frac{k}{2} \left(\frac{k}{z_0} v_x + \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

Pro vzdálenost d vrcholu V paraboly $\mathcal{E}(P)$ od jejího ohniska O (tedy od počátku systému souřadnicového) plyne pak z předešlých formulí

$$(1,16) \quad d = \frac{k}{2},$$

neboť za předpokladu $D = 0$ je $A^2 + B^2 = 1$, jak je evidentní z (1,12)′.

Elementární data geometrického charakteru, která jsme v předchozím uvedli, poslouží k fyzikálnímu rozboru v dalších odstavcích.

2. KLASICKÉ ZÁKONY PRO POHYB DVOU TĚLES

Klasickým příkladem pohybu dvou těles v prostoru je Keplerem popsáný pohyb planet kolem Slunce. Empirické zákony Keplerovy byly východiskem Newtonovi při jeho odvození gravitačního zákona. Keplerovy zákony, které jsou — na základě svého empirického původu — přirozeným východiskem pro klasický problém pohybu dvou těles, mají v původní Keplerově formulaci toto znění:¹⁾

(I) Průvodič vedený od Slunce k planetě opisuje ve stejných dobách stejné plochy.

(II) Planety obíhají kolem Slunce v elipsách málo od kružnice odlišných, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

(III) Čtverce oběžných dob dvou různých planet mají se k sobě jako třetí mocniny poloos jejich drah.

¹⁾ Viz např. V. TRKAL: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*, str. 153.

V klasické mechanice předpokládáme, že prostor v němž žijeme a v němž se též odehrávají všechny fyzikální děje, má charakter matematického euklidovského trojrozměrného prostoru E_3 , v němž je privilegován určitý „absolutní parametr“ t , tj. čas, k němuž lze vztáhnout současně kterékoli probíhající děje, tedy též pohyby těles. V libovolném bodě tohoto prostoru lze zvolit pravouhlý kartézský systém souřadnicový (referenční systém) na čase nezávislý, v němž fyzikální děje — tedy též pohyb těles — lze matematicky popsat.

Uvažujme dvě hmotná homogenní nebo po vrstvách homogenní tělesa M_1, M_2 kulového tvaru o hmotách m_1 a m_2 v kladné vzdálenosti od sebe. V těžišti koule M_1 zvolme počátek kartézského souřadnicového systému (tedy pevně spojeného s koulí M_1); nechť x, y, z jsou souřadnice středu (tedy těžiště) koule M_2 v počáteční poloze. Předpokládejme nyní, že těžišti koule M_2 je udělena počáteční nenulová rychlost v ve směru, který nespadá do spojnice těžišť obou koulí. Pro pohyb těžiště koule M_2 vzhledem k těžišti koule M_1 , kterou považujeme za klidnou, přijmeme jako fyzikální zákony následující axiomy:

(1) *Průvodič těžiště koule M_2 opisuje ve stejných dobách stejné plochy.*

(2) *Koule M_2 se pohybuje vzhledem ke kouli M_1 tak, že těžiště koule M_2 opisuje nedegenerovanou kuželosečku, v jejímž ohnisku je těžiště koule M_1 .*

(3) *Síly, kterými hmotné koule M_1, M_2 vzájemně na sebe působí, jsou stejně velké, avšak opačného směru, jsou incidentní se spojnicí těžišť obou koulí, přičemž vektor síly, kterou působí koule M_1 na kouli M_2 je orientována od M_2 k M_1 . Velikost této síly závisí přímo na hmotách m_1, m_2 koulí M_1, M_2 (je přímo úměrná součinu $m_1 m_2$).*

Fyzikální axiom (1) je zřejmě naprostou analogií prvního zákona Keplerova (I), zatím co axiom (2) je zobecněním druhého Keplerova zákona (II) v tom smyslu, že zahrnuje též případy parabolických a hyperbolických pohybů. Axiom (3) je v podstatě třetím Newtonovým zákonem,²⁾ modifikovaným pro náš speciální případ spolu s postulátem přímé závislosti gravitační síly na součinu hmot obou uvažovaných koulí (což je postulát experimentálně zdůvodněný). Připomeňme zde, že axiom (3) nemůžeme nahradit nějakou analogií třetího Keplerova zákona (III), neboť tento Keplerův zákon se týká výhradně pohybu po elipse.

Gravitační síla mezi dvěma homogenními nebo po vrstvách homogenními koulemi je právě taková, jako kdyby hmoty obou koulí byly soustředěny v jejich středech, což též vyplývá z axiomu (3). Můžeme tedy — jak se obvykle činí — místo homogenních koulí uvažovat fyzikální abstrakci, tj. dvojici hmotných bodů M_1, M_2 o hmotách m_1, m_2 , což je výhodné především s hlediska teoretických výpočtů.

²⁾ Tak zvaný „princip akce a reakce“.

3. GEOMETRICKÝ MODEL

Uvažujeme v E_3 dva hmotné body M_1, M_2 o hmotách m_1, m_2 , přičemž počátek O pevně zvoleného pravouhlého kartézského souřadnicového systému zvolíme v bodě M_1 . Nechť \mathbf{v}_0 je nenulový vektor počáteční rychlosti hmotného bodu M_2 , přičemž vektor \mathbf{v}_0 o počátečním bodě v M_2 neleží ve spojnici bodů M_1 a M_2 . Předpokládáme-li platnost pohybových zákonů (1), (2), (3) z odstavce 2 (kde pojem hmotné koule nahradíme pojmem hmotného bodu), potom pohyb hmotného bodu M_2 vztažený k bodu M_1 se děje v rovině proložené bodem M_1 a vektorem \mathbf{v}_0 .³⁾ Není tedy na újmu obecnosti, jestliže zvolíme souřadnicový systém s počátkem v bodě M_1 tak, aby rovina, obsahující body M_1, M_2 a vektor \mathbf{v}_0 v bodě M_2 byla souřadnicovou (x, y) -rovinou. Nechť bod P o souřadnicích x, y z rovnic (1,2) určuje v této souřadnicové rovině počáteční polohu hmotného bodu M_2 (obr. 1). Za uvedených předpokladů splňuje vektor \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti podmínku (1,3); tento vektor je v obr. 1 vyznačen vektorem \overrightarrow{PQ}_0 . Při zvoleném čísle $k > 0$ je pak konstrukcí popsanou v odstavci 1 jednoznačně popsána v souřadnicové rovině (x, y) nedegenerovaná kuželosečka $\mathcal{E}(P)$, procházející bodem P , která má popis (1,7) a jejíž rozbor byl v odstavci 1 uveden.

Dokážeme v dalším toto tvrzení:

Za předpokladů shora uvedených, za platnosti pohybových zákonů (1), (2), (3) z odstavce 2⁴⁾ a při volbě

$$(3,1) \quad k = \frac{\kappa^2}{\gamma(m_1 + m_2)}$$

(kde $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gsec}^2$ je experimentálně zjištěná gravitační konstanta, K je číslo definované v (1,3) a m_1 je hmota bodu M_1 , m_2 hmota bodu M_2) je kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ v rovině (x, y) s popisem (1,7) dráhou hmotného bodu M_2 ve zvoleném souřadnicovém systému.

Předpokládejme, že dráha hmotného bodu M_2 ve zvoleném systému souřadnicovém je popsána parametricky rovnicemi

$$(3,2) \quad \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned}$$

v nějakém časovém intervalu J , přičemž o funkcích $x(t), y(t)$ předpokládáme, že mají všude v J spojité parciální derivace podle t nejméně druhého řádu. To je

³⁾ \mathbf{v}_0 má počáteční bod v bodě M_2 .

⁴⁾ Vyslovených pro hmotné body místo pro hmotné koule.

zcela přirozený předpoklad, neboť nám jde o popis takového pohybu, kde lze v každém okamžiku mluvit o okamžité rychlosti eventuálně okamžitým zrychlením pohybujícího se hmotného bodu. Pokud křivka s popisem (3,2) neprochází počátkem systému souřadného, můžeme ji lokálně pro každé $t \in J$ popsat též rovnicemi

$$(3,3) \quad r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t),^5)$$

kde r, φ jsou polární souřadnice v rovině vázané s kartézskými souřadnicemi (x, y) relacemi

$$(3,4) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Plocha opsaná průvodičem r bodu křivky s popisem (3,3) v časovém intervalu $\langle t, t \rangle$ je určena integrálem

$$(3,5) \quad S(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2 |\dot{\varphi}| dt, \quad \left(\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

odkud plyne pro plošnou rychlost σ

$$(3,6) \quad \sigma \equiv \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon r^2 \dot{\varphi} \quad (\varepsilon = \text{sign } \dot{\varphi}).$$

Z (3,4), (3,3), spočteme

$$(3,7) \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi};$$

odtud a z (3,4) plyne pak

$$(3,8) \quad \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = r^2 \dot{\varphi}.$$

Podle pohybového zákona (1) z odstavce 2 opisuje průvodič vedený od bodu M_1 k bodu M_2 ve stejných dobách stejné plochy, což značí, že plošná rychlost je konstantní. Odtud, z (3,6), (3,8) a (1,3) plyne pak

$$(3,9) \quad r^2 \dot{\varphi} = \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 0 \\ v_x & v_y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = z \neq 0,$$

kde $v_x \equiv \dot{x}$, $v_y \equiv \dot{y}$ jsou složky vektoru \mathbf{v} okamžité rychlosti bodu M_2 .

Podle pohybového zákona (2) z odstavce 2 opisuje bod M_2 nedegenerovanou kuželosečku, v jejímž ohnisku je bod M_1 . Avšak každou nedegenerovanou kuželosečku v souřadnicové rovině (x, y) s ohniskem v bodě M_1 , který je v počátku systému souřadnicového, lze získat jako průmět ve směru osy z průniku roviny s kuželem (1,1), která neprochází jeho vrcholem, do souřadnicové roviny (x, y) .

⁵⁾ Mají-li funkce $x(t), y(t)$ spojité derivace nejméně druhého řádu, potom tuto vlastnost mají za uvedených předpokladů též funkce $r(t), \varphi(t)$.

To je bezprostřední důsledek faktu uvedeného v odstavci 1. Můžeme tedy snadno najít diferenciální rovnici pro všechny tyto průměty, tj. pro kuželosečky v souřadnicové rovině (x, y) , pro které je bod O — M_1 ohniskem.

Nechť rovnici

$$(3,10) \quad Lx + My + Nz + K = 0$$

je popsána rovina, která má s kuželem (1,1) neprázdný průnik. Rovnicemi

$$(3,11) \quad \begin{aligned} x &= r(t) \cos \varphi(t), \\ y &= r(t) \sin \varphi(t), \\ z &= r(t), \end{aligned}$$

kde $r(t)$, $\varphi(t)$ jsou funkce mající spojité derivace podle t aspoň druhého řádu v nějakém časovém intervalu t , přičemž $\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 \neq 0$ všude v tomto intervalu, je popsána regulární křivka na kuželi (1,1). Má-li tato křivka být průnikem roviny (3,10) s kuželem (1,1), potom musí nutně platit

$$L r(t) \cos \varphi(t) + M r(t) \sin \varphi(t) + N r(t) + K = 0.$$

Odtud plyne

$$L\dot{r} \cos \varphi - Lr \dot{\varphi} \sin \varphi + M\dot{r} \sin \varphi + Mr \dot{\varphi} \cos \varphi + N\dot{r} = 0;$$

tedy po úpravě

$$\dot{r}(L \cos \varphi + M \sin \varphi + N) + r\dot{\varphi}(-L \sin \varphi + M \cos \varphi) = 0.$$

Tuto rovnici můžeme, vzhledem k (3,11), (3,10) přepsat na tvar

$$-\frac{\dot{r}}{r} K + \dot{\varphi}(-Ly + Mx) = 0$$

a tedy též na tvar

$$-\dot{r}rK + r^2\dot{\varphi}(-Ly + Mx) = 0.$$

Použijeme-li relace (3,9), dostaneme

$$(3,12) \quad -\dot{r}rK + \kappa(-Ly + Mx) = 0.$$

Opětným derivováním podle času t plyne odtud s přihlédnutím k (3,7)

$$\begin{aligned} & -\ddot{r}rK - \dot{r}^2K + \kappa(-L\dot{r} \sin \varphi - Lr \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ & + M\dot{r} \cos \varphi - Mr \dot{\varphi} \sin \varphi) = \\ & = -\ddot{r}rK - \dot{r}^2K + \frac{\kappa\dot{r}}{r}(-Lr \sin \varphi + Mr \cos \varphi) - \\ & - \kappa\dot{\varphi}(Lr \cos \varphi + Mr \sin \varphi) = 0. \end{aligned}$$

S použitím (3,10), (3,12) dostaneme přepis

$$-\ddot{r}rK - \dot{r}^2K + K\dot{r}^2 + \kappa\dot{\varphi}(Nr + K) = 0$$

předchozí rovnice. S přihlédnutím k (3,9) upravíme ještě tuto rovnici na tvar

$$(3,13) \quad \ddot{r} = \frac{\kappa^2}{r^3} \left(-\frac{r}{k} + 1 \right) = +\frac{\kappa}{r^3} - \frac{\kappa^3}{kr^2},$$

kde pro stručnost jsme položili

$$k \equiv -\frac{K}{N}.$$

Tedy, podle předpokladu v (3,10), je $k > 0$ a je to zřejmě z-ová souřadnice bodu, v němž rovina (3,10) protne osu z. Má tedy toto číslo k stejný význam jako v odstavci 1.

Diferenciální rovnice (3,13) je zřejmě diferenciální rovnicí všech nedegenerovaných kuželoseček v rovině (x, y) , pro které je bod $O \equiv M_1$, tj. počátek souřadnicového systému, ohniskem a pro které platí (3,9). Abychom dostali diferenciální rovnice těchto kuželoseček v kartézských souřadnicích, zderivujeme v rovnicích (3,7) podle času t . Obdržíme tak

$$(3,14) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2r\dot{\varphi} \sin \varphi \dot{\varphi} - r \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - r \sin \varphi \ddot{\varphi}, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2r\dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\varphi} - r \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + r \cos \varphi \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Derivováním podle t plyne z (3,9) po úpravě

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Odtud a z (3,14), (3,11), (3,9) plyne dále

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi = \frac{1}{r} \left(\ddot{r} - \frac{K^2}{r^3} \right) x, \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi = \frac{1}{r} \left(\ddot{r} - \frac{K^2}{r^3} \right) y. \end{aligned}$$

Dosadíme-li sem za \ddot{r} z (3,13), obdržíme po úpravě

$$(3,15) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\kappa^2}{kr^3} x, \\ \ddot{y} &= -\frac{\kappa^2}{kr^3} y, \end{aligned}$$

což je systém diferenciálních rovnic druhého řádu pro hledané funkce $x(t)$, $y(t)$, popisující pohyb bodu M_2 . Při daném čísle $k > 0$ a při počátečních podmínkách

$$(3,16) \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, \\ \dot{x}(0) &= v_x, & \dot{y}(0) &= v_y, \end{aligned}$$

vyhovujících podmínce (1,3), je řešení rovnic (3,15) jednoznačně určeno.

Abychom dokázali, že kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ s popisem (1,7), získaná konstrukcí popsanou v odstavci 1, je křivkou, po níž se pohybuje hmotný bod M_2 vzhledem k bodu M_1 , stačí zřejmě ukázat, že při počátečních podmínkách x, y, v_x, v_y vyhovujících podmínce (1,3), jsou pro kuželosečku $\mathcal{E}(P)$ splněny podmínky (3,16), ovšem za předpokladu, že číslo $k > 0$ je vhodně pevně zvoleno. Pro určení čísla $k > 0$ vyjdeme z pohybového zákona (3) v odstavci 2, kterého jsme dosud nepoužili.

V problému dvou hmotných těles (tedy též v našem případě, kdy jde o dvojici hmotných bodů) je třeba uvážit, že každý element této dvojice se v prostoru pohybuje vzhledem k souřadnicovému systému pevně zvolenému v prostoru; možnost volby takového „absolutního referenčního systému“ je postulátem klasické mechaniky. Mysleme si tedy nějaký pevný referenční kartézský systém v E_3 o pravouhlých souřadnicích ξ^α ($\alpha = 1, 2, 3$), v němž $\xi^\alpha = \xi_1^\alpha(t)$ je lokální popis dráhy bodu M_1 a $\xi^\alpha = \xi_2^\alpha(t)$ lokální popis dráhy bodu M_2 . Je-li P_1^α vektor síly působící na bod M_1 a P_2^α vektor síly působící na bod M_2 , potom — podle druhého zákona Newtonova — jest

$$(3,17) \quad m_1 \ddot{\xi}_1^\alpha = m_1 \frac{d^2}{dt^2} \xi_1^\alpha = P_1^\alpha, \\ m_2 \ddot{\xi}_2^\alpha = m_2 \frac{d^2}{dt^2} \xi_2^\alpha = P_2^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Podle axiomu (3) je však

$$P_1^\alpha = m_1 m_2 f(r) (\xi_2^\alpha - \xi_1^\alpha), \quad P_2^\alpha = -m_1 m_2 f(r) (\xi_2^\alpha - \xi_1^\alpha)$$

(kde $f(r) > 0$ je zatím neurčený skalár nezávislý na hmotách m_1, m_2). Můžeme tedy rovnice (3,17) přepsat na tvar

$$m_1 \ddot{\xi}_1^\alpha = m_1 m_2 f(r) (\xi_2^\alpha - \xi_1^\alpha), \quad m_2 \ddot{\xi}_2^\alpha = -m_1 m_2 f(r) (\xi_2^\alpha - \xi_1^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

z něhož plyne

$$(3,18) \quad \ddot{\xi}_2^\alpha - \ddot{\xi}_1^\alpha = -(m_1 + m_2) f(r) (\xi_2^\alpha - \xi_1^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Vektor o složkách $x^\alpha \equiv \xi_2^\alpha - \xi_1^\alpha$ s počátečním bodem v bodě M_1 udává zřejmě polohu bodu M_2 vzhledem k bodu M_1 v souřadnicovém systému (x^α) s počátkem v bodě M_1 a se souřadnicovými osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami systému (ξ^α). Veličiny x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou tedy „relativními souřadnicemi“ bodu M_2 vzhledem k bodu M_1 . Zavedením souřadnic x^α do (3,18) dostaneme rovnice

$$(3,19) \quad \ddot{x}^\alpha = -(m_1 + m_2) f(r) x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

kteřé popisují pohyb bodu M_2 vzhledem k bodu M_1 . Podle axiomu (2) jsou to tedy rovnice nedegenerované kuželosečky s ohniskem v bodě M_1 a tedy též kuželosečky, která je v souřadnicové rovině s popisem $z = x^2 = 0$ popsána relací (3,15). Porovnáním (3,15) a (3,19) (kde klademe $x^1 = x$, $x^2 = y$) plyne

$$\frac{z^2}{kr^3} = (m_1 + m_2) f(r)$$

a tedy

$$(3,20) \quad f(r) \cdot r^3 = \frac{z^2}{k(m_1 + m_2)} \equiv \gamma,$$

kde γ je kladná konstanta nezávislá na hmotách m_1 , m_2 . Z (3,20) plyne pak ihned vztah (3,1), v němž γ je experimentální zjištěná gravitační konstanta.

Dosazením z (3,1) do (3,15) dostaneme známé pohybové rovnice

$$(3,21) \quad \ddot{x} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^3} x,$$

$$\ddot{y} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^3} y$$

pro pohyb hmotného bodu M_2 vzhledem k bodu M_1 . Jde zde zřejmě o Newtonův gravitační zákon (v „relativních souřadnicích“), který jsme tak z axiomů (1), (2), (3) v odst. 2 odvodili.

Nyní již snadno dokážeme, že kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ s popisem (1,7), kde číslo k je definováno relací (3,1), vyhovuje daným počátečním podmínkám a je za těchto podmínek jednoznačným řešením pohybových rovnic (3,21). Jsou-li r_0, φ_0 polární souřadnice bodu P , tj. počáteční polohy bodu M_2 , potom z (1,2), (1,7) a (1,3) plyne

$$r|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{k}{z_0 (v_y \cos \varphi_0 - v_x \sin \varphi_0)} = \frac{z_0}{r_0 (v_y \cos \varphi_0 - v_x \sin \varphi_0)} = r_0,$$

tj. bod P leží na kuželosečce $\mathcal{E}(P)$, což je též z její konstrukce v odstavci 1 evidentní.

Z (1,7) a (3,3) plyne derivováním podle t :

$$\dot{r} = \frac{k \left[\frac{k}{z_0} (v_y \sin \varphi + v_x \cos \varphi) + \sin(\varphi - \varphi_0) \right]}{\left[1 + \frac{k}{z_0} (v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi) - \cos(\varphi - \varphi_0) \right]^2} \dot{\varphi};$$

tedy, vzhledem k (1,3), (1,2)

$$\dot{r}|_P = \frac{k^2}{z} \begin{bmatrix} v_y \sin q_0 + v_x \cos q_0 \\ v_y \cos q_0 - v_x \sin q_0 \end{bmatrix} \dot{q} = \frac{r}{z} \begin{bmatrix} v_y y_0 + v_x x_0 \\ v_y y_0 - v_x x_0 \end{bmatrix} \dot{q}.$$

Odtud a z (3,7) plyne dále

$$\begin{aligned} \dot{x}|_P = v_x|_P = \dot{r}|_P \cos q_0 - r \sin q_0 \dot{q} &= \left[\frac{r}{z} (v_y y_0 + v_x x_0) \cos q_0 - r \sin q_0 \right] \dot{q} = \\ &= \left[\frac{1}{z} (v_y y_0 x_0 + v_x x_0^2) - y_0 \right] \dot{q} = \frac{\dot{q}}{z} (v_y x_0 y_0 + v_x x_0^2 - y_0 z) = \\ &= \frac{\dot{q}}{z} (v_y v_x y_0 + v_x x_0^2 - y_0 v_x y_0 + y_0^2 v_x) = \frac{\dot{q}}{z} v_x r^2 = v_x. \end{aligned}$$

Analogicky si ověříme, že je též $\dot{y}|_P = v_y$.

Při pohybu bodu M_2 po kuželosečce $\mathcal{E}(P)$ z (1,7), charakterisovaným postuláty (1), (2), (3) z odstavce 2, jsou tedy splněny podmínky (3,16). Vzhledem k jednoznačnosti řešení pohybových rovnic (3,17) je kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ při volbě (3,1) čísla k hledanou dráhou hmotného bodu M_2 v souřadnicovém systému pevně spojeném s bodem M_1 (s počátkem v M_1). Tím je geometrická konstrukce dráhy bodu M_2 , popsaná v odstavci 1, zdůvodněna.

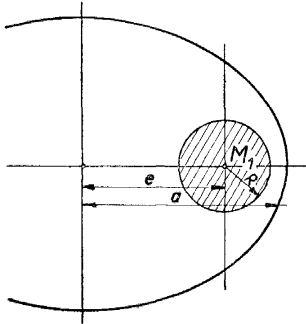
Poznámka. V našem geometrickém modelu jsme volili rotační kužel s popisem (1,1), tedy kužel, jehož povrchka svírá s osou rotace úhel $\frac{\pi}{4}$. Kdybychom při konstrukci vyšli od kužele s popisem $x = r \cos q$, $y = r \sin q$, $z = \mu r$ ($\mu > 0$ konstantní), potom celý geometrický postup povede k týmž výsledkům, jestliže místo čísla k , definovaného v (3,1), vezmeme číslo $*k = \frac{k}{\mu}$ (což se pro počtem snadno ověří).

4. ELIPTICKÉ POHYBY V POLI HOMOGENNÍ NEBO PO VRSTVÁCH HOMOGENNÍ KOULE

Uvažujeme hmotnou homogenní nebo po vrstvách homogenní kouli M_1 o hmotě m_1 a poloměru R . Ve vzdálenosti $h > 0$ od povrchu koule myslíme si hmotné těleso M_2 zanedbatelně malých rozměrů a malé hmotě oproti kouli M_1 , takže je lze prakticky považovat za hmotný bod se zanedbatelnou hmotou vedle hmoty m_1 koule M_1 (příklad: Země—umělá družice). Za těchto předpokladů položíme si tento problém: *Jakým omezujícím podmínkám je podroben*

vektor \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti hmotného bodu M_2 , jestliže si klademe požadavek, aby dráha bodu M_2 vzhledem k těžišti hmotné koule M_1 byla eliptickou a neprotínala povrch koule M_1 ? Stručně řečeno: Hledejme podmínky, za jakých se hmotný bod M_2 ve vzdálenosti h od povrchu koule M_1 stane její oběžnicí.

Poněvadž dráha bodu M_2 ve zvoleném souřadnicovém systému je rovinnou křivkou, můžeme uvedený problém řešit zřejmě jako problém rovinný, kde dráha bodu M_2 je kuželosečkou $\mathcal{E}(P)$ z odstavce 1, která má popis (1,7), s tím



Obr. 2.

jediným rozdílem, že místo definiční formule (3,1) pro číslo k použijeme aproximativního vztahu

$$(4,0) \quad k = \frac{\kappa^2}{\gamma m_1}.$$

K tomu, aby kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ byla elipsou, je nutné a stačí, aby platilo

$$(4,1) \quad D = -\frac{k^2}{\kappa^2} v_0^2 + \frac{2k}{r} > 0 \quad (r = R + h),$$

ak je uvedeno na str. 5. Nemá-li kuželosečka $\mathcal{E}(P)$ s vlastností (4,1) (tedy elipsa) protnout povrch koule, potom musí nutně platit

$$(4,2) \quad a - e \geq R,$$

kde a je hlavní poloosa elipsy $\mathcal{E}(P)$, e její ohnisková vzdálenost, R poloměr koule M_1 (obr. 2). Podmínku (4,2) lze vzhledem k formulím (1,13), (1,14) přepsat na tvar

$$\frac{k}{D} (1 - \sqrt{1 - D}) \geq R,$$

což po úpravě vede k nerovnosti

$$\frac{R^2 D^2}{k^2} + D \left(1 - \frac{2R}{k}\right) \geq 0.$$

Vzhledem k podmínce (4,1) lze tuto nerovnost přepsat (po zkrácení D) na jednodušší tvar

$$\frac{R^2 D}{k^2} + 1 - \frac{2R}{k} \geq 0.$$

Dosadíme-li sem za D výraz na pravé straně v (4,1), dostaneme po úpravě

$$(4,3) \quad -\frac{R^2}{\kappa^2} v_0^2 + \frac{2R^2}{kr} + 1 - \frac{2R}{k} \geq 0.$$

Na základě relace (4,0) lze nerovnost (4,3) upravit na tvar

$$(4,4) \quad v_0^2 + 2\gamma m_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) - \frac{\varkappa^2}{R^2} \leq 0.$$

Není na újmu obecnosti, jestliže bod P , tj. počáteční polohu bodu M_2 , volíme takto: $x_0 = R + h$, $y_0 = 0$. Symbolem ψ_0 označíme úhel, který svírá průvodič bodu M_2 v jeho počáteční poloze P s vektorem počáteční rychlosti \mathbf{v}_0 (obr. 3). Pro složky v_{0x} , v_{0y} vektoru \mathbf{v}_0 platí pak

$$v_{0x} = v_0 \cos \psi_0, \quad v_{0y} = v_0 \sin \psi_0 \quad (v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2).$$

Odtud a z (1,3) plyne pak

$$(4,5) \quad \varkappa = v_{0x} \sin \psi_0 = (R + h) v_0 \sin \psi_0 \neq 0.$$

Je tedy $\psi_0 \neq 0$, \varkappa . Užitím (4,5) dostaneme po drobných úpravách následující přepis nerovnosti (4,4)

$$(4,6)_a \quad v_0^2 (\sin^2 \psi_0 - \sin^2 \beta) \geq \frac{2\gamma m_1 h R}{(R + h)^3} > 0,$$

kde jsme položili

$$(4,6)_b \quad \sin \beta \equiv \frac{R}{R + h}.$$

Úhel β má zřejmě význam patrný z obr. 3. Z (4,6)_a vyplývá především

$$(4,7) \quad \sin^2 \psi_0 > \sin^2 \beta$$

jako nutná podmínka pro to, aby platila nerovnost (4,2). To však znamená, že pro eliptický oběh hmotného bodu M_2 kolem hmotné koule M_1 v uvažované rovině přicházejí v úvahu nejvýše takové vektory \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti bodu M_2 , které mají počáteční bod v bodě P a směřují do takové oblasti vymezené tečnami z bodu P , která neobsahuje body přímky spojující počátek souřadnicového systému s bodem P (vyčárkované obory na obr. 3).

Nechť \mathbf{v}_0 je vektor počáteční rychlosti bodu M_2 s vlastností (4,7). Položme (obr. 4)

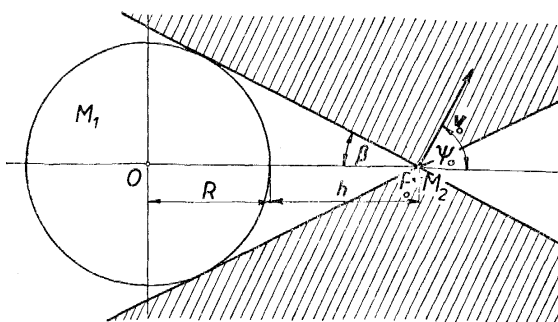
$$(4,8) \quad \xi \equiv v_0 \cos \psi_0, \quad \eta \equiv v_0 \sin \psi_0.$$

Potom můžeme nerovnost (4,6)_a na základě relací (4,8), (4,6)_c přepsat na tvar

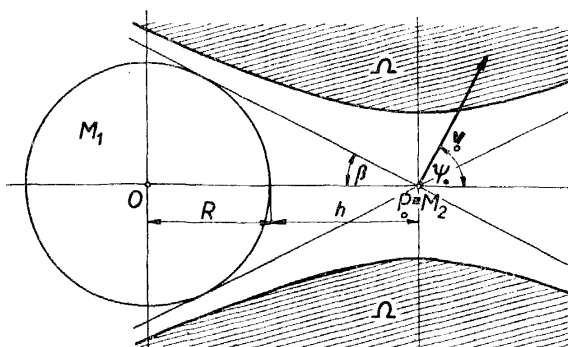
$$(\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{R^2}{(R + h)^2} \right) \geq \frac{2\gamma m_1 h R}{(R + h)^3}.$$

Odtud plyne úpravou

$$(4,9) \quad \eta^2 \frac{(R+h)(2R+h)}{2\gamma m_1 R} - \xi^2 \frac{R(R+h)}{2\gamma m_1 h} - 1 \geq 0.$$



Obr. 3.



Obr. 4.

Množina všech bodů $[\xi, \eta]$ vyhovujících nerovnosti (4,9) představuje v uvažované rovině dvě uzavřené oblasti vymezené hyperbolou

$$(4,10) \quad \eta^2 \frac{(R+h)(2R+h)}{2\gamma m_1 R} - \xi^2 \frac{R(R+h)}{2\gamma m_1 h} = 1,$$

které neobsahují její střed P (obr. 4). Pro délku a_h hlavní poloosy a délku b_h vedlejší poloosy hyperboly (4,10) vypočteme

$$(4,10)_*^2 \quad a_h = \left(\frac{2\gamma m_1 R}{(R+h)(2R+h)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b_h = \left(\frac{2\gamma m_1 h}{R(R+h)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Její ohnisková vzdálenost e_h je pak

$$(4,10) \quad e_h = \left(\frac{2\gamma m_1(R+h)}{R(2R+h)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Máme tedy tento výsledek: Při eliptickém oběhu bodu M_2 kolem koule M_1 v uvažované rovině leží nutně koncový bod vektoru \mathbf{v}_0 (tj. vektoru počáteční rychlosti bodu M_2 , jehož počáteční bod je v bodě P) v jedné z uzavřených rovinných oblastí, jejíž konturou je větev (4,10) hyperboly a která neobsahuje bod P . Jde zřejmě o dvě uzavřené neomezené oblasti; označme je v dalším společným symbolem Ω (obr. 4).

Předpokládejme, že vektor \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti bodu M_2 má svůj koncový bod v oboru Ω shora popsáném (obr. 4). Potom je podmínka (4,2) zřejmě splněna, jak vyplývá z předchozího rozboru. Aby za těchto podmínek nastal eliptický oběh bodu M_2 kolem koule M_1 v uvažované rovině, k tomu postačí pak již, aby platila podmínka (4,1), kterou lze přepsat na tvar

$$(4,10)_a \quad -\frac{k}{z_0^2} v_0^2 + \frac{2}{R+h} > 0.$$

Dosadíme-li sem za číslo k z (4,0), dostaneme po úpravě:

$$(4,10)_b \quad v_0^2 < \frac{2\gamma m_1}{R+h}.$$

Vzhledem k (4,8) můžeme nerovnost (4,10)_b přepsat na tvar

$$(4,11) \quad \xi^2 + \eta^2 < \frac{2\gamma m_1}{R+h}.$$

Množina všech bodů $[\xi, \eta]$, které vyhovují nerovnosti (4,11), představuje vnitřek kruhu o poloměru

$$(4,12) \quad \varrho = \sqrt{\frac{2\gamma m_1}{R+h}}$$

se středem v bodě P . Pro vektor \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti bodu M_2 s počátečním bodem v bodě P a koncovým bodem v oboru, který je průnikem množiny Ω a vnitřku uvažovaného kruhu, je tedy splněna vedle podmínky (4,2) též podmínka (4,1).

K vůli stručnosti nazveme hyperbolu s popisem (4,10) *mezní v-hyperbolou*, kružnici s popisem

$$(4,13) \quad \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2 = \frac{2\gamma m_1}{R+h}$$

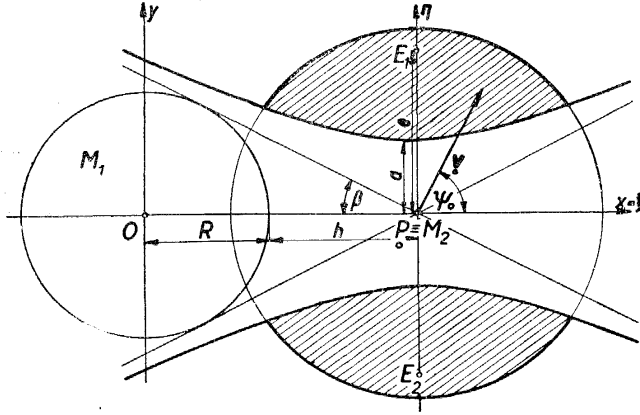
mezní v-kružnicí. Středem obou těchto kuželoseček je bod P , tj. bod určující počáteční polohu bodu M_2 .

Všimněme si ještě, že platí

$$a_h < e_h < \varrho,$$

jak plyne z (4,10)_{a,b} a z (4,12). Průnik množiny Ω s vnitřkem mezní v -kružnice obsahuje tedy ohniska mezní v -hyperboly.

Odpověď na otázku, kterou jsme si kladli na počátku odstavce 4, můžeme nyní stručně vyslovit takto:



Obr. 5.

K tomu, aby nastal eliptický oběh hmotného bodu M_2 kolem hmotné homogenní nebo po vrstvách homogenní koule M_1 při dané vzdálenosti bodu M_2 od povrchu této koule, je nutné a stačí, aby koncový bod vektoru \mathbf{v} počáteční rychlosti bodu M_2 byl vnitřním bodem oblasti vymezená mezní v -hyperbolou a mezní v -kružnicí, a to takovou oblastí, které obsahuje ohnisko mezní v -hyperboly (obr. 5).

V následujících odstavcích jsou uvedena některá známá fakta jako bezprostřední důsledek plynoucí z relací získaných v předchozích odstavcích.

5. ÚNIKOVÁ RYCHLOST A PARABOLICKÝ POHYB

Jestliže diskriminant D kuželosečky $\mathcal{E}(P)$ s popisem (1,7) je roven nule, potom je dráha hmotného bodu M_2 vzhledem k hmotnému bodu M_1 (eventuálně vzhledem k homogenní nebo po vrstvách homogenní kouli) parabolou. Platnost relace

$$(5,1) \quad D = -\frac{k^2}{z_0^2} v^2 + \frac{2k}{r} = 0$$

je jak nutnou tak postačující podmínkou pro to, aby (za platnosti předpokladů z odstavce 1) dráha bodu M_2 byla parabolickou. Vzhledem k (4,0) lze relaci (5,1) přepsat na tvar

$$v_0^2 = \frac{2\gamma m_1}{\gamma_0},$$

tj.

$$(5,2) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma m_1}{\gamma_0}}.$$

Rychlost v_0 definovaná formulí (5,2) se nazývá *únikovou rychlostí*. Z (4,12) a (5,2) vyplývá: *Úniková rychlost je rovna poloměru mezní v_0 -kružnice a je nezávislá na směru (tj. na směru vektoru \mathbf{v} počáteční rychlosti bodu M_2).*

V případě studovaném v odstavci 3, kdy jde o hmotnou homogenní (nebo po vrstvách homogenní) kouli M_1 poloměru R a o hmotný bod M_2 ve vzdálenosti $h > 0$ od jejího povrchu, můžeme si položit též otázku, jaké je omezení pro vektor \mathbf{v} počáteční rychlosti, aby bod M_2 se pohyboval vzhledem k těžišti koule M_1 po parabolické dráze, která neprotíná povrch koule M_1 . K tomu, aby takový pohyb nastal, je nutné a stačí, aby vzdálenost ohniska a vrcholu paraboly byla větší, nejméně rovna poloměru koule M_1 . Poněvadž ohnisko paraboly je v počátku O systému souřadnicového, lze tuto podmínku psát ve tvaru

$$(5,3) \quad \frac{k}{2} \geq R,$$

jak vyplývá z (1,16). Vzhledem k (4,0) můžeme (5,3) přepsat na tvar

$$x^2 \geq 2\gamma m_1 R$$

a dále — podle (4,5) —

$$(R + h)^2 v_0^2 \sin^2 \psi \geq 2\gamma m_1 R.$$

Dosadíme-li sem ještě za v_0 z formule (5,2),⁶⁾ dostaneme po úpravě

$$(5,4) \quad \sin^2 \psi \geq \frac{R}{R + h}.$$

Abychom mohli výsledek (5,4) geometricky interpretovat, najdeme nejdříve průsečíky mezní v_0 -hyperboly (4,10) s mezní v_0 -kružnicí (4,13). Pro souřadnice $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ těchto průsečíků vychází

$$(5,5) \quad \tilde{\eta} = \pm \sqrt{\frac{2\gamma m_1 R}{R + h}}, \quad \tilde{\xi} = \pm \sqrt{\frac{2\gamma m_1 h}{R + h}}.$$

⁶⁾ Kde položíme $r = R + h$.

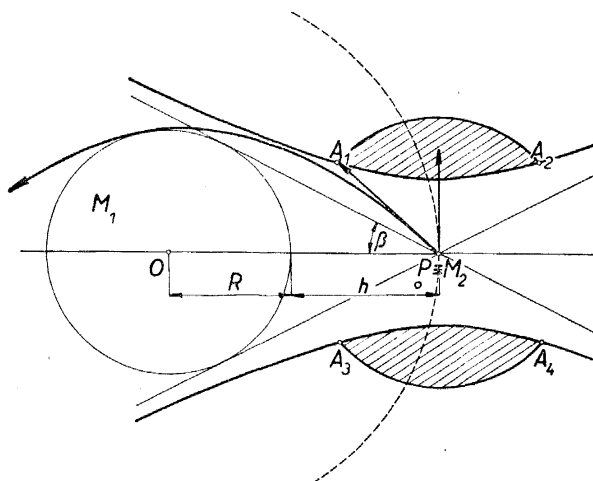
Označme

$$\sin \delta \equiv \sqrt{\frac{R}{R+h}}.$$

Potom je

$$\frac{\tilde{\eta}}{\varrho} = \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} = \sqrt{\frac{R}{R+h}} = \sin \delta,$$

jak snadno spočteme. Geometrický význam úhlu δ je patrný z obr. 6.



Obr. 6.

Má-li nastat parabolický pohyb bodu M_2 vzhledem ke kouli M_1 , a to takový, aby parabolická dráha neprotínala kouli, k tomu je nutné a stačí, aby koncový bod vektoru \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti byl bodem jednoho z oblouků mezní v -kružnice, které jsou na obr. 6 vytaženy silně. To je však výsledek, který je též možno snadno vyčíst ze závěru v odstavci 4.

Kdybychom vektor \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti bodu M_2 (jehož počáteční bod je v počáteční poloze P bodu M_2) zvolili tak, že jeho koncový bod je bod A_1 na mezní v -kružnici (obr. 6), jehož souřadnice jsou⁷⁾

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{2\gamma m_1 h}}{R+h}, \quad \eta_1 = \frac{\sqrt{2\gamma m_1 R}}{R+h},$$

⁷⁾ Viz (5,5).

potom pro souřadnice x_v, y_v vrcholu příslušné parabolické dráhy bychom našli, na základě formulí (1,15)*, (3,1), (4,5), (5,2)

$$x_v = \frac{R(R-h)}{R+h}, \quad y_v = \frac{2R\sqrt{Rh}}{R+h}.$$

Snadno zjistíme, že je $x_v^2 + y_v^2 = R^2$, tj. vrchol V příslušné paraboly leží na povrchu koule M_1 (obr. 6).

6. DOBA ELIPTICKÉHO OBĚHU A KRUHOVÁ RYCHLOST

Abychom spočetli dobu oběhu hmoty M_2 (vzhledem k M_1) při eliptickém pohybu, vyjdeme z formule (3,6) pro plošnou rychlost. Doba oběhu T násobena plošnou rychlostí dává plošný obsah eliptické dráhy, tj.

$$T\sigma = \pi ab,$$

kde a, b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy eliptické dráhy bodu M_2 . Je tedy

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\sigma^2}.$$

Dosadíme-li do této formule z (3,6), (3,9), (1,13) a (1,15)_a, dostaneme (vzhledem k (4,0))

$$(6,1) \quad T^2 = \pi^2 \frac{k^4}{D^3} \frac{4}{\kappa^2} = \frac{4\pi^2 k}{\kappa^2} \frac{k^3}{D^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1} a^3,$$

tj.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1},$$

což není nic jiného než matematická formulace třetího Keplerova zákona (zákon (III), dstavec 2).

Vzhledem k (3,1), (1,10) plyne z (6,1)

$$(6,2) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 k^4}{\kappa^2 \left(-\frac{k^2}{\kappa^2} v^2 + \frac{2k}{r} \right)^3} =$$

$$= \frac{4\pi^2 k}{K^2 \left(-\frac{k}{\kappa^2} v^2 + \frac{2}{r} \right)^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1 \left(-\frac{1}{\gamma m_1} v^2 + \frac{2}{r} \right)^3}.$$

Odtud vyplývá: *Doba eliptického oběhu závisí na velikosti vektoru \mathbf{v}_0 počáteční rychlosti bodu M_2 , nikoli však na směru tohoto vektoru.*

Hledejme nyní, při dané počáteční poloze r_0 bodu M_2 a při dané velikosti v_0 vektoru \mathbf{v}_0 (pro který jsou splněny podmínky pro eliptický pohyb kolem M_1)

takový směr vektoru \mathbf{v}_0 , který vede k eliptickému pohybu o maximální délce vedlejší poloosy b příslušné elipsy. Z (1,15)₀, (4,0) plyne pro b

$$b = \frac{k}{\sqrt{D}} = \frac{k}{\sqrt{-\frac{k^2}{\kappa^2} v^2 + \frac{2k}{r}}} = \frac{\kappa^2}{\gamma m_1 \sqrt{-\frac{\kappa^2}{\gamma^2 m_1^2} v^2 + \frac{2\kappa^2}{\gamma m_1 r}}} = \frac{|\kappa|}{\sqrt{-v^2 + \frac{2\gamma m_1}{r}}}$$

Při počáteční poloze bodu M_2 uvažované v odstavci 3 je však (dle (4,5), kde klademe $r_0 = R + h$)

$$\kappa = rv \sin \psi.$$

Je tedy

$$b = \frac{rv\varepsilon}{\sqrt{-v^2 + \frac{2\gamma m_1}{r}}} \sin \psi, \quad \text{kde } \varepsilon = \text{sg} \sin \psi.$$

Z podmínky $\frac{\partial b}{\partial \psi} = 0$ nutné pro extrém délky poloosy b v závislosti na ψ vyplývá z předchozího

$$\cos \psi = 0, \quad \text{tj. } \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Snadno si ověříme, že pro tyto hodnoty úhlu ψ dostaneme maximum funkce $b(\psi)$.

Dospěli jsme tak k závěru: *Mezi všemi vektory \mathbf{v} počáteční rychlosti bodu M_2 , které mají stejnou délku a které vedou k eliptickému pohybu hmotného bodu M_2 vzhledem k hmotnému bodu (hmotné homogenní nebo po vrstvách homogenní kouli) M_1 , má vektor \mathbf{v} kolmý na spojnici bodů M_1, M_2 v počáteční poloze tu vlastnost, že vede k eliptické dráze bodu M_2 o maximální vedlejší poloose.* To je výsledek, který se dal zřejmě očekávat.

Položme si ještě tento problém: Za jakých okolností se bude bod M_2 , při dané jeho počáteční poloze r_0 , pohybovat po kruhové dráze kolem M_1 (ať M_1 je hmotný bod nebo homogenní, resp. po vrstvách homogenní koule)? Pro takovýto pohyb platí zřejmě

$$(6,3) \quad a = b, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2},$$

kde a, b jsou poloosy eliptické dráhy. Z (6,3), (1,13) (1,15) plyne pak

$$D = 1.$$

Tedy, vzhledem k (1,12)

$$-\frac{k^2}{\kappa^2} v^2 + \frac{2k}{r} = 1.$$

S použitím (4,0) můžeme tuto formuli přepsat na tvar

$$(6,4) \quad -\frac{\kappa^2}{\gamma_1^2 m_1^2} v^2 + \frac{2\kappa^2}{\gamma m_1 r} = 1.$$

Z podmínky $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ a z (4,5) plyne však

$$\kappa^2 = r^2 v^2 \text{.}^8)$$

Odtud a z (6,4) plyne pak po úpravě

$$v^4 - \frac{2\gamma m_1 v^2}{r} + \frac{\gamma^2 m_1^2}{r^2} = 0,$$

tj.

$$v^2 = \frac{\gamma m_1}{r}$$

a tedy

$$(6,5) \quad v = \sqrt{\frac{\gamma m_1}{r}}.$$

Počáteční rychlost v bodu M_2 v počáteční poloze r , která je definována relací (6,5), nazývá se *rychlostí kruhovou*. Z (6,5), (5,2) vyplývá: *Kruhová rychlost bodu M_2 je rovna únikové rychlosti násobené faktorem $\frac{\sqrt{2}}{2}$, příslušné téže počáteční poloze bodu M_2 .*

Pro čtverec oběžné doby T při kruhovém oběhu dostaneme z (6,5), (6,2)

$$(6,6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1 \left(-\frac{1}{\gamma m_1} \frac{\gamma m_1}{r} + \frac{2}{r} \right)^3} = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma m_1}.$$

Závěrem řešme ještě tento úkol:

Bod M_2 nechť se pohybuje při daných počátečních podmínkách (tj. při jeho počáteční poloze charakterisované vzdáleností r od hmotného bodu M_1 a při vektoru \mathbf{v} počáteční rychlosti) po eliptické dráze vzhledem k hmotnému bodu

⁸⁾ V (4,5) klademe $r = R + h$.

M_1 . Máme určit takovou kruhovou dráhu, pro kterou doba oběhu bodu M_2 by byla táž jako doba oběhu při původní eliptické dráze.

Označme r'_0 poloměr hledané kruhové dráhy. Podmínka rovnosti dob oběhu po původní dráze a po dráze kruhové vede pak k podmínce

$$\frac{4\pi^2}{\gamma m_1 \left(-\frac{1}{\gamma m_1} v_0^2 + \frac{2}{r_0} \right)^3} = \frac{4\pi^2 r_0'^3}{\gamma m_1},$$

jak plyne z (6,2), (6,6). Úpravou obdržíme z předchozí rovnice ihned

$$(6,7) \quad r'_0 = \frac{1}{-\frac{1}{\gamma m_1} v_0^2 + \frac{2}{r_0}}$$

pro hledaný poloměr kruhové dráhy. Pro kruhovou rychlost v'_0 , která je v každém bodě kruhové dráhy stejná, plyne pak bezprostředně z předchozí formule a z (6,5)

$$v'_0 = \sqrt{-v_0^2 + \frac{2\gamma m_1}{r_0}}.$$

Abychom určili vztah mezi délkou a hlavní poloosy původní eliptické dráhy a poloměrem r'_0 , vyjdeme z formule (1,13), kterou upravíme pomocí relace (4,0).

Tedy

$$a = \frac{1}{-\frac{k}{\kappa^2} v_0^2 + \frac{2}{r_0}} = \frac{1}{-\frac{1}{\gamma m_1} v_0^2 + \frac{2}{r_0}}.$$

Odtud a z (6,7) vyplývá, že poloměr hledané kružnice je roven délce hlavní poloosy původní eliptické dráhy.

Резюме

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička)

Уравнения

$$(I) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \quad (r \geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle)$$

описывают в трехмерном евклидовом пространстве E_3 с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z конус вращения с осью вращения z . Любая плоскость, имеющая непустое пересечение с этим конусом, не про-

ходящая через его вершину и не параллельная оси z , пересекается с ним по неособой кривой второго порядка, проекцией которой в направлении оси z в координатную плоскость (x, y) является также неособая кривая второго порядка, фокусом которой служит вершина конуса. Это обстоятельство, хорошо известное из аналитической геометрии, можно использовать при геометрической конструкции пути материальной точки в поле тяжести другой материальной точки при данных условиях и при соблюдении основных принципов классической механики.

Пусть M_1, M_2 — две материальные точки массы m_1, m_2 и пусть $r_0 > 0$ — их начальное расстояние. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку M_1 и ориентируем эту систему в E_3 . Так как путь точки M_2 по отношению к неподвижной точке M_1 представляет собой плоскую кривую (что вытекает из законов классической механики), можем в качестве плоскости соответствующего пути взять плоскость координат (x, y) . Обозначим через $P_0(x, y)$ начальное положение точки M_2 в избранной системе координат и через $\mathbf{v}_0(x_x, v_y, 0)$ — вектор начальной скорости точки M_2 по отношению к точке M_1 и предположим, что векторы $\overrightarrow{OP_0}, \mathbf{v}_0$ не инцидентны, т. е. (рис. 1), что

$$(2) \quad \kappa \equiv \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этих предположениях получим путь точки M_2 (по отношению к M_1) следующим образом: в точке P_0 построим перпендикуляр к координатной плоскости (x, y) , который пересечет конус (1) в одной точке P^* . В этой точке конуса построим его касательную плоскость. Из концевой точки Q вектор \mathbf{v}_0 (начальная точка которого есть P_0) опустим перпендикуляр на координатную плоскость (x, y) ; последний пересечет упомянутую касательную плоскость в точке Q^* . Таким образом мы получим вектор $\mathbf{v}_0^* \equiv \overrightarrow{P^*Q^*}$, который лежит в касательной к конусу плоскости, построенной в точке P^* (рис. 1). На оси z отметим точку S с координатами

$$x_s = 0, \quad y_s = 0, \quad z_s = \frac{\kappa^2}{\gamma(m_1 + m_2)},$$

где γ означает постоянную тяжести, m_1 — массу точки M_1 и k — число, определенное в (2). Построим плоскость, определенную тремя точками P_0^*, Q^*, S . Эта плоскость пересечет конус (1) по неособой кривой второго порядка, проекцией которой по направлению оси z в координатную плоскость

(x, y) является кривая второго порядка, представляющая собой искомый путь точки M_2 (рис. 1).

Построение и его физическое оправдание детально описано и дополнено математическим анализом в отделах 1—3 предыдущей статьи на чешском языке.

Дальнейшие отделы статьи посвящены специальным случаям. В первую очередь следует отметить необходимые и достаточные условия для того, чтобы возникло эллиптическое вращение материальной точки M_2 вокруг данного материального шара данного радиуса R и притом фактическое вращение, т. е. чтобы эллиптический путь не пересекал поверхность шара. Соответствующим условиям можно легко дать геометрическую интерпретацию, как показано на рис. 2—6 предыдущей статьи на чешском языке.

Zusammenfassung

ÜBER EIN MODELL IN DER KLASSISCHEN THEORIE DES ZWEI-KÖRPER-PROBLEMS

FRANTIŠEK NOŽIČKA

Durch das Gleichungssystem

$$(I) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad t = r \quad (r \geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle)$$

wird im dreidimensionalen eukleidischen Raum E_3 , der mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y, z versehen ist, der Rotationskegel beschrieben, dessen Rotationsachse mit der z -Achse zusammenfällt. Jede Ebene, die keinen leeren Durchschnitt mit diesem Kegel ausweist und die weder zur z -Achse parallel ist noch den Gipfelpunkt des Kegels enthält, schneidet den Kegel in einer nicht-singulären Kegelschnittlinie, deren Projektion in Richtung der z -Achse in die (x, y) -Koordinatenebene ebenfalls eine nicht-singuläre Kegelschnittlinie ist, welche den Gipfelpunkt des Kegels zum Brennpunkt hat. Aus dieser in der analytischen Geometrie bekannten Tatsache ergibt sich unmittelbar eine geometrische Konstruktion der Bahn des Massenpunktes im Gravitationsfelde eines anderen Massenpunktes unter gegebenen Anfangsbedingungen und mit Berücksichtigung der Grundgesetze der klassischen Mechanik.

Es seien M_1, M_2 zwei Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2 und $r > 0$ ihre Anfangsentfernung. Wir wählen den Ursprung O des rechtwinkligen Bezugssystems im Punkte M_1 bei fester Orientierung des Bezugssystems im Raume E_3 . Da die Bahn des Massenpunktes M_2 in Bezug auf den festen Punkt M_1 eine ebene Kurve ist (was sich aus den Gesetzen der klassischen Mechanik ergibt), können wir als Ebene der betreffenden Bahnkurve die (x, y) -Koordinaten-

ebene wählen. Bezeichnen wir mit $P(x, y)$ die Anfangslage des Punktes M_2 im gewählten Bezugssystem und mit $\mathbf{v}(v_x, v_y, 0)$ den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes M_2 in Bezug auf M_1 und setzen voraus, dass die Vektoren \overline{OP} , \mathbf{v} nicht incident sind, d. h. (Abb. 1)

$$(2) \quad z \equiv \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 0 \\ v_x & v_y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen gewinnen wir die Bahn des Punktes M_2 (in Bezug auf M_1) durch folgende Konstruktion: Durch den Punkt P führen wir eine zur (x, y) -Koordinatenebene senkrechte Gerade, die den Kegel (1) im Punkte P^* schneidet. In diesem Punkte des Kegels wird die Tangentialebene konstruiert. Die Gerade durch den Endpunkt Q des Vektors \mathbf{v} (dessen Anfangspunkt in P ist), die senkrecht auf die (x, y) -Ebene geführt wird, schneidet die erwähnte Tangentialebene im Punkte Q^* .

So gewinnt man den Vektor $\mathbf{v}^* \equiv \overline{P^*Q^*}$, der in der Tangentialebene des Kegels im Punkte P^* enthalten ist (Abb. 1). Auf der z -Achse wählen wir den Punkt S mit den Koordinaten

$$x_s = 0, \quad y_s = 0, \quad z_s = \frac{\kappa^2}{\gamma(m_1 + m_2)},$$

wo γ die Gravitationskonstante, m_1 die Masse des Punktes M_1 und κ die Zahl aus (2) bedeutet. Durch die Punkte P^* , Q^* , S legen wir die betreffende Ebene fest. Diese Ebene schneidet den Kegel (1) in nicht-singulären Schnittlinie durch, deren Projektion in Richtung der z -Achse in die (x, y) -Koordinatenebene ebenfalls eine Kegelschnittlinie ist und zwar die gesuchte Bahnkurve des Punktes M_2 (Abb. 1).

Die Konstruktion und die physikalische Begründung werden in den Absätzen 1—3 des tschechischen Artikels mit mathematischer Erläuterung ausführlich beschrieben.

In weiteren Absätzen des Artikels werden spezielle Fälle behandelt. In erster Reihe werden hier notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass ein elliptischer Umlauf des Massenpunktes M_2 in Bezug auf eine homogene Massenkugel vom gegebenen Durchmesser R entstehe, d. h. damit die elliptische Bahn die Kugeloberfläche nicht durchkreuze. Die betreffenden Bedingungen lassen sich leicht geometrisch interpretieren, wie es aus den Abbildungen 2—6 des tschechischen Artikels sichtbar wird.