Aleš Tondl

Metoda k určení intervalu nestability quasiharmonických systémů

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 4, 278–289

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102669

METODA K URČENÍ INTERVALŮ NESTABILITY QUASIHARMONICKÝCH SYSTÉMŮ

ALEŠ TONDL

(Došlo dne 18. srpna 1958.) DT: 534.01:517.9

V článku je ukázána metoda pro nalezení intervalů nestability quasiharmonických kmitavých systémů popsaných systémem diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty. K demonstraci metody je uveden jednoduchý příklad.

1. ÚVOD

Při vyšetřování stability periodických kmitů quasilineárních systémů nebo kmitavých systémů quasiharmonických přicházíme k těmto diferenciálním rovnicím ve variacích

$$\ddot{y}_s + \sum_{k=1}^{n} a_{sk} y_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (q_{sk} y_k + p_{sk} y_k) = 0 \text{ [1]} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n)\,, \tag{1,1}$$

kde a_{sk} jsou konstanty, $q_{sk} = q_{sk}(t)$, $p_{sk} = p_{sk}(t)$ jsou periodické, spojité funkce času s periodou $2\pi/\omega$, které lze rozvinouti ve Fourierovy řady a ε je malý parametr.

Jsou-li f_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ periodická řešení, jejichž stabilitu vyšetřujeme, pak tato řešení budou stabilní, budou-li absolutní hodnoty všech kořenů charakteristické rovnice soustavy (1,1) menší než jedna (viz [1], str. 216).[2]

Zavedeme-li substituci $\omega t = \tau$, pak systém (1,1) dostane tvar

$$y_s'' + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{sk}}{\omega^2} y_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q_{sk}}{\omega} y_k' + \frac{p_{sk}}{\omega^2} y_k \right) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n)\,, \tag{1,2}$$

kde funkce $q_{sk}(\tau)$, $p_{sk}(\tau)$ mají nyní periodu 2π.

[1]) Pro lineární quasiharmonický systém je homogenní soustava pohybových diferenciálních rovnic současně systémem diferenciálních rovnic ve variacích vzhledem k libovolnému řešení úplného systému pohybových rovnic.

[2]) Nutno si uvědomiti, že charakteristická rovnice diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty je odlišně definována než charakteristická rovnice lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (viz [1], str. 194).

Příslušný zkrácený systém (pro $\varepsilon = 0$)

$$y_s'' + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{sk}}{\omega^2} y_k = 0 \tag{1,3}$$

má charakteristickou rovnici

$$\operatorname{Det}\left(\frac{a_{sk}}{\omega^2} + \delta_{sk}\lambda^2\right) = 0\,, \tag{1,4}$$

kde δ_{sk} je Kroneckerův symbol ($\delta_{sk} = 1$ pro $s = k$, $\delta_{sk} = 0$ pro $s \neq k$).

Předpokládejme, že kořeny λ jsou vesměs ryze imaginární jednoduché.

Označme

$$\lambda_s = i\,\frac{\Omega_s}{\omega} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n\,; \quad i = \sqrt{-1})\,, \tag{1,5}$$

kde Ω_s jsou vlastní frekvence příslušného zkráceného systému k systému (1,1). Pak charakteristická rovnice (1,4) má kořeny $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm\lambda_3$, ..., $\pm\lambda_n$.

Pro některé speciálnější systémy lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty bylo dokázáno, že vyjma okolí těch hodnot ω_0, pro která platí

$$\omega_0 = \frac{\Omega_k \pm \Omega_j}{N} \quad (k, j = 1, 2, 3, \ldots, n;\ N \neq 0 \text{ celé číslo})\,, \tag{1,6}$$

což odpovídá rovnicím

$$\lambda_k \pm \lambda_j = iN\,, \tag{1,7}$$

jsou všechna řešení omezená (viz [2]). Pro kanonické systémy dokázal toto M. G. Krejn (viz [3]).

Budeme-li nyní hledati nestabilní řešení f_s vzhledem k parametru ω, lze očekávat, že intervaly nestabilních řešení se budou nalézati především v okolí těch hodnot ω, které vyhovují rovnicím (1,6), a pro některé případy, (jako např. pro kanonický systém), víme, že tyto intervaly nestabilních řešení jsou jediné, tj. že mimo tyto intervaly jsou všechna vyšetřovaná řešení f_s stabilní.

V dalším bude ukázána metoda pro praktický výpočet intervalů nestability, nalézajících se v okolí hodnot ω_0 (viz rovnice (1,7).

2. VÝPOČET INTERVALŮ NESTABILITY

Systém (1,2) můžeme transformovat na systém

$$x_s'' - \lambda_s^2 x_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (Q_{sk} x_k' + P_{sk} x_k) \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n)\,, \tag{2,1}$$

kde λ_s vyhovují rovnicím (1,5) a $Q_{sk} = Q_{sk}(\tau)$, $P_{sk} = P_{sk}(\tau)$ jsou opět spojité periodické funkce τ o periodě 2π, které lze rozvinouti ve Fourierovy řady.

Předpokládejme dále, že všechny hodnoty λ_s jsou různé od nuly.

Substitucemi

$$x_s' + \lambda_s x_s = \xi_s\,, \quad x_s' - \lambda_s x_s = \eta_s \tag{2,2}$$

převedeme systém (2,1) na tvar

$$\xi_s' = \lambda_s \xi_s + \frac{1}{2}\,\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left[Q_{sk}(\xi_k + \eta_k) + \frac{1}{\lambda_k}\, P_{sk}(\xi_k - \eta_k) \right], \tag{2,3}$$

$$\eta_s' = -\lambda_s \eta_s + \frac{1}{2}\,\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left[Q_{sk}(\xi_k + \eta_k) + \frac{1}{\lambda_k}\, P_{sk}(\xi_k - \eta_k) \right], \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n)\,.$$

Na základě Floquetovy věty můžeme psát

$$\xi_s = e^{\mu\tau} u_s(\tau)\,, \quad \eta_s = e^{\mu\tau} v_s(\tau)\,, \tag{2,4}$$

kde $u_s(\tau)$, $v_s(\tau)$ jsou periodické funkce τ s periodou 2π. Jak ukázal S. N. Šimanov, lze charakteristický exponent μ psát ve tvaru

$$\mu = \lambda + \varepsilon i \varkappa(\varepsilon)\,,[3] \tag{2,5}$$

kde λ je kořenem charakteristické rovnice zkráceného systému (1,3), tedy $\pm\,\lambda_s$ (viz rovnice (1,5)).

Provedeme-li v systému (2,3) substituce (2,4) a (2,5), dostaneme pro funkce u_s a v_s tyto diferenciální rovnice

$$u_s' = (\lambda_s - \lambda)\, u_s + \varepsilon \left\{ -\, i\varkappa u_s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[Q_{sk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k}\, P_{sk}(u_k - v_k) \right] \right\},$$

$$v_s' = -\,(\lambda_s + \lambda)\, v_s + \varepsilon \left\{ -\, i\varkappa v_s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[Q_{sk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k}\, P_{sk}(u_k - v_k) \right] \right\}. \tag{2,6}$$

Hledejme nyní taková řešení u_s, v_s, která přísluší nestabilním vyšetřováním f_s a to pro ty hodnoty parametru ω, ležící v okolí hodnot ω_0, odpovídající rovnici (1,6).

Intervaly nestabilních řešení f_s si můžeme vymeziti nerovnostmi

$$\frac{\Omega_j \pm \Omega_k}{N} + \varepsilon\beta_1(\varepsilon) < \omega < \frac{\Omega_j \pm \Omega_k}{N} + \varepsilon\beta_2(\varepsilon)$$

$$(\Omega_j > \Omega_k,\ \beta_1 < \beta_2,\ N > 0 \text{ celé číslo})\,.$$

Označme ω^* hranici intervalu nestabilních řešení

$$\omega^* = \frac{\Omega_j \pm \Omega_k}{N} + \varepsilon\beta(\varepsilon)\,,$$

[3]) V našem případě je tento způsob psaní výhodnější pro praktický výpočet než tvar $\mu = \lambda + \varepsilon\varkappa(\varepsilon)$.

neboli

$$\lambda_j^* \pm \lambda_k^* = iN + \varepsilon i\alpha(\varepsilon) \quad (N \neq 0 \text{ celé číslo}) , \tag{2,7}$$

kde λ_j^*, λ_k^* jsou kořeny charakteristické rovnice, odpovídající hodnotě ω^*, a kde α je reálná funkce ε.

Dosadíme-li nyní za λ v rovnicích (2,6) jeden z kořenů charakteristické rovnice zkráceného systému, např. $+\lambda_j^*$, a hledáme-li interval nestability v okolí $\omega_0 = \dfrac{\Omega_r + \Omega_j}{N}$, dostaneme s použitím substituce (2,7) tento systém diferenciálních rovnic

$$u_j' = \varepsilon\left\{-i\varkappa u_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{jk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{jk}(u_k - v_j)\right]\right\},$$

$$v_r' = -iNv_r + \varepsilon\left\{-i\varkappa v_r - i\alpha v_r + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{rk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{rk}(u_k - v_k)\right]\right\},$$

$$u_s' = (\lambda_s^* - \lambda_j^*)\,u_s + \varepsilon\left\{-i\varkappa u_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{sk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{sk}(u_k - v_k)\right]\right\} \tag{2,8}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n;\; s \neq j) ,$$

$$v_s' = -(\lambda_s^* + \lambda_j^*)\,v_s + \varepsilon\left\{-i\varkappa v_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{sk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{sk}(u_k - v_k)\right]\right\}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n;\; s \neq r) .$$

Předpokládejme, že platí

$$\begin{aligned} \lambda_s - \lambda_j &\neq Mi \quad (s \neq j) , \\ \lambda_s + \lambda_j &\neq Mi \quad (s \neq r) , \end{aligned} \tag{2,9}$$

kde M je celé číslo.

Řešení systému (2,8) budeme hledat pomocí tzv. Šimanovova pomocného systému (viz [4]). K prvým dvěma rovnicím připojíme členy W_1 a $W_2 e^{-iN\tau}$, kde W_1 a W_2 jsou konstanty.

Dostaneme tak pomocný systém

$$u_j' = \varepsilon\left\{-i\varkappa u_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{jk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{jk}(u_k - v_k)\right]\right\} + W_1 ,$$

$$v_r' = -iNv_r + \varepsilon\{-i\varkappa v_r - i\alpha v_r + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{rk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{rk}(u_k - v_k)\right]\Bigg\} + W_2 e^{-iN\tau} ,$$

$$u_s' = (\lambda_s^* - \lambda_j^*)\,u_s + \varepsilon\left\{-i\varkappa u_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{sk}[u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*}P_{sk}(u_k - v_k)\right]\right\} \tag{2,10}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n;\; s \neq j) ,$$

$$v_s' = -(\lambda_s^* + \lambda_j^*)\, v_s + \varepsilon\left\{-i\varkappa v_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q_{sk}(u_k + v_k) + \frac{1}{\lambda_k^*} P_{sk}(u_k - v_k)\right]\right\}$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n;\ s \neq r)\,.$$

Pro $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ přejde systém (2,10) v systém (2,8). Řešení systému (2,10) budeme hledat ve tvaru

$$\begin{aligned} u_s &= u_{s0} + \varepsilon u_{s1} + \varepsilon^2 u_{s2} + \ldots\,, \\ v_s &= v_{s0} + \varepsilon v_{s1} + \varepsilon^2 v_{s2} + \ldots\,, \end{aligned} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n)\,. \tag{2,11}$$

Rovněž konstanty W_1 a W_2 vyjádřeme si ve tvaru

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{10} + \varepsilon W_{11} + \varepsilon^2 W_{12} + \ldots\,, \\ W_2 &= W_{20} + \varepsilon W_{21} + \varepsilon^2 W_{22} + \ldots\,. \end{aligned} \tag{2,12}$$

Volíme-li počáteční podmínky

$$u_j(0) = A\,, \quad v_r(0) = B\,, \tag{2,13}$$

pak ostatních $2(n - 1)$ počátečních hodnot budou na základě Šimanovovy věty (viz [4]) závislé na A a B.

V souhlase s počátečními podmínkami (2,13) pak můžeme volit počáteční podmínky

$$\begin{aligned} u_{j0}(0) &= A\,, & v_{r0}(0) &= B\,, \\ u_{jl}(0) &= 0\,, & v_{rl}(0) &= 0\,, \end{aligned} \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{2,14}$$

Dosadíme-li nyní za u_s, v_s a W_1, W_2 z rovnic (2,11) a (2,12) do pomocného systému (2,10), dostaneme pro prvou aproximaci rovnice

$$\begin{aligned} u_{j0}' &= W_{10}\,, \\ v_{r0}' &= -iNv_{r0} + W_{20}e^{-iN\tau}\,, \\ u_{s0}' &= (\lambda_s - \lambda_j)\, u_{s0} \quad (s \neq j)\,, \\ v_{s0}' &= -(\lambda_s + \lambda_j)\, v_{s0} \quad (s \neq r)\,. \end{aligned} \tag{2,15}$$

Z podmínky periodicity řešení obdržíme pro rovnice (2,15) tato řešení

$$\begin{aligned} u_{j0} &= A\,, \\ v_{r0} &= Be^{-iN\tau}\,, \\ u_{s0} &= 0 \quad (s \neq j)\,; \quad v_{s0} = 0 \quad (s \neq r)\,, \\ W_{10} &= 0\,, \quad W_{20} = 0\,. \end{aligned} \tag{2,16}$$

Pro druhou aproximaci pak dostaneme tento systém diferenciálních rovnic

$$u_{j1}' = -i\varkappa_0 A + \frac{1}{2}\left[\left(Q_{jj} + \frac{1}{\lambda_j} P_{jj}\right) A + \left(Q_{jr} - \frac{1}{\lambda_r} P_{jr}\right) Be^{-iN\tau}\right] + W_{11}\,,$$

$$v_{r1}' = -iNv_{r1} - i\varkappa_0 Be^{-iN\tau} - i\alpha_0 Be^{-iN\tau} + \frac{1}{2}\left[\left(Q_{rj} + \frac{1}{\lambda_j} P_{rj}\right) A + \right.$$
$$\left. + \left(Q_{rr} - \frac{1}{\lambda_r} P_{rr}\right) Be^{-iN\tau}\right] + W_{21}e^{-iN\tau}\,, \tag{2,17}$$

$$u'_{s1} = (\lambda_s - \lambda_j)\, u_{s1} + \frac{1}{2}\left[\left(Q_{sj} + \frac{1}{\lambda_j} P_{sj}\right) A + \left(Q_{sr} - \frac{1}{\lambda_r} P_{sr}\right) B e^{-iN\tau}\right] \quad (s \neq j)\,,$$

$$v'_{s1} = -\,(\lambda_s + \lambda_j)\, v_{s1} + \frac{1}{2}\left[\left(Q_{sj} + \frac{1}{\lambda_j} P_{sj}\right) A + \left(Q_{sr} - \frac{1}{\lambda_r} P_{sr}\right) B e^{-iN\tau}\right]$$

$$(s \neq r)\,, \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n)\,,$$

kde

$$\varkappa_0 = \varkappa(0)\,, \quad \alpha_0 = \alpha(0)\,.$$

Z podmínky periodicity řešení obdržíme pro W_{11} a W_{21} rovnice

$$\begin{aligned} W_{11} - i\varkappa_0 A + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(Q_{jj} + \frac{1}{\lambda_j} P_{jj}\right) A + \left(Q_{jr} - \frac{1}{\lambda_r} P_{jr}\right) B e^{-iN\tau}\right] \mathrm{d}\tau = 0\,, \\ W_{21} - i\varkappa_0 B - i\alpha_0 B + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(Q_{rj} + \frac{1}{\lambda_j} P_{rj}\right) A e^{iN\tau} + \left(Q_{rr} - \frac{1}{\lambda_r} P_{rr}\right) B\right] \mathrm{d}\tau = 0\,. \end{aligned} \tag{2,18}$$

Můžeme pak postupně určit libovolný počet aproximací a s libovolnou přesností určit konstanty W_1 a W_2.

Položíme-li $W_1 = 0$ a $W_2 = 0$ (pomocný systém (2,10)) je pak totožný se systémem (2,8)), dostaneme systém homogenních algebraických rovnic vzhledem k A a B.

Z předpokladu netriviálního řešení $((|A| + |B| \neq 0)$ vyplývá, že determinant této soustavy je roven nule. Obdržíme tak kvadratickou rovnici (obecně s komplexními koeficienty) pro koeficient $\varkappa$. Bude-li imaginární část alespoň jednoho $\varkappa$ záporná (reálná část $i\varkappa$ kladná), budou vyšetřovaná řešení f_s nestabilní. Pro hranici intervalu nestability bude $i\varkappa$ ryze imaginární. Z této podmínky pak stanovíme hodnotu α, která nám udává hranice intervalu nestability.

Dříve než přistoupíme k demonstraci metody na příkladu, proveďme ještě některá označení a obecné závěry, které vyplývají již z dosud uvedeného postupu.

Nazveme ty intervaly nestability, které leží v okolí hodnot ω, pro která platí

$$\omega_0 = \frac{2\Omega_s}{N} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n;\ N > 0 \text{ celé číslo})\,,$$

intervaly nestability prvého druhu a intervaly v okolí hodnot

$$\omega_0 = \frac{\Omega_j \pm \Omega_r}{N} \quad (j, r = 1, 2, 3, \ldots, n;\ \Omega_j > \Omega_r;\ N > 0 \text{ celé číslo})$$

intervaly nestability druhého druhu.

Intervaly nestability, odpovídající číslu N, nazveme *intervaly nestability N-tého řádu.*

Budeme mít tedy intervaly nestability prvého a druhého druhu N-tého řádu.

Tak např. kmitavé soustavy o jednom stupni volnosti, jejichž pohyb je popsán Hillovou diferenciální rovnicí, mají pouze intervaly nestability prvého druhu.

Za předpokladu dostatečně malého parametru ε a rychlé konvergence řad pro konstanty W_1 a W_2, bude míti na šíři intervalu nestability rozhodující vliv prvá aproximace (W_{11}, W_{21}; členy nultého indexu W_{10}, W_{20} jsou nulové), kdežto aproximace další upřesňují prvou aproximaci.

Za těchto předpokladů pak můžeme z rovnic (2,18) učinit tyto závěry:

1. V prvé aproximaci se uplatní při stanovení intervalů nestability prvého druhu pouze příslušné diagonální členy matic koeficientů (P_{jk}) a (Q_{jk}). Intervaly nestability prvého druhu příslušející kořenu λ_k budou určeny především členy P_{kk} a Q_{kk}.

2. Šíře intervalů nestability druhého druhu příslušející kombinaci kořenů λ_k a λ_j $(\lambda_k \pm \lambda_j)$ bude určena především koeficienty P_{kj}, Q_{kj} a P_{jk}, Q_{jk}.

3. Šíře intervalů nestability prvého a druhého druhu N-tého řádu bude určena především členy N-tého řádu Fourierových rozvojů příslušných koeficientů P a Q.

3. PŘÍKLAD

Mějme kmitavý systém o dvou stupních volnosti, jehož pohyb je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Omega_1^2 x &= \varepsilon(-2\delta_1\dot{x} + q_1 x \cos\omega t + q_2 y \cos \omega t)\,, \\ \ddot{y} + \Omega_2^2 y &= \varepsilon(-2\delta_2\dot{y} + Q_2 y \cos\omega t + Q_1 x \cos\omega t)\,, \end{aligned} \tag{3,1}$$

kde

$$\Omega_2 > \Omega_1 > 0;\ \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0;\ \ \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\ \text{není racionální číslo.}$$

Zavedeme-li substituci $\omega t = \tau$ a provedeme-li transformaci a úpravy podle postupu v předešlém odstavci, dostaneme tento systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} u_1' &= (\lambda_1 - \lambda)\, u_1 + \varepsilon(-i\varkappa u_1 + F_1)\,, \\ v_1' &= -(\lambda_1 + \lambda)\, v_1 + \varepsilon(-i\varkappa v_1 + F_1)\,, \\ u_2' &= (\lambda_2 - \lambda)\, u_2 + \varepsilon(-i\varkappa u_2 + F_2)\,, \\ v_2' &= -(\lambda_2 + \lambda)\, v_2 + \varepsilon(-i\varkappa v_2 + F_2)\,, \end{aligned} \tag{3,2}$$

kde

$$F_1 = -\frac{\delta_1}{\omega}(u_1 + v_1) + \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{q_1}{\lambda_1}(u_1 - v_1)\cos\tau + \frac{q_2}{\lambda_2}(u_2 - v_2)\cos\tau\right],$$

$$F_2 = -\frac{\delta_2}{\omega}(u_2 + v_2) + \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{Q_2}{\lambda_2}(u_2 - v_2)\cos\tau + \frac{Q_1}{\lambda_1}(u_1 - v_1)\cos\tau\right],$$

$$\lambda_1 = i\,\frac{\Omega_1}{\omega}\,, \quad \lambda_2 = i\,\frac{\Omega_2}{\omega}\,.$$

Budeme hledat intervaly nestability v okolí hodnot ω

$$\omega_0 = \frac{1}{N} 2\Omega_1 , \quad \omega_0 = \frac{1}{N} 2\Omega_2 \quad (N > 0 \text{ celé číslo}) \tag{3,3}$$

(intervaly nestability prvého druhu)
a v okolí

$$\omega_0 = \frac{1}{N} (\Omega_2 \pm \Omega_1) \quad (N > 0 \text{ celé číslo}) \tag{3,4}$$

(intervaly nestability druhého druhu).

Přistupme nejprve ke stanovení intervalů nestability prvého druhu. Prvé aproximace konstant W_{11} a W_{21} ($W_{10} = W_{20} = 0$) pro $N = 1$ budou

$$\begin{aligned} W_{11} &= i\varkappa_{10}A + \frac{\delta_1}{\omega_0} A + \frac{q_1}{4\omega_0^2\lambda_1} B , \\ W_{21} &= i\varkappa_{10}B + i\alpha_{10}B + \frac{\delta_1}{\omega_0} B - \frac{q_1}{4\omega_0^2\lambda_1} A \end{aligned} \tag{3,5}$$

a

$$\begin{aligned} W_{11} &= i\varkappa_{10}A + \frac{\delta_2}{\omega_0} A + \frac{Q_2}{4\omega_0^2\lambda_2} B , \\ W_{21} &= i\varkappa_{20}B + i\alpha_{20}B + \frac{\delta_2}{\omega_0} B - \frac{Q_2}{4\omega_0^2\lambda_2} A . \end{aligned} \tag{3,6}$$

Spokojíme-li se s prvým přiblížením, tj. položíme-li

$$W_1 \doteq \varepsilon W_{11} = 0 , \quad W_2 \doteq \varepsilon W_{21} = 0 ,$$

pak pro $\varkappa_{10}$ a $\varkappa_{20}$ obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} \varkappa_{10}^2 + \left(\alpha_{10} - i\frac{2\delta_1}{\omega_0}\right)\varkappa_{10} + \frac{q_1^2}{16\omega_0^2\Omega_1^2} - \frac{\delta_1^2}{\omega_0^2} - i\alpha_{10}\frac{\delta_1}{\omega_0} = 0 , \\ \varkappa_{20}^2 + \left(\alpha_{20} - i\frac{2\delta_2}{\omega_0}\right)\varkappa_{20} + \frac{Q_2^2}{16\omega_0^2\Omega_2^2} - \frac{\delta_2^2}{\omega_0^2} - i\alpha_{20}\frac{\delta_2}{\omega_0} = 0 . \end{aligned} \tag{3,7}$$

Použitím Routh-Hurwitzova kritéria pro rovnice s komplexními koeficienty (viz např. [5]), dostaneme tyto podmínky pro nestabilitu řešení, tj. pro to, aby imaginární části alespoň jednoho $\varkappa_{10}$ a alespoň jednoho $\varkappa_{20}$ byly záporné

$$\begin{aligned} \alpha_{10}^2 + 4\frac{\delta_1^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4}\frac{q_1^2}{\omega_0^2\Omega_1^2} < 0 , \\ \alpha_{20}^2 + 4\frac{\delta_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4}\frac{Q_2^2}{\omega_0^2\Omega_2^2} < 0 . \end{aligned} \tag{3,8}$$

Pro

$$\begin{aligned} 4\frac{\delta_1^2}{\omega_0^2} \geqq \frac{1}{4}\frac{q_1^2}{\omega_0^2\Omega_1^2} , \\ 4\frac{\delta_2^2}{\omega_0^2} \geqq \frac{1}{4}\frac{Q_2^2}{\omega_0^2\Omega_2^2} \end{aligned} \tag{3,9}$$

nebudou nerovnosti (3,8) nikdy splněny, tj. intervaly nestability prvého druhu vymizí.

Nejsou-li splněny nerovnosti (3,9), pak pro hranice intervalů nestability prvého druhu dostaneme

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{10})_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{q_1^2}{\omega_0^2\Omega_1^2} - 4\frac{\delta_1^2}{\omega_0^2}}\,, \\
(\alpha_{20})_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{Q_2^2}{\omega_0^2\Omega_2^2} - 4\frac{\delta_2^2}{\omega_0^2}}\,.
\end{aligned} \tag{3,10}
$$

Použijeme-li nyní rovnice (2,7), pak obdržíme tyto přibližné intervaly ω, vymezující intervaly nestability prvého druhu, prvého řádu ($N = 1$)

$$
\begin{aligned}
2\Omega_1 - \varepsilon \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{q_1}{\Omega_1}\right)^2 - (2\delta_1)^2} < \omega < 2\Omega_1 + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{q_1}{\Omega_1}\right)^2 - (2\delta_1)^2}\,, \\
2\Omega_2 - \varepsilon \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)^2 - (2\delta_2)^2} < \omega < 2\Omega_2 + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)^2 - (2\delta_2)^2}\,.
\end{aligned} \tag{3,11}
$$

Intervaly vyšších řádů ($N = 2, 3, \ldots$) by byly v prvém přiblížení nulové. Je tomu tak proto, že funkce F_1 a F_2 v rovnicích (3,2) obsahují pouze prvé harmonické složky.

Obrátíme se nyní k určení hranic intervalů nestability druhého druhu.

Pro kombinaci kořenů $\lambda_1 + \lambda_2$ a pro $N = 1$ dostaneme pro $\varkappa_0$ rovnici

$$
\varkappa_0^2 + \left(\alpha_0 - i\,\frac{\delta_1 + \delta_2}{\omega_0}\right)\varkappa_0 + \frac{q_2 Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2} - \frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2} - i\alpha_0\frac{\delta_1}{\omega_0} = 0\,. \tag{3,12}
$$

Podmínkou nestability řešení, tj. aby imaginární část alespoň jednoho $\varkappa_0$ byla záporná, je splnění nerovností

$$
\alpha_0^2 + \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_1\delta_2}\left(\frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2} - \frac{q_2 Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2}\right) < 0\,. \tag{3,13}
$$

Jsou-li koeficienty q_2 a Q_1 rozdílného znaménka, ($Q_1 q_2 < 0$), pak nerovnost (3,13) není nikdy splněna a neobdržíme reálné hodnoty pro hranice intervalu nestability druhého druhu. Dále nerovnost (3,13) není splněna, pokud platí

$$
\frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2} \geqq \frac{q_2 Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2} > 0\,. \tag{3,14}
$$

Je-li nerovnost (3,13) splněna, pak pro hranice intervalu nestability dostaneme

$$
(\alpha_0)_{1,2} = \pm\,\frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \sqrt{\frac{q_2 Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2} - \frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2}}\,. \tag{3,15}
$$

Interval nestability pak bude

$$\Omega_1 + \Omega_2 - \varepsilon \frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \sqrt{\frac{q_2Q_1}{16\Omega_1\Omega_2} - \delta_1\delta_2} <$$

$$< \omega < \Omega_1 + \Omega_2 + \varepsilon \frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \sqrt{\frac{q_2Q_1}{16\Omega_1\Omega_2} - \delta_1\delta_2}\,. \tag{3,16}$$

Pro kombinaci $\lambda_1 - \lambda_2$ dostaneme pro $\varkappa_0$ rovnici

$$\varkappa_0^2 + \left(\alpha_0 - i\,\frac{\delta_1 + \delta_2}{\omega_0}\right)\varkappa_0 - \frac{q_2Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2} - \frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2} - i\alpha_0\,\frac{\delta_1}{\omega_0} = 0\,. \tag{3,17}$$

Podmínkou existence intervalu nestability je splnění nerovnosti

$$\alpha_0^2 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1\delta_2}\left(\frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2} + \frac{q_2Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2}\right) < 0\,. \tag{3,18}$$

Vidíme, že interval nestability bude existovati pouze v tom případě, pokud budou koeficienty q_2 a Q_1 rozdílného znaménka a pokud nebude platit

$$\frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2} \geqq -\frac{q_2Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2} > 0\,. \tag{3,19}$$

Není-li splněna podmínka (3,19), pak pro hranice intervalu nestability dostaneme

$$(\alpha_0)_{1,2} = \pm\frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \sqrt{-\frac{q_2Q_1}{16\omega_0^2\Omega_1\Omega_2} - \frac{\delta_1\delta_2}{\omega_0^2}}\,. \tag{3,20}$$

Interval nestability pak bude

$$\Omega_2 - \Omega_1 - \varepsilon \frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \sqrt{-\frac{q_2Q_1}{16\Omega_1\Omega_2} - \delta_1\delta_2} <$$

$$< \omega < \Omega_2 - \Omega_1 + \varepsilon \frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \sqrt{-\frac{q_2Q_1}{16\Omega_1\Omega_2} - \delta_1\delta_2}\,. \tag{3,21}$$

Stejně jako u intervalů nestability prvého druhu obdrželi jsme v prvé aproximaci pouze intervaly prvého řádu ($N = 1$).

Dalším zajímavým výsledkem je, že pro uvedenou soustavu bude z obou intervalů nestability druhého druhu přicházeti v úvahu pouze jediný a to podle toho, je-li $q_2Q_1 > 0$ (viz (3,16)) nebo $q_2Q_1 < 0$ (viz (3,21)).

Podmínka

$$\delta_1\delta_2 \geqq \frac{|q_2Q_1|}{16\Omega_1\Omega_2} \tag{3,22}$$

je postačující podmínkou pro neexistenci intervalů nestability druhého druhu uvedeného příkladu.

Literatura

[1] *И. Г. Малкин:* Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.

[2] *В. А. Якубович:* Замечание к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика, 1957, № 5, стр. 707—713.

[3] *М. Г. Крейн:* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Памяти А. А. Андронова, Изд. АН СССР, 1955, стр. 413—498.

[4] *С. Н. Шиманов:* К теории квазигармонических колебаний. Прикладная математика и механика, 1952, № 2, стр. 129—146.

[5] *Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман:* Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды математического института им. В. А. Стеклова, XXVI, Изд. АН СССР, 1949.

Резюме

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ (ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ) СИСТЕМ

АЛЕШ ТОНДЛЬ (Aleš Tondl)

(Поступило в редакцию 18/VIII 1958 г.)

В статье приводится метод определения областей неустойчивости квазигармонических (параметрических) систем, движение которых можно описать дифференциальным уравнениями вида

$$\ddot{y}_s + \sum_{k=1}^{n} a_{sk} y_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (q_{sk} \dot{y}_k + p_{sk} y_k) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n) ,$$

где a_{sk} — постоянные и $q_{sk} = q_{sk}(t)$, $p_{sk} = p_{sk}(t)$ — непрерывные периодические функции времени с периодом $2\pi/\omega$, которые можно разложить в ряды Фурье, и где ε — малый параметр.

Исследовались интервалы неустойчивых решений для ω, лежащих в окрестности значений

$$\omega_0 = \frac{|\Omega_k \pm \Omega_j|}{N} \quad (k, j = 1, 2, 3, \ldots, n;\ N > 0 \text{ — целое число}),$$

где Ω_k, Ω_j — собственные частоты системы для $\varepsilon = 0$.

Résumé

MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DES ZONES LABILES DANS LES SYSTÈMES QUASI-HARMONIQUES

ALEŠ TONDL

(Reçu le 18 août 1958.)

Dans son article, l'auteur fait l'exposé d'une méthode pour la détermination des zones labiles des systèmes quasi-harmoniques dont le mouvement peut être décrit par des équations différentielles de la forme

$$\ddot{y}_s + \sum_{k=1}^{n} a_{sk} y_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (q_{sk} \dot{y}_k + p_{sk} y_k) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n) ,$$

où a_{sk} sont des constantes et $q_{sk} = q_{sk}(t)$, $p_{sk} = p_{sk}(t)$ sont des fonctions périodiques continues du temps avec la période $2\pi/\omega$, et que l'on peut développer en séries de Fourier, ε est un petit paramétre.

Ensuite, on examine les intervalles des résolutions instables pour des ω qui se trouvent a proximité des valeurs

$$\omega_0 = \frac{(\Omega_k \pm \Omega_j)}{N} \; (k, j = 1, 2, 3, \ldots, n \; ; \quad N > 0 \text{ entier}) ,$$

où Ω_k, Ω_j sont les fréquences propres du système pour $\varepsilon = 0$.