Aplikace matematiky

Jaromír Vurcfeld

Nomogram pro řešení rovnic čtvrtého stupně

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 3, 223–232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102618

NOMOGRAM PRO ŘEŠENÍ ROVNIC ČTVRTÉHO STUPNĚ

JAROMÍR VURCFELD

(Došlo dne 19. dubna 1957.) DT: 612.393:518.3

V článku je navrženo řešení reálných kořenů obecné rovnice čtvrtého stupně pomocí upraveného průsečíkového nomogramu pro řešení rovnic stupně druhého. Jsou zde uvedena některá kriteria imaginarity a reality kořenů a je proveden číselný příklad.

Známý průsečíkový nomogram o trojnásobné soustavě přímek pro řešení rovnic druhého stupně můžeme jednoduchým způsobem upraviti na nomogram pro řešení rovnic stupně čtvrtého.

Obecnou rovnici čtvrtého stupně

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,$$

upravenou na tvar

$$x^2 + ax + \left(\frac{d}{x^2} + \frac{c}{x} + b\right) = 0$$

rozložíme zavedením parametru

$$z = \frac{d}{x^2} + \frac{c}{x} + b$$

na dva dílčí vztahy

$$x^2 + ax + z = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{-x}\right)^2 + \left(\frac{1}{-x}\right) \cdot \frac{-c}{d} + \frac{b-z}{d} = 0\,. \tag{2}$$

Průsečíkový nomogram vztahu (1) sestrojíme podle zobrazovacích rovnic

$$\xi = a\,, \quad \eta = z\,, \quad \xi x + \eta + x^2 = 0\,.$$

Nomogram vztahu (2) má zobrazovací rovnice

$$\xi = -\frac{c}{d}\,, \quad \eta = \frac{b-z}{d}\,, \quad \xi\left(\frac{1}{-x}\right) + \eta + \left(\frac{1}{-x}\right)^2 = 0\,.$$

Z tohoto nomogramu nakreslíme pouze isoplety x, které, položíme-li $y = -\dfrac{1}{x}$, jsou totožné s isopletami prvního nomogramu (neboť mají zobrazovací rovnici $\xi y + \eta + y^2 = 0$).

Pro určité x je isopleta prvního nomogramu kolmá na isopletu druhého nomogramu s kotou $y = -\frac{1}{x}$.

V prvém nomogramu isoplety o hledaných hodnotách x procházejí body nomogramu o souřadnicích $\xi_1 = a$, $\eta_1 = z$, zatím co isoplety $-\frac{1}{x}$ procházejí body o souřadnicích $\xi_2 = -\frac{c}{d}$, $\eta_2 = \frac{b-z}{d}$.

Spojnice těchto korespondujících bodů mají rovnice

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} (\xi - \xi_1) .$$

Lze snadno dokázati, že této rovnici vyhovují hodnoty

$$\xi = \xi_P = \frac{a-c}{d+1}, \quad \eta = \eta_P = \frac{b}{d+1}$$

nezávislé na argumentu z, tj., že výše uvedené spojnice bodů o souřadnicích (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) procházejí všechny bodem P o souřadnicích (ξ_P, η_P).

Body (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) leží na základních přímkách $\xi_1 = a$ resp. $\xi_2 = -\frac{c}{d}$, jejichž polohu určíme z koeficientů dané rovnice.

Hledané isoplety x, resp. $-\frac{1}{x}$ určujeme z nomogramu takto:

Daným bodem $P\left(\xi_P = \frac{a-c}{d+1}, \ \eta_P = \frac{b}{d+1}\right)$ vedeme takové přímky, které protnou základní přímky $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ v bodech, jimiž procházejí vzájemně kolmé isoplety x, $-\frac{1}{x}$.

Všechny isoplety x, které této podmínce vyhovují, jsou reálnými kořeny rovnice čtvrtého stupně.

Máme-li tudíž zobrazenu soustavu přímkových isoplet, známého nomogramu pro řešení rovnic druhého stupně v aritmetické posloupnosti a soustavu příslušných isoplet k nim kolmých, tj. isoplet o hodnotách

$$x = \pm 0 , \quad \pm 1 , \quad \pm 2 , \quad \pm 3 \text{ atd.},$$

$$-\frac{1}{x} = \mp \infty , \quad \mp 1 , \quad \mp \tfrac{1}{2} , \quad \mp \tfrac{1}{3} \text{ atd.},$$

je snadné interpolací nalézti mezi nimi takové dvojice kolmých isoplet, jejichž průsečíky s přímkami $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ mají tu vlastnost, že jejich spojnice prochází bodem P o souřadnicích $\left(\xi_P = \frac{a-c}{d+1}, \eta_P = \frac{b}{d+1}\right)$.

K snadnému vyhledání výsledných dvojic kolmých isoplet přispívá skutečnost, že vzájemně kolmé isoplety se protínají na přímce o rovnici $\eta = -1$, která je řídící přímkou obalové paraboly obou vzájemně kolmých soustav isoplet o rovnici $\xi^2 = 4\eta$.

Provedeme-li rozbor popsaného řešení rovnic čtvrtého stupně se zřetelem na proměnu absolutního členu d, zjistíme, že, dosáhne-li člen d hodnoty $d = 0$, přechází rovnice čtvrtého stupně na rovnici stupně třetího

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Základní přímka $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ bude mít potom rovnici $\xi = -\frac{c}{0} = -\infty$, tj. vzdálí se do nekonečna a základní bod P bude mít souřadnice $\xi_P = a - c$, $\eta_P = b$.

Nomogram rovnic čtvrtého stupně přejde tím na známý dotykový nomogram Massau-ův, řešící obecnou rovnici stupně třetího. Dosáhne-li konečně i člen c původní rovnice čtvrtého stupně hodnoty $c = 0$, přejde rovnice čtvrtého stupně na rovnici druhého stupně $x^2 + ax + b = 0$ a základní přímka $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ bude míti hodnotu $\xi = -\frac{0}{0}$, tj. libovolnou polohu a základní přímka $\xi_1 = a$ bude procházeti bodem P o souřadnicích $\xi_P = a$, $\eta_P = b$.

Nomogram rovnic čtvrtého stupně přejde tím na známý průsečíkový nomogram pro řešení rovnic stupně druhého.

Sledujme další závislosti poloh obou základních přímek a bodu P na hodnotách koeficientů rovnice čtvrtého stupně.

Při $d = -1$ obdržíme

pro základní přímky:

$$\xi_1 = a\,, \quad \xi_2 = -\frac{c}{d} = +c\,,$$

pro základní bod P:

$$\xi_P = \frac{a-c}{0} = \infty\,, \quad \eta_P = \frac{b}{0} = \infty\,,$$

tj. bod P je v nekonečnu a obě základní přímky jsou v konečnu. V tomto případě známe směr spojnice korespondujících bodů na základních přímkách ξ_1, ξ_2, tj. $\frac{\eta_P}{\xi_P} = \frac{b}{a-c}$, což umožňuje normální postup vyhledání kořenů x, $-\frac{1}{x}$.

Při dalším rozboru rovnice čtvrtého stupně uvažme případ $a = -\frac{c}{d}$.

Zde platí současně vždy

$$\xi_P = \frac{a - c}{d + 1} = -\frac{c}{d} = a\,,$$

tj. splynou-li obě základní přímky v jedinou, leží na nich též vždy i bod P.

Vyhledání kořenů x, $-\frac{1}{x}$ provede se zde na základě skutečnosti, že poměr vzdálenosti korespondujících bodů isoplet x a $-\frac{1}{x}$ od bodu P je známý a rovná se vždy $\frac{d}{1}$, což se dá snadno dokázati.

Platí zde totiž obecně, že

$$\frac{a - c}{d + 1} - \frac{-c}{d} : a - \frac{a - c}{d + 1} = d : 1\,.$$

Zvláštním případem této skupiny jsou rovnice bikvadratické, kde $a = c = 0$, jejichž řešení je stejné, jako v předchozím případě, s tím rozdílem pouze, že základní přímka $\xi_1 = a$ splývá s osou η.

Navrženého nomogramu pro řešení rovnic čtvrtého stupně je možno též použíti ke zjištění některých kriterií pro posouzení imaginarity nebo reality kořenů.

K tomu účelu vyhledejme nejprve kriterium dvou dvojnásobných kořenů. Ze vztahů mezi kořeny a koeficienty rovnice čtvrtého stupně se dvěma dvojnásobnými kořeny

$$a = -2(x_1 + x_2)\,, \qquad c = -2(x_1 + x_2)\, x_1 x_2\,,$$
$$b = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2\,, \qquad d = x_1^2 x_2^2\,,$$

plyne poloha základních přímek

$$\xi_1 = a = -2(x_1 + x_2)\,, \qquad \xi_2 = -\frac{c}{d} = 2\,\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

a základního bodu P

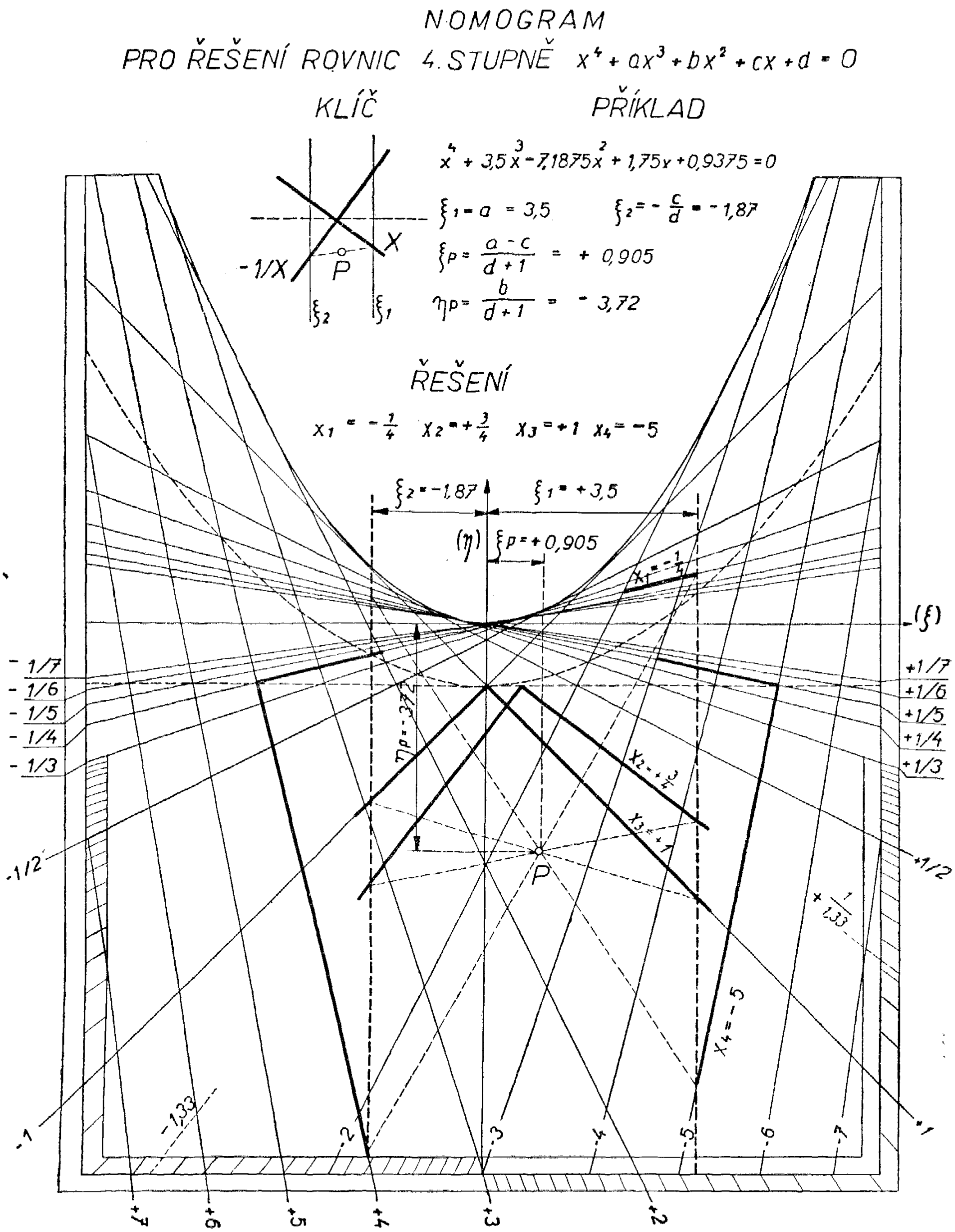
$$\xi_P = \frac{a - c}{d + 1} = 2\,\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2 + 1}\,(x_1 x_2 - 1)\,,$$

$$\eta_P = \frac{b}{d + 1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2 + 1}$$

a vztahy základního bodu a základních přímek

$$\xi_P = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\,(\xi_1 + \xi_2)\,, \qquad \eta_P = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left(\frac{\xi_1 \xi_2}{4} - 2\right).$$

Z těchto vztahů, vyloučením jedné proměnné ξ_1 nebo ξ_2 lze odvoditi, že při změně poloh obou základních přímek ξ_1, ξ_2 jest geometrickým místem korespondujícího bodu P o souřadnicích ξP, ηP soustava elips, konfokálních se základní parabolou isoplet o rovnici



NOMOGRAM
PRO ŘEŠENÍ ROVNIC 4. STUPNĚ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
KLÍČ
PŘÍKLAD
$x^4 + 3{,}5x^3 - 7{,}1875x^2 + 1{,}75x + 0{,}9375 = 0$
$\xi_1 = a = 3{,}5$
$\xi_2 = -\frac{c}{d} = -1{,}87$
$\xi_P = \frac{a-c}{d+1} = +0{,}905$
$\eta_P = \frac{b}{d+1} = -3{,}72$
X
-1/X
P
ξ_2
ξ_1
ŘEŠENÍ
$x_1 = -\frac{1}{4}$ $x_2 = +\frac{3}{4}$ $x_3 = +1$ $x_4 = -5$
$\xi_2 = -1{,}87$
$\xi_1 = +3{,}5$
(η)
$\xi_P = +0{,}905$
$\eta_P = -3{,}72$
$x_1 = -\frac{1}{4}$
(ξ)
$x_2 = +\frac{3}{4}$
$x_3 = +1$
$x_4 = -5$
P
-1/7
-1/6
-1/5
-1/4
-1/3
-1/2
+1/7
+1/6
+1/5
+1/4
+1/3
+1/2
$+\frac{1}{1{,}33}$
-1
-1,33
-2
-3
-4
-5
-6
-7
+1
+7
+6
+5
+4
+3
+2

$$\xi^2(\xi_1^4 + 64) + \eta^2\, 32\xi_1^2 + \xi\eta(-8\xi_1^3 + 64\xi_1) - \xi(8\xi_1^3 + 64\xi_1) -$$
$$- \eta(32\xi_1^2 + 4\xi_1^4) = 0\,.$$

Při tom každé hodnotě ξ_1 nebo ξ_2 přísluší jediná elipsa, bodu P pak jejich průsečík. Průsečíky těchto elips jsou vždy dva reálné a dva imaginárné. Jeden z reálných průsečíků jest vrchol základní paraboly, druhý, reálný, určující bod P pro dva dvojnásobné kořeny rovnice čtvrtého stupně, leží vždy mezi přímkami ξ_1, ξ_2.

Hledejme další ohraničení oblasti dvou dvojnásobných kořenů zjištěním obalové čáry uvedené soustavy elips.

Tuto obalovou čáru můžeme určiti jako geometrické místo průsečíků elips nekonečně blízkých.

Položme proto $\xi_1 = \xi_2$ a obdržíme

$$\xi_P = \xi_1\,, \quad \eta_P = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^2}{4} - 2\right)$$

a rovnici obalové čáry konfokálních elips

$$\xi_P^2 = 8(\eta_P + 1)\,.$$

Tato parabola druhého stupně, která je rovněž konfokální s obalovou čarou isoplet x, $-\dfrac{1}{x}$ nomogramu, o rovnici $\xi^2 = 4\eta$, jest tudíž hranicí všech bodů P, určujících dva dvojnásobné kořeny rovnic 4. stupně.

K určení kriterií imaginarity uvažme, že dva dvojnásobné kořeny jsou krajním případem dvou dvojic kořenů komplexně sdružených

$$x_1 = \alpha + \beta i\,, \quad x_2 = \alpha - \beta i\,, \quad x_3 = \gamma + \delta i\,, \quad x_4 = \gamma - \delta i$$

pro

$$\beta = 0\,, \quad \delta = 0\,,$$

tj. představují přechod ze čtyř kořenů imaginárných na čtyři kořeny reálné.

Proto též obalová čára všech bodů P, určujících dva dvojnásobné kořeny 4. stupně je hranicí čtyř kořenů imaginárných a čtyř kořenů reálných.

Plocha uvnitř paraboly $\xi^2 = 8(\eta + 1)$, omezená přímkami ξ_1, ξ_2, určuje tudíž kromě oblasti dvou kořenů dvojnásobných, též jedinou možnou oblast výskytu všech čtyř kořenů imaginárných.

Toto kriterium neplatí sice též ve smyslu opačném, tj., že všechny body P uvnitř výše uvedené plochy by určovaly pouze kořeny imaginárné, může však ve většině případů poskytnouti rychlou informaci, zda všechny kořeny nejsou imaginárné.

Pro objasnění postupu řešení reálných kořenů byl proveden v nomogramu (obr. 1) číselný příklad

$$x^4 + 3{,}5x^3 - 7{,}1875x^2 + 1{,}75x + 0{,}9375 = 0\,.$$

Zjistíme polohu základních přímek,

$$\xi_1 = a = +3{,}5\,,$$

$$\xi_2 = -\frac{c}{d} = -\frac{1{,}75}{0{,}9375} = -1{,}87$$

a základního bodu P

$$\xi_P = \frac{a-c}{d+1} = \frac{3{,}5 - 1{,}75}{0{,}9375 + 1} = +0{,}905\,,$$

$$\eta_P = \frac{b}{d+1} = \frac{-7{,}1875}{0{,}9375 + 1} = -3{,}72\,.$$

Rovnice má čtyři reálné kořeny

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}\,, \quad x_2 = +\tfrac{3}{4}\,, \quad x_3 = +1\,, \quad x_4 = -5\,,$$

jejichž isoplety jsou v nomogramu vyznačeny silnou čarou.

LITERATURA

[1] *V. Hruška:* Počet grafický a graficko-mechanický, Praha 1952.
[2] *V. Pleskot:* Nomografie a grafický počet v technické praxi, Praha 1956.

Резюме

НОМОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

ЯРОМИР ВУРЦФЕЛЬД (Jaromír Vurcfeld)

(Поступило в редакцию 19/IV 1957 г.)

Общее уравнение четвертого порядка $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ разложим при помощи вспомогательного параметра $z = b + \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2}$ на два уравнения второй степени:

$$x^2 + ax + z = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \left(-\frac{c}{d}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{b-z}{d} = 0\,. \tag{2}$$

Эти уравнения могут быть графически представлены двумя номограммами, составленными из пересекающихся прямых, заключающих три системы прямолинейных изоплет, причем одна из этих номограмм заключает изоплеты x, а вторая — изоплеты $-\dfrac{1}{x}$.

Соединив обе номограммы в одну с общими координатными осями ξ, η, получим искомую номограмму для решения уравнений четвертой степени.

Изоплеты обеих первоначально построенных номограмм, означенные отметками искомых величин x, взаимно перпендикулярны и служат оболочкой одной и той же параболы второго порядка $\xi^2 = 4\eta$.

Изоплеты x системы, представляющей уравнение второй степени (1), проходят через точки с координатами:

$$\xi_1 = a\,, \quad \eta_1 = z\,.$$

Изоплеты $-\frac{1}{x}$ системы, представляющей уравнение второй степени (2), проходят через точки с координатами:

$$\xi_2 = -\frac{c}{d}\,, \qquad \eta_2 = \frac{b-z}{d}\,.$$

Для обеих этих точек известны отрезки a и $-\frac{c}{d}$.

Можно доказать, что прямая, соединяющая эти точки, всегда проходит через точку P с координатами $\xi_P = \frac{a-c}{d+1}$, $\eta_P = \frac{b}{d+1}$. На последнем обстоятельстве основано решение уравнений четвертой степени.

По коэффициентам данного уравнения непосредственно построим прямые $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ и точку P, а затем найдем те взаимно перпендикулярные изоплеты x, $-\frac{1}{x}$, которые пересекаются с прямыми $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ в таких точках, что прямые, соединяющие их, проходят через известную точку P.

Численные отметки найденных таким образом изоплет x определяют искомые действительные корни уравнения четвертой степени.

Номограммой можно также воспользоваться как удобным критерием для установления, не являются ли все корни уравнения четвертой степени мнимыми, т. е. не имеет ли данное уравнение две пары комплексно сопряженных корней.

Можно доказать, что в случае уравнения, все корни которого являются мнимыми числами, точка P всегда лежит внутри области, ограниченной прямыми $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ и параболой $\xi^2 = 8(\eta + 1)$.

Эта парабола, имеющая общий фокус с параболой, оболочкой которой служат изоплеты x и $-\frac{1}{x}$, зарисована в номограмме черточками.

Однако приведенный признак можно в общем использовать только в отрицательном смысле.

В качестве примера на применение номограммы в ней отмечено решение уравнения $x^4 + 3{,}5x^3 - 7{,}1875x^2 + 1{,}75x + 0{,}9375 = 0$, все корни которого — действительные числа:

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}\,, \quad x_2 = +\tfrac{3}{4}\,, \quad x_3 = +1\,, \quad x_4 = -5\,.$$

Zusammenfassung

EIN NOMOGRAMM FÜR DIE LÖSUNG VON GLEICHUNGEN VIERTEN GRADES

JAROMÍR VURCFELD

(Eingegangen am 19. April 1957.)

Die allgemeine Gleichung vierten Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zerlegen wir durch die Einführung eines Hilfsparameters $z = b + \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2}$ in zwei Gleichungen zweiten Grades:

$$x^2 + ax + z = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \left(-\frac{c}{d}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{b-z}{d} = 0\,. \tag{2}$$

Diese Gleichungen stellen wir durch zwei Schnittpunktsnomogramme dreier gerader Nomogrammleiter dar, wobei ein Nomogramm die x-Isoplethen und das zweite die $-\dfrac{1}{x}$-Isoplethen darstellt.

Fassen wir beide Nomogramme in ein einziges mit gemeinsamen Koordinatenachsen ξ, η, so erhalten wir das gesuchte Nomogramm für die Lösung der Gleichungen vierten Grades.

Die Isoplethen beider ursprünglicher Nomogramme, kotiert mit den gesuchten Werten x, stehen aufeinander senkrecht und umhüllen dieselbe Parabel zweiten Grades von der Gleichung $\xi^2 = 4\eta$.

Die Isoplethen des x-Systems, welche die erste Gleichung zweiten Grades (1) darstellen, gehen durch die Punkte mit den Koordinaten

$$\xi_1 = a\,, \quad \eta_1 = z\,.$$

Die Isoplethen des $-\dfrac{1}{x}$-Systems, welche die zweite Gleichung zweiten Grades (2) darstellen, gehen durch die Punkte

$$\xi_2 = \frac{c}{d}\,, \quad \eta_2 = \frac{b-z}{d}\,.$$

Für diese beiden Punkte sind die Achsenabschnitte $a, -\frac{c}{d}$ bekannt.

Es lässt sich beweisen, dass die Verbindungslinie dieser Punkte immer durch den Punkt P geht, der die Achsenkoordinaten

$$\xi_P = \frac{a - c}{d + 1}, \quad \eta_P = \frac{b}{d + 1} \text{ hat.}$$

Die Lösung der Gleichungen vierten Grades liegt diesen Tatsache zugrunde.

Aus den Koeffizienten dieser Gleichung finden wir direkt die Lage der Geraden $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ und des Punktes P und suchen solche aufeinander senkrecht stehende $x, -\frac{1}{x}$-Isoplethen aus, welche an der Geraden $\xi_1 = a$, $\xi_2 = -\frac{c}{d}$ solche Punkte bestimmen, deren Verbindungslinie durch den bekannten Punkt P geht.

Die Koten der so gefundenen x-Isoplethen bestimmen die gesuchten reellen Wurzeln der Gleichung vierten Grades.

Das Nomogramm lässt sich auch als rasches Kriterium für die Feststellung benützen, ob nicht alle Wurzeln der Gleichung imaginär, sind d. h. ob die Gleichung nicht zwei Paare konjugierter komplexer Wurzeln hat.

Es lässt sich beweisen, dass bei Gleichungen, deren sämtliche Wurzeln komplex sind, der Punkt P immer innerhalb der Fläche liegt, die durch die Geraden $\xi_1 = a$, $\xi_2 = \frac{c}{d}$ und die Parabel $\xi^2 = 8(\eta + 1)$ begrenzt wird.

Diese Parabel, welche mit der Umhüllungsparabel der $x, -\frac{1}{x}$-Isoplethen konfokal ist, ist im Nomogramm gestrichelt dargestellt.

Das angegebene Kriterium kann man allgemein nur im negativen Sinne anwenden.

Als Beispiel für die Anwendung des Nomogramms ist in ihm die Lösung der Gleichung $x^4 + 3{,}5x^3 - 7{,}1875x^2 + 1{,}75x + 0{,}9375 = 0$ eingezeichnet, deren sämtliche Wurzeln reell sind:

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}, \quad x_2 = +\tfrac{3}{4}, \quad x_3 = +1, \quad x_4 = -5.$$