

Aplikace matematiky

Arnošt Kessler

Oteplování desek a tyčí konečné délky s vnitřním vývinem tepla, při jednorozměrném řešení proudění tepla

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 3, 190–222

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102617>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

OTEPLOVÁNÍ DESEK A TYČÍ KONEČNÉ DÉLKY S VNITŘNÍM VÝVINEM TEPLA, PŘI JEDNOROZMĚRNÉM ŘEŠENÍ PROUDĚNÍ TEPLA

ARNOŠT KESSLER

(Došlo dne 25. května 1956.)

DT: 536.21

V práci jsou řešeny některé symetrické úlohy neustáleného jedno-rozměrného vedení tepla v deskách (tyčích) konečné délky s vnitřním vývinem tepla a to pro tři druhy okrajových podmínek a nulovou počáteční teplotu. Vývin tepla se předpokládá konstantní nebo lineárně závislý na teplotě. V závěru práce je problém rozřešen pro dvojici navzájem hraničících desek s ideálním dotykem.

1. Úvod

Řadu problémů vedení tepla [1], [2], [3] zejména v elektrotechnice [4] a při vysokofrekvenčním ohřevu, lze redukovat na oteplování desek v jednom směru konečně dlouhých a tyčí konečné délky, s vnitřním vývinem tepla. Jsou to případy, kdy jsou všechny tepelné spády, mimo spádu ve směru konečné délky, vzhledem k rozměrům, tepelným vodivostem a chlazení, zanedbatelné. Matematicky jsou tyto úkoly formulovány nehomogenními lineárními parciálními diferenciálními rovnicemi druhého řádu s konstantními koeficienty. V této práci budeme řešit dva typy těchto rovnic, při různých okrajových podmínkách pomocí Laplaceovy transformace [1], [3], [5]. Jak ukážeme, dovoluje tento postup nalézt přímo řešení, které vyhovuje zadaným počátečním a okrajovým podmínkám.

2. Odvození parciální diferenciální rovnice pro jednorozměrné proudění tepla s vnitřním vývinem tepla

Mějme tyč nebo desku (obr. 1) stálého průřezu P [cm²], v níž se po celé délce vyvíjí rovnoměrně teplo. Toto teplo se odvádí jednak podélným směrem x , jednak přímo z povrchu tyče. Tepelné spády v průřezu tyče zanedbáváme a proto stačí sledovat proudění tepla ve směru podélném, t. j. ve směru osy x .

Pro elementární délkový úsek tyče Δx , v libovolném místě x_0 pak máme v každém časovém okamžiku rovnováhu mezi tepelným tokem Q , který

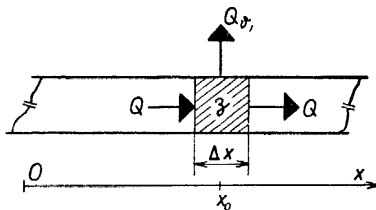
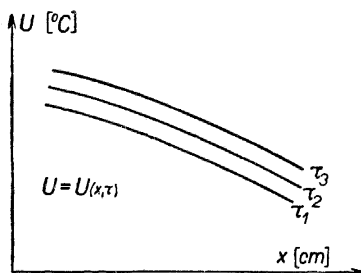
vstupuje do uvažovaného úseku tyče průřezem v bodě $\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)$, tokem který vystupuje z průřezu v bodě $\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$, vyvíjeným tepelným výkonem $z \cdot P \cdot \Delta x$, kde z [W/cm^3] je teplo vyvinuté v jednotkovém objemu každou vteřinu, dále teplem, odvedeným za sekundu s povrchu a teplem spotřebovaným za sekundu na ohřev uvažovaného objemu tyče $P \Delta x$.

Označíme-li $U(x, \tau)$ oteplení nad okolí v místě x a v čase τ [sek] a je-li λ [$W/^\circ C$ cm] tepelná vodivost tyče, pak podle Fourierova zákona vedení tepla dostáváme pro tepelný tok Q v bodě $\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)$

$$Q\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}; \tau\right) = -\lambda P U_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}; \tau\right)^1$$

a v bodě $x_0 + \frac{\Delta x}{2}$

$$Q\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}; \tau\right) = -\lambda P U_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}; \tau\right).$$



Obr. 1.

Budeme dále předpokládat, že vyvíjené teplo z je lineárně závislé na teplotě²⁾ t. j.

$$z = z_0 [1 + \alpha U(x_0, \tau)],$$

kde α [$1/^\circ C$] je teplotní součinitel, závislý na materiálu tyče.

Dále označíme O [cm] obvod průřezu tyče, ϑ_1 [W/cm^2 $^\circ C$] koeficient přestupu tepla s povrchu tyče. Pro Q_{ϑ_1} , t. j. teplo odváděné za vteřinu s povrchu tyče platí $Q_{\vartheta_1} = O \cdot \Delta x \cdot \vartheta_1 \cdot U(x_0, \tau)^3$.

¹⁾ Nadále značí $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ a $U_\tau = \frac{\partial U}{\partial \tau}$.

²⁾ Např. teplo, vyvinuté elektrickým proudem ve vodiči za vteřinu, závisí na teplotě vodiče vztahem $z = \sigma^2 \cdot \rho = \sigma^2 \rho_0 (1 + \alpha U)$, kde σ [A/cm^2] je proudová hustota a ρ specifický odpor křehle vodiče o hraně 1 cm.

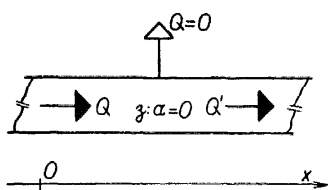
³⁾ Při umělém chlazení ofukováním, nebo při chlazení kapalinou nezávisí koeficient přestupu tepla ϑ_1 na teplotě chlazeného povrchu. Při chlazení přirozenou konvekcí nebo

Konečně bude tepelný výkon $Q_{ohřev}$, potřebný na ohřev uvažovaného elementárního objemu tyče, dán kalorimetrickou rovnicí. Označme hustotu ρ [g/cm³] a specifické teplo materiálu tyče c [W sek/g °C]. Protože časový přírůstek teploty je dán diferenciálním kvocientem teploty $U_\tau(x, \tau)$, máme

$$Q_{ohřev} = \rho \cdot P \cdot \Delta x \cdot c \cdot U_\tau(x_0, \tau).$$

Sestavíme-li rovnici, která popisuje rovnováhu přivedeného, odvedeného, vyvinutého a na ohřev spotřebovaného tepla z příslušných výrazů, opatřených příslušnými znaménky, máme pro energetickou bilanci elementárního úseku tyče

$$\lambda P \left[-U_x \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}; \tau \right) + U_x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}; \tau \right) \right] - \rho \cdot P \cdot \Delta x \cdot c \cdot U_\tau(x_0, \tau) - \vartheta_1 \cdot O \cdot \Delta x \cdot U(x_0, \tau) + z_0 [1 + \alpha U(x_0, \tau)] \cdot P \cdot \Delta x = 0.$$



Obr. 2.

Vydělíme-li rovnici výrazem $P \cdot \lambda \cdot \Delta x$ a provedeme-li limitu $\Delta x \rightarrow 0$, obdržíme po uspořádání hledanou diferenciální rovnici.

$$U_{xx}(x, \tau) - \frac{1}{K} U_\tau(x, \tau) + \frac{1}{h} U(x, \tau) = -\frac{z_0}{\lambda}, \quad (1)$$

kde

$$\frac{1}{K} = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \quad \text{a} \quad \frac{1}{h} = \left(\frac{z_0 x}{\lambda} - \frac{\vartheta_1 O}{\lambda P} \right).$$

Není-li tyč nebo deska na povrchu chlazená (obr. 2) a z není závislé na teplotě, redukuje se předchozí diferenciální rovnice na tvar

$$U_{xx}(x, \tau) - \frac{1}{K} U_\tau(x, \tau) = -\frac{z_0}{\lambda}. \quad (2)$$

Jak patrně, přecházejí parciální diferenciální rovnice (1) a (2) pro $z = 0$ v známou rovnici pro vedení tepla⁴⁾.

sáláním již na teplotě závisí. Pro nepřilíš vysoké teploty U závisí ϑ_1 přibližně na \sqrt{U} , takže naše úvahy, kde uvažujeme ϑ_1 na teplotě nezávislé, platí přibližně i pro tyto případy.

Je-li tyč tepelně izolována vrstvami materiálů o silách d_i [cm] a o tepelných vodivostech λ_i , tak, že se přestup tepla realizuje vedením přes tyto vrstvy a pak teprve přestupem do okolí, platí pro výsledný koeficient průchodu tepla $\vartheta'_1, \vartheta''_1 = \frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1} + \sum \frac{d_i}{\lambda_i}}$.

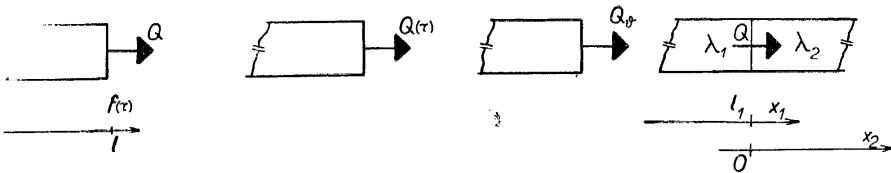
Současně poznamenáváme, že výraz $Q_{\vartheta_1} = \dots$ není samozřejmě zcela exaktní a vyplývá ze zanedbání rozdílů teplot v ose a na povrchu, jak již úvodem bylo řečeno.

⁴⁾ Viz např. ЛЫКОВ [3], str. 71, CARLSLAW a JAEGER [1], str. 75.

3. Počáteční a okrajové podmínky

Než přikročíme k vlastnímu řešení rovnic (1) a (2), musíme ještě, podle toho, které konkrétní případy chceme řešit, určit okrajové a počáteční podmínky.

Počáteční podmínku zvolíme tak, že v čase $\tau = 0$ je teplota po celé délce tyče rovna teplotě okolí, tj. $U(x, 0) = 0$. Dále zvolíme pro počátek tyče u všech případů, které budeme řešit, podmínku $U_x(0, \tau) = 0$. T. zn., že jde o problém symetrický⁵⁾. Pokud jde o zbývající okrajovou podmínku na konci tyče, budeme rozlišovat⁶⁾ okrajové podmínky prvního až čtvrtého druhu.



Při okrajové podmínce prvního druhu je předepsán časový průběh teploty na konci tyče. Je-li délka tyče l , bude okrajová podmínka prvního druhu tvaru

$$U(l, \tau) = f(\tau)$$

Při okrajové podmínce druhého druhu je předepsán tepelný tok, prostupující koncem tyče

$$-\lambda \cdot U_x(l, \tau) = f(\tau).$$

Při okrajové podmínce třetího druhu je předepsán tepelný tok okrajovou plochou jako funkce teploty v $x = l$ a koeficientu přestupu tepla ϑ . (Představuje současně zvláštní případ okrajové podmínky druhého druhu)

$$-\lambda \cdot U_x(l, \tau) = \vartheta \cdot U(l, \tau).$$

Při okrajové podmínce čtvrtého druhu je předepsána rovnost teplot při rozhraní dvou těles a rovnost tepelného toku vystupujícího z jednoho tělesa do druhého.

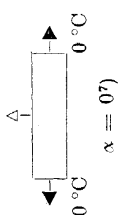
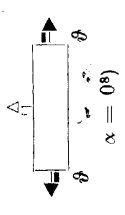
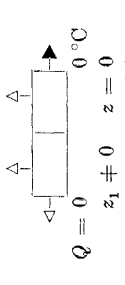
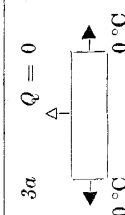
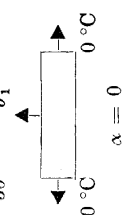
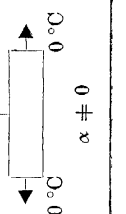
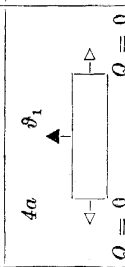
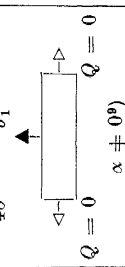
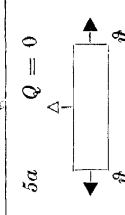
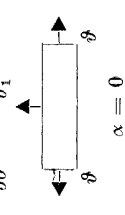
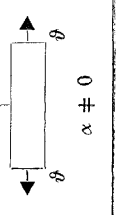
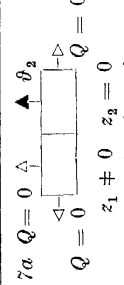
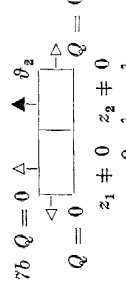
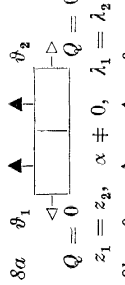
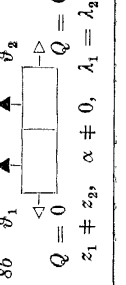
$$U(l, \tau) = U'(0, \tau); \quad \lambda U_x(l, \tau) = \lambda' U'_x(0, \tau).$$

V následující tabulce 1 uvádíme řadu případů s jednoduchými okrajovými podmínkami všech čtyř druhů. Okrajové podmínky jsou voleny hlavně s ohledem na výpočty oteplování elektrických strojů.

⁵⁾ Problém nazýváme symetrickým, jsou-li obě okrajové podmínky stejné. Zvolíme-li pak místo osy symetrie za počátek souřadnic, bude platit $U(x, \tau) = U(-x, \tau)$. Pak stačí přirozeně řešit průběh oteplení pro kladná x . Stejně platí ovšem, jestliže předpokládáme počátek tyče za tepelně dokonale izolovaný.

⁶⁾ Podle ЛЫКОВА [3], str. 24.

Tab. I.

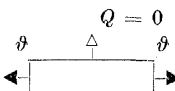
Tvar diferenciální rovnice	Druh okrajové podmínky			
	I.	II.	III.	IV.
$U_{xx} - \frac{1}{K} U_{\tau} = -\frac{z}{\lambda}$	<p>1</p>  <p>0°C Q = 0 0°C $\alpha = 0^{\circ}$</p>		<p>2</p>  <p>Q = 0 phi $\alpha = 0^{\circ}$</p>	<p>6</p>  <p>Q = 0 Q = 0 $z_1 \neq 0$ $z_2 \neq 0$ $\alpha = 0$ $\lambda_1 \neq \lambda_2^{10}$</p>
	<p>3a</p>  <p>0°C Q = 0 0°C $\alpha \neq 0$</p> <p>3b</p>  <p>0°C Q = 0 0°C $\alpha = 0$</p> <p>3c</p>  <p>0°C Q = 0 0°C $\alpha \neq 0$</p>	<p>4a</p>  <p>Q = 0 phi1 Q = 0 $\alpha = 0$</p> <p>4b</p>  <p>Q = 0 phi1 Q = 0 $\alpha \neq 0^{\circ}$</p>	<p>5a</p>  <p>Q = 0 phi phi $\alpha \neq 0$</p> <p>5b</p>  <p>phi phi1 phi $\alpha = 0$</p> <p>5c</p>  <p>phi phi1 phi $\alpha \neq 0$</p>	<p>7a</p>  <p>Q = 0 Q = 0 $z_1 \neq 0$ $z_2 = 0$ $\alpha = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$</p> <p>7b</p>  <p>Q = 0 Q = 0 $z_1 \neq 0$ $z_2 \neq 0$ $\alpha = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$</p> <p>7c</p> <p>jako 7b a $z_1 \neq z_2$</p>
$U_{xx} - \frac{1}{K} U_{\tau} + \frac{1}{h} U = -\frac{z_0}{\lambda}$			<p>8a</p>  <p>Q = 0 phi1 phi2 Q = 0 $z_1 = z_2$ $\alpha \neq 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$</p> <p>8b</p>  <p>Q = 0 phi1 phi2 Q = 0 $z_1 \neq z_2$ $\alpha \neq 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$</p>	

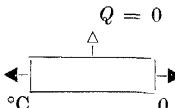
4. Postup řešení

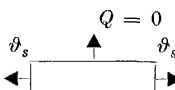
Nejprve probereme celý postup řešení v hrubých rysech. Parciální diferenciální rovnice, reprezentující řešený případ, transformujeme (provedeme Laplaceovu transformaci) podle proměnné τ a vyjádříme obraz hledaného řešení $U(x, \tau)$ explicitně. Inversní Laplaceovou transformací nalezneme pak originál hledaného řešení. Konečně převedeme nalezené řešení na tvar bezrozměrné kritériální rovnice. Jak později ještě ukážeme, je mezi jednotlivými případy souvislost takového druhu, že řada případů vzniká vlastně specialisací některého obecnějšího případu. T. zn., že vzniká tím, že některý z parametrů nabývá speciální hodnoty např. nuly, jedné, nebo tím, že některý z parametrů roste nad všechny meze. Jakmile určíme blíže takovou souvislost mezi různými případy, stačí řešit shora uvedeným postupem případ nejobecnější. Ostatní pak nalézáme jako limitu pro speciální hodnotu některého z parametrů řešení obecnějšího.

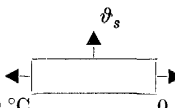
Pro stručnost uvádíme v dalším pouze praktické řešení pro případ 1 z tab. 1. Postup řešení ostatních obecnějších případů a odvození speciálnějších uvádíme v dodatku.

7) Podobné případy jsou řešeny:

ЛЫКОВ [3]: str. 263,  $Q = 0$
 $t_c \neq 0^\circ\text{C}$, $U(x, 0) = t_0 \neq t_c$, $U_x(0, \tau) = 0$,
 $U_x(l, \tau) = \vartheta/\lambda [t_c - U(l, \tau)]$, $z = \text{konst.}$

CARLSLAW [1]: str. 108,  $Q = 0$
 $U(x, 0) = 0$, $z = \text{konst.}$
 0°C 0°C

str. 109,  $Q = 0$
kde ϑ_s značí přestup tepla sáláním a
 $U(x, 0) = 0$; $z = \text{konst.}$

str. 137,  ϑ_s
 $U(x, 0) = 0$; $z = \text{konst.}$
 0°C 0°C

⁸⁾ Je-li tyč na povrchu nebo na konci krytá tepelně izolujícími vrstvami u nichž tepelnou kapacitu lze zanedbat, platí poznámka 3).

⁹⁾ V případě 4 v důsledku okrajových podmínek nevzniká žádné proudění tepla ve směru osy a nejedná se tudíž již ve vlastním slova smyslu o jednorozměrné proudění tepla. Jiné okrajové podmínky druhého druhu však nemají technický význam.

¹⁰⁾ Pro okrajové podmínky čtvrtého druhu je veliký počet možných kombinací. Zvoleny byly (až na 6) pouze kombinace z obou diferenciálních rovnic při ostatních podmínkách symetrických.

Výpočet řešení případu 1. Zadání případu 1 je, značíme-li z místo z_0

$$U_{xx}(x, \tau) - \frac{1}{K} U_{\tau}(x, \tau) = -\frac{z}{\lambda}, \quad (3)$$

$$U(x, 0) = 0, U_x(0, \tau) = 0, U(l, \tau) = 0.$$

Provedeme-li Laplaceovu transformaci vzhledem k proměnné τ), obdržíme, značí-li $u(x, p)$ obraz originálu $U(x, \tau)$,

$$u_{xx}(x, p) - q^2 \cdot u(x, p) + \frac{1}{K} U(x, 0) = -\frac{1}{p} \frac{z}{\lambda}, \quad (4)$$

kde $q^2 = p/K$, $\text{Re } p > 0$. Obraz okrajových podmínek bude

$$u_x(0, p) = 0 \quad \text{a} \quad u(l, p) = 0. \quad (4a)$$

Po dosazení za $U(x, 0)$ z počátečních podmínek se rovnice (4) redukuje na tvar (nepřehlédneme-li k parametru p a k významu q^2) dobře známé diferenciální rovnice ustáleného vedení tepla v tyči o konečné délce s vnitřním vývinem tepla, na povrchu chlazené¹²⁾. Jako obecné řešení nalézáme

$$u(x, p) = \frac{z}{\lambda} \frac{1}{pq^2} + \left(a - \frac{z}{\lambda} \frac{1}{pq^2} \right) \cosh qx + \frac{b}{q} \sinh qx. \quad (5)$$

Neznámou konstantu b určíme z obrazu první okrajové podmínky (4a) $u_x(0, p) = 0$, jako $b = 0$.

Neznámou konstantu a určíme snadno dosazením z obrazu druhé okrajové podmínky (vzorec (4a)). Máme

$$u(l, p) = \frac{z}{\lambda} \frac{1}{pq^2} + \left(a - \frac{z}{\lambda} \frac{1}{pq^2} \right) \cosh ql = 0,$$

takže pro a obdržíme

$$a = -\frac{z}{\lambda} \frac{1}{pq^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh ql} \right).$$

Dosazením do (5) za a i b obdržíme

$$u(x, p) = \frac{z}{\lambda} \cdot \frac{1}{pq^2} \left[1 - \frac{\cosh qx}{\cosh ql} \right] = \frac{zK}{\lambda} \frac{1}{p^2} \left[1 - \frac{\cosh \sqrt{\frac{p}{K}} \cdot x}{\cosh \sqrt{\frac{p}{K}} \cdot l} \right]. \quad (6)$$

¹¹⁾ Předpokládá se, že $L \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = \frac{du}{dx}$ atd., takže jen nutno ověřovat, zda „řešení“ vskutku řešením je. Pokud se týká běžných transformací poukazujeme na uvedenou literaturu.

¹²⁾ Viz např. HAK [4].

Originál funkce $u(x, p)$, tj. hledané řešení diferenciální rovnice, obdržíme na základě inverzního theoremu¹³⁾ jako komplexní integrál

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} e^{\zeta\tau} \cdot u(x, \zeta) d\zeta, \quad \gamma > 0. \quad (7)$$

Místo p píšeme ζ , abychom zdůraznili, že proměnnou p považujeme za komplexní.

Při integraci nutno zvolit γ tak veliké, aby všechny póly integrandu ležely vlevo od čáry $\langle \gamma - i\beta, \gamma + i\beta \rangle$.

Vypočteme nyní komplexní inverzní integrály, které obdržíme po dosazení (6) do (7).

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{zK}{\lambda} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} \frac{e^{\zeta\tau}}{\zeta^2} d\zeta - \frac{zK}{\lambda} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} \frac{e^{\zeta\tau}}{\zeta^2} \frac{\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot x}{\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot l} d\zeta \right\}. \quad (7a)$$

Hodnota integrálů je v našem případě rovna sumě residuí¹⁴⁾ v pólech funkce $u(x, \zeta) e^{\zeta\tau}$. Prvý integrand má pól druhého řádu v bodě $\zeta = 0$. Rozvineme-li integrand v Laurentovu řadu¹⁵⁾ v okolí bodu $\zeta = 0$, máme

$$\frac{e^{\zeta\tau}}{\zeta^2} = \frac{A_{-2}}{\zeta^2} + \frac{A_{-1}}{\zeta} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} \zeta^{\nu} = \frac{1 + \frac{\zeta\tau}{1!} + \frac{\zeta^2\tau^2}{2!} + \dots}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{\tau}{\zeta} + \frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

Residuum v bodě $\zeta = 0$ je rovno koeficientu A_{-1} v Laurentově řadě v okolí bodu $\zeta = 0$ a máme

$$A_{-1} = \tau. \quad 16)$$

¹³⁾ Např. CHURCHILL [5], str. 157. — Aniž bychom to v dalším zdůraznili, budeme vždy hledat taková konečná řešení, aby uvnitř dané oblasti měla dvě spojité derivace a byla splněna diferenciální rovnice. Pokud jde o okrajové podmínky, budeme žádat od řešení, aby derivace vyskytující se v okrajových podmínkách a funkce sama byly spojité prodloužitelné na hranici oblasti k příslušným okrajovým hodnotám. Dále očekáváme, že budou splněny podmínky, nutné k důkazu unicity řešení.

¹⁴⁾ Viz např. М. А. Лаврентьев а Б. В. Шаба т, [6], str. 423.

¹⁵⁾ Viz např. J. J. PRIVALOV [7], str. 243.

¹⁶⁾ Je tedy originál k obrazu $\frac{zK}{\lambda} \cdot \frac{1}{p^2}$

$$\frac{zK}{\lambda} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = \frac{zK}{\lambda} \cdot \tau.$$

Tuto funkci a její obraz nalezneme v již citovaném přehledu Laplaceových transformací, CHURCHILL [5], str. 295.

Druhý integrand má také pól druhého řádu v bodě $\zeta = 0$ a další póly prvního řádu v bodech $\zeta = \zeta_n$, pro něž $\cosh \sqrt{\frac{\zeta_n}{K}} \cdot l = 0$. Protože platí $\cosh (2n - 1) \cdot i \frac{\pi}{2} = 0$, dostáváme pro ζ_n ze vztahu $\sqrt{\frac{\zeta_n}{K}} \cdot l = (2n - 1) i \frac{\pi}{2}$, kde $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\zeta_n = -\frac{K(2n - 1)^2 \pi^2}{4l^2}.$$

Residuum v bodě $\zeta = 0$ je dáno opět koeficientem A_{-1} v Laurentově řadě v okolí bodu $\zeta = 0$. Rozvineme-li $\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} x$, $\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} l$ a $e^{\zeta \tau}$ v řady v okolí bodu $\zeta = 0$ máme

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\zeta \tau} \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot x}{\zeta^2 \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot l} = \\ & = \frac{\left(1 + \frac{\zeta \tau}{1!} + \frac{\zeta^2 \tau^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{\left(\sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot x\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot x\right)^4}{4!} + \dots\right)}{\zeta^2 \left(1 + \frac{\left(\sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot l\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot l\right)^4}{4!} + \dots\right)} = \\ & = \frac{\left(1 + \frac{\zeta \tau}{1!} + \frac{\zeta^2 \tau^2}{2!} + \dots\right)}{\zeta^2} \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{2!K} (x^2 - l^2) + \dots\right) = \\ & = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \left[\frac{1}{2!K} (x^2 - l^2) + \tau \right] + \dots \end{aligned}$$

Pro residuum v bodě $\zeta = 0$ tedy máme

$$A_{-1} = \tau + \frac{1}{2K} (x^2 - l^2).$$

Pro residua v pólech prvního řádu $\zeta = \zeta_n$ platí*

$$\operatorname{Res}_{\zeta = \zeta_n} \left[\frac{f(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \right] = \left[\frac{f(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \right]_{\zeta = \zeta_n},$$

tedy

$$\left(\frac{e^{\zeta \tau} \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot x}{\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot l} \right)_{\zeta = \zeta_n} = \left(\frac{e^{\zeta \tau} \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot x}{\zeta^2 \frac{l}{2\sqrt{K\zeta}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K}} \cdot l} \right)_{\zeta_n = -\frac{K(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2}}$$

Po dosazení za ζ_n máme konečně s ohledem na $\sinh ix = i \sin x$ atd. pro residua v pólech ζ_n

$$\frac{16l^2}{K\pi^3} \cdot (-1)^{n+1} \frac{\exp\left[-\frac{K(2n-1)^2\pi^2}{4l^2} \cdot \tau\right]}{(2n-1)^3} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} \cdot x.$$

Dosazením ΣRes za integrál ve vzorci (7a) obdržíme konečně řešení případu 1,

$$U(x, \tau) = \frac{z}{2\lambda} (l^2 - x^2) - \frac{16zl^2}{\pi^3 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\exp\left[-\frac{\lambda(2n-1)^2\pi^2}{4l^2\varrho c} \tau\right]}{(2n-1)^3} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x. \quad (8)$$

Zavedení kriterií podobnosti a obecné kriteriální rovnice. Řešení diferenciální rovnice (3) pro okrajové podmínky prvního druhu lze vyjádřit ještě obecněji, zavedením kriterií podobnosti. Je totiž evidentní, že pro řadu různých hodnot parametrů a proměnných, můžeme obdržet stejný číselný výsledek. To se v soulase s dimensionální analysou [9], [10] projevuje existencí určitých kombinací parametrů, které jsou bezrozměrné a které charakterisují podobnost různých číselných zadání téže úlohy. Řešení, vyjádřené bezrozměrnými veličinami a parametry, shrnuje pak v sobě všechny podobné případy, jako funkci hodnot kriterií podobnosti.

Abychom tuto souvislost vyjádřili — a pro větší přehlednost výsledků — použijeme nadále pro bezrozměrné proměnné a bezrozměrná kriteria zvláštní označení. (Pro další vývody tento postup ovšem nutný není.)

Abychom řešení rovnice (3) zobecnili, zavedeme do řešení rovnice (8) tzv. Fourierovo číslo $F_0 = \frac{\lambda\tau}{\varrho cl^2}$ ¹⁷⁾ a kriterium geometrické podobnosti $X = x/l$. Pak v našem případě poměrné oteplení Θ , tj. poměr okamžité teploty v určitém místě k ustálené teplotě v témže místě, je

$$\Theta = \frac{U(X, F_0)}{\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0)} = 1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} F_0\right]}{(1-X^2) \cdot (2n-1)^3} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} X, \quad (9)$$

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0) = \frac{zl^2}{2\lambda} (1 - X^2).$$

¹⁷⁾ Tohoto kriteria užívá ЛЫКОВ [3] (viz str. 41 a další). CARLSLAW a JAEGER [1] kriteria používají, ale bez zvláštního označení, pouze ke znázornění grafických výsledků.

Funkce definovaná vztahem (9) je, jak snadno ukážeme, přímo řešením obecné kritériální parciální diferenciální rovnice.

Tuto můžeme nalézt např. dosazením příslušných kritérií do rovnice (3).

Násobíme diferenciální rovnici (3) l^2 a zavedeme F_0 . Máme pak s ohledem na $\frac{dF_0}{d\tau} =$

$$= \frac{\lambda}{\varrho \cdot c \cdot l^2} = \frac{K}{l^2},$$

$$l^2 \cdot U_{xx}(x, F_0) - \frac{dU(x, F_0)}{dF_0} = -\frac{zl^2}{\lambda}.$$

Zavedeme dále do diferenciální rovnice kritérium geometrické podobnosti X . Máme pak

$$\frac{dU(X, F_0)}{dx} = \frac{dU(X, F_0)}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{dU(X, F_0)}{dX} \cdot \frac{1}{l}$$

a

$$\frac{d^2U(X, F_0)}{dx^2} = \frac{d^2U(X, F_0)}{dX^2} \cdot \frac{1}{l^2}$$

tedy

$$U_{xx}(X, F_0) - U_{F_0}(X, F_0) = -\frac{zl^2}{\lambda}.$$

Můžeme zavést i $\Theta(X, F_0) = \frac{U(X, F_0)}{zl^2} \text{ }^{18)}$ a obdržíme posléze kritériální rovnici

$$\frac{2\lambda}{2\lambda} (1 - X^2)$$

$$(1 - X^2) \Theta_{XX} - 4X\Theta_X - (1 - X^2) \Theta_{F_0} - 2\Theta + 2 = 0, \quad (10)$$

jejíž počáteční a okrajové podmínky budou $\Theta(X, 0) = 0$, $\Theta_X(0, F_0) = 0$ a $\Theta(1, F_0) = 1$. Z hlediska matematického postupu řešení není ovšem kritériální diferenciální rovnice jednodušší, než původní diferenciální rovnice.

5. Vzájemná souvislost jednotlivých řešených případů

Sledujeme-li jednotlivé případy (tab. 1) shledáme, že např. 5c přechází pro určité hodnoty jednotlivých parametrů ϑ , ϑ_1 , α atd. v jiné případy. Zvolíme-li např. $\vartheta = 0$, obdržíme případ 4b, nebo, roste-li ϑ nad všechny meze, pak za předpokladu, že $U_x(l, 0)$ je konečné, blíží se $U(l, \tau)$ k nule, což dává případy 1 a 3. Ze všech případů 1 až 5c, je 5c nejobecnější a obsahuje v sobě ostatní, které lze z něho obdržeti dosazením speciálních hodnot parametrů. Stejně tak obsahují případy 6 resp. 8b v sobě případy 1 resp. 4a, 4b, 7a, 7b a 8a.

Toho využijeme a případy z tab. 1 vyřešíme vyřešením tří nejobecnějších, spolu nesouvisejících případů 5c, 6a, 8b. Z nich pak odvodíme teprve ostatní případy a to pouhým dosazením příslušných hodnot parametrů.

¹⁸⁾ Určení $\lim_{\tau \rightarrow \infty} U(x, \tau)$ je poměrně snadné, neboť ji lze určit z diferenciální rovnice pro ustálené jednorozměrné proudění tepla.

Tab. 2.

	F_0	X	B_i	A_1	A_2	A_{12}^2
5c	$F_0 \geq 0$	$1 \geq X \geq 0$	$B_i > 0$	$A_1 > 0$	$A_2 > 0$	$A_{12}^2 \geq 0$
5b	$\bar{\downarrow}$	$\bar{\downarrow}$	$\bar{\downarrow}$	0	$\bar{\downarrow}$	$A_{12}^2 < 0$
5a		\downarrow	\downarrow	$A_1 > 0$	0	$A_{12}^2 > 0$
4b		$\Theta = f(F_0)^*$	0	$\bar{\downarrow}$	$A_2 > 0$	$A_{12}^2 \geq 0$
4a		$\bar{\downarrow}$	0	0	$\bar{\downarrow}$	$A_{12}^2 < 0$
3c		$1 \geq X \geq 0$	∞	$A_1 > 0$	$\bar{\downarrow}$	$A_{12}^2 \geq 0$
3b		$\bar{\downarrow}$	∞	0	\downarrow	$A_{12}^2 < 0$
3a		$\bar{\downarrow}$	∞	$A_1 > 0$	0	$A_{12}^2 > 0$
2			$B_i > 0$	0	0	0
1	\downarrow	\downarrow	∞	0	0	0

*) Θ nezávisí na X .

Jak už bylo řečeno, postupujeme pro stručnost výkladu tak, že vlastní řešení případů 5c, 6, 8b udáváme v dodatku a zde analyzujeme jen výsledky.

U případu 5c (srovnej 12, 12a, 12b a 12c a výpočet řešení 5c v dodatku) se vyskytují mimo X a F_0 , ještě tyto bezrozměrné parametry

$$B_i = \frac{\vartheta \cdot l^{19}}{\lambda}, \quad A_1 = \sqrt{\frac{z_0 \cdot \alpha}{\lambda}} \cdot l, \quad A_2 = \sqrt{\frac{\vartheta_1 0}{P\lambda}} \cdot l, \quad A_{12}^2 = A_1^2 - A_2^2.$$

Sestavíme pro případy 1 až 5c tabulku a v ní vyznačíme jakých hodnot nabývají bezrozměrné parametry případu 5c, aby bylo vyhověno zadáním případů 1–5b (tab. 2). Dosadíme-li nalezené hodnoty bezrozměrných parametrů postupně do řešení 5c, obdržíme řešení všech dalších případů 1 až 5c. Dosadme např. hodnoty kritérií pro případ 1, $A_{12} \rightarrow 0$ a $B_i \rightarrow \infty$. Nejprve určíme limitu (12) pro $A_{12} \rightarrow 0$, což odpovídá případu 2. Stačí tu provést limitu pro výraz

$$\frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{-\frac{A_{12}}{B_i} \sin A_{12} + \cos A_{12}} - 1 \right), \quad (11)$$

¹⁹⁾ ЛЫКОВ [3], str. 40 atd.: Kriterium tepelné podobnosti (Biotovo kritérium); B_i souvisí s okrajovými podmínkami. Ostatní kritéria jsou nepojmenovaná a souvisí přímo s tvarem diferenciální rovnice samotné.

neboť β_n a δ_n na A_{12} nezávisí a jinak stačí ve vzorci (12) do výrazu za sumačnícím znaménkem prostě dosadit za A_{12} nulu. Jmenovatele výrazu (11) rozvíjíme v řadu v okolí bodu $A_{12} = 0$ a obdržíme, sečteme-li výraz pod zlomkovou čarou a provedeme-li dělení

$$\frac{2}{A_{12}^2} \cdot \left[\frac{1 - \frac{A_{12}^2 X}{2!} + \frac{A_{12}^4 X}{4!} - + \dots}{-\frac{A_{12}}{B_i} \left(A_{12} - \frac{A_{12}^3}{3!} + \frac{A_{12}^5}{5!} - + \dots \right) + 1 - \frac{A_{12}^2}{2!} + \frac{A_{12}^4}{4!} - + \dots} - 1 \right] =$$

$$= \left[1 - X^2 + \frac{2}{B_i} \right] + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} A_{12}^{2\nu},$$

$$a_1 = \left[\frac{5}{12} + \frac{2}{B_i} \left(\frac{10}{12} - \frac{X^2}{2} + \frac{1}{B_i} \right) - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{12} \right] \text{ atd.}$$

Je tedy limita výrazu (11) pro $A_{12} \rightarrow 0$ rovna

$$\frac{4}{1 - X^2 + \frac{2}{B_i}}$$

a můžeme přímo sestavit řešení případu 2 (viz vzorec 18 a 18a). Nyní stačí vypočíst limitu pro $B_i \rightarrow \infty$. Pro kořeny δ_n transcendentní rovnice $\delta \operatorname{tg} \delta = B_i$ obdržíme, po dosazení za B_i , $\delta_n = \delta_n(B_i) = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, takže limita β_n bude

$$\lim_{B_i \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{C_i \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{B_i} \left[1 + B_i + \frac{\delta_n^2(B_i)}{B_i} \right] \sin \delta_n(B_i)} = (-1)^{n+1},$$

a $\frac{2}{B_i} = 0$. Dosazením obdržíme skutečně řešení 1 tak, jak bylo přímo vypočteno a po dosazení kritérií vyjádřeno vzorcem (9).

6. Přehled jednotlivých řešení

Případ 5c. Poměrné oteplení Θ jest (jak vyplývá ze zavedení příslušných kritérií podobnosti do vzorce 27 dodatku)

$$\Theta = 1 - \frac{4}{\frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{-\frac{A_{12}}{B_i} \sin A_{12} + \cos A_{12}} - 1 \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n (\delta_n^2 - A_{12}^2)} \cdot \beta_n \exp [-F_0 (\delta_n^2 - A_{12}^2)] \cdot \cos \delta_n X, \quad (12)$$

kde $\delta_n = \delta_n(B_i)$ je n -tým kladným kořenem transcendentní rovnice

$$\delta \operatorname{tg} \delta = B_i. \quad (12a)$$

Dále je

$$\beta_n = \frac{B_i}{\left[1 + B_i + \frac{\delta_n^2(B_i)}{B_i}\right] \sin \delta_n(B_i)} \quad (12b)$$

a

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0) = \frac{z_0 l^2}{2\lambda} \cdot \frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{-\frac{A_{12}}{B_i} \sin A_{12} + \cos A_{12}} - 1 \right). \quad (12c)$$

Při aplikaci je ovšem nutno vyšetřit, zda A_{12}^2 je kladné, záporné nebo nula. Jestliže platí pro některé δ , nerovnost $\delta^2 < A_{12}^2$, pak roste Θ pro $F_0 \rightarrow \infty$ nade všechny meze, neboť exponenty pro všechny členy sumy s indexy $n \leq \nu$ budou kladné. Při tom je obecně první kořen rovnice (12a) menší nebo roven $\frac{\pi}{2}$.

Protože α a λ jsou pevné materiálové konstanty, může A_{12} překročit kritickou hodnotu jen se vzrůstající hodnotou z_0 . Jestliže $A_{12} = 0$, pak přecházejí vzorce (12) a (12c) v (18) a (18a), jak již bylo v odstavci 5 ukázáno.

Pokud $A_{12}^2 < 0$, pak přecházejí vzorce (12) a (12c) ve vzorce případu 5b, (13) a (13a).

Navíc nutno ještě dbát, že pro $\frac{A_{12}}{B_i} \sin A_{12} \rightarrow \cos A_{12}$ funkce $U(X, F_0)$ roste nad všechny meze, a pro $\frac{A_{12}}{B_i} \sin A_{12} > \cos A_{12}$ řešení nemá fyzikální význam, neboť pak jistě $\delta_1 < A_{12}$ (jak plyne z upravené nerovnosti $A_{12} \cdot \operatorname{tg} A_{12} > B_i$) a Θ roste pro $F_0 \rightarrow \infty$ nad všechny meze.

Případ 5b. Tento případ se liší od předchozího pouze tím, že se zamění A_{12}^2 za $-A_{12}^2$, neboť $A_1 = 0$. Pro poměrné oteplení tedy obdržíme

$$\Theta = 1 - \frac{4}{A_2^2 \left(1 - \frac{A_2}{B_i} \sinh A_2 + \cosh A_2 \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n(\delta_n^2 + A_2^2)} \beta_n \exp[-F_0(\delta_n^2 + A_2^2)] \cos \delta_n X, \quad (13)$$

kdežto δ_n a β_n zůstávají tytéž jako v předcházejícím případě. Dále jest

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0) = \frac{z l^2}{2\lambda} \cdot \frac{2}{A_2^2} \left(1 - \frac{\cosh A_2 X}{\frac{A_2}{B_i} \sinh A_2 + \cosh A_2} \right). \quad (13a)$$

Případ 5a. V tomto případě platí s ohledem na $A_{12}^2 = A_1^2$ vzorce (12) až (12c) ve kterých píšeme jednoduše A_1 místo A_{12} .

A_1 z důvodů fyzikálních nabývá pouze hodnot kladných. Aby řešení mělo konečnou hodnotu, musí však A_1 vyhovovat podmínkám, uvedeným v případě 5c. Rovněž podmínka $\frac{A_1}{B_i} \sin A_1 < \cos A_1$ musí být splněna.

Případ 4b. Pro řešení tohoto případu obdržíme s ohledem na $B_i = 0$ (viz dodatek)

$$\Theta = 1 - \exp[-F_0 \cdot (-A_{12}^2)] \quad (14)$$

a

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(F_0) = \frac{z_0 l^2}{2\lambda} \cdot \frac{2}{-A_{12}^2}. \quad (14a)$$

(14) a (14a) platí pouze pro $A_{12}^2 < 0$. Pro $A_{12}^2 \geq 0$ roste $U(X, F_0)$ nad všechny meze.

Případ 4a. Dosadíme-li v případě 4b $A_1 = 0$ obdržíme řešení případu 4a:

$$\Theta = 1 - 1 \exp[-F_0 A_{12}^2] \quad (15)$$

a

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(F_0) = \frac{z l^2}{2\lambda} \cdot \frac{2}{A_{12}^2}. \quad (15a)$$

Případ 3c. Řešení tohoto případu obdržíme z případu 5c, jestliže stanovíme limitu vzorce (12) resp. (12b) a (12c) pro $B_i \rightarrow \infty$

$$\Theta = 1 - \frac{4}{\frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{\cos A_{12}} - 1 \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\delta_n (\delta_n^2 - A_{12}^2)} \exp[-F_0 (\delta_n^2 - A_{12}^2)] \cdot \cos \delta_n X, \quad (16)$$

kde δ_n je dáno rovnicí

$$\delta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}. \quad (16a)$$

Dále platí

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(F_0, X) = \frac{z_0 l^2}{2\lambda} \cdot \frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{\cos A_{12}} - 1 \right). \quad (16b)$$

I zde nutno, stejně jako v případě 5c při aplikaci vyšetřit hodnotu A_{12}^2 . Pro $A_{12}^2 > 0$ platí totéž co bylo řečeno v případě 5c. Pro $A_{12} = 0$ přechází vzorce (16) a (16b) v (19) a (19b) a pro $A_{12}^2 < 0$ v (17) a (17a).

Funkce daná vzorcem (16) není v bodě $X = 1$ definována, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos \delta_n X = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\cos A_{12} X}{\cos A_{12}} - 1 \right) = 0.$$

Dá se však jednoduchým přepsáním ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} U(X, F_0) = \lim_{x \rightarrow 1} (\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0)) = 0.$$

Případ 3b. Píšeme-li $A_{12}^2 = -A_2^2$, máme

$$\Theta = 1 - \frac{4}{\frac{2}{A_2^2} \left(1 - \frac{\cosh A_2 X}{\cosh A_2} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\delta_n (\delta_n^2 + A_2^2)} \cdot \exp[-F_0 (\delta_n^2 + A_2^2)] \cos \delta_n X, \quad (17)$$

kde δ_n je stejné jako u 3c a

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0) = \frac{z l^2}{2\lambda} \cdot \frac{2}{A_2^2} \left(1 - \frac{\cosh A_2 X}{\cosh A_2} \right). \quad (17a)$$

Případ 3a. Dosadíme-li do A_{12}^2 za $A_2 = 0$, je zřejmé, že řešení případu 3a je dáno vzorci (16), (16a) a (16b), ve kterých píšeme A_1 místo A_{12} .

Aby řešení mělo konečnou hodnotu je třeba, aby byly splněny pro A_1 stejné podmínky jako v případě 5a.

Případ 2. Provedeme-li ve vzorcích (12) a (12c) limitu pro $A_{12} \rightarrow 0$ máme (viz odst. 5)

$$\Theta = 1 - \frac{4}{1 - X^2 + \frac{2}{B_i}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\delta_n^3} \cdot \exp[-F_0 \delta_n^2] \cos \delta_n X, \quad (18)$$

kde δ_n je opět n -tý kladný kořen rovnice (12a) a β_n je dáno beze změny vzorcem (12b).

Dále je

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(X, F_0) = \frac{z l^2}{2\lambda} \left[1 - X^2 + \frac{2}{B_i} \right]. \quad (18a)$$

Případ 1. Pro $B_i \rightarrow \infty$ plyne z (18) pro poměrné oteplení Θ (jak již bylo ukázáno v odd. 4 a 5)

$$\Theta = 1 - \frac{4}{1 - X^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\delta_n^3} \exp[-F_0 \cdot \delta_n^2] \cos \delta_n X, \quad (19)$$

kde

$$\delta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

a

$$\lim_{F_0 \rightarrow \infty} U(F_0, X) = \frac{z l^2}{2\lambda} (1 - X^2). \quad (19a)$$

I zde platí pro $X \rightarrow 1$ připomínka uvedená v případě 3c.

Tab. 3.

	Φ	L	Z	X_1	X_2	Δ_{1n}	Δ_{2n}	A_1	A_2	B_1	B_2
8b	$\Phi > 0$	$L \geq 1$	$Z > 0$	$1 \geq X_1 \geq 0$	$1 \geq X_2 \geq 0$	$\Delta_{1n} > 0$	$\Delta_{2n} > 0$	$A_1 > 0$	$A_2 > 0$	$B_1 > 0$	$B_2 > 0$
8a			1					∇	∇	∇	
7c			$Z > 0$					0	0	0	
7b			1					0	0	0	
7a			∞					0	0	0	
4b			∞		0		0	$A_1 > 0$	$A_2 > 0$	0	0
4a			∞		0	∇	0	∇	0	0	0

Případ 6. Zavedeme do řešení uvedeného v dodatku²⁰⁾ následující bezrozměrné parametry: Místo Fourierova čísla zavedeme

$$\Phi = \delta_1^2 \tau.$$

Při tom jsou δ_n kořeny transcendentní rovnice $\operatorname{tg} \Delta_{1n} \cdot \operatorname{tg} \Delta_{2n} = \frac{L}{A} \cdot \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_{1n}}$, kde

$$L = \frac{l_1}{l_2}, \quad A = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

$$X_1 = \frac{x_1}{l_1}, \quad X_2 = \frac{x_2}{l_2}$$

a

$$\Delta_{1n} = \sqrt{\frac{\rho_1 c_1}{\lambda_1}} \delta_n l_1,$$

$$\Delta_{2n} = \sqrt{\frac{\rho_2 c_2}{\lambda_2}} \delta_n l_2.$$

Pro poměrné oteplení prvního úseku tyče pak máme

$$\Theta_1(X_1; \Phi) = 1 - \frac{4}{1 - X^2 + \frac{2A}{L}}.$$

$$\sum_{n=1}^s \beta_n \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] \cos \Delta_{1n} X_1, \quad (20 - 1)$$

kde

$$\beta_n = \frac{1}{A} \frac{\cos \Delta_{2n}}{\Delta_{1n}^2} \quad (20 - a)$$

kde $A =$

$$= \left(\frac{A}{L} \cdot \frac{\Delta_{1n}^2}{\Delta_{2n}} + \Delta_{2n} \right) \cos \Delta_{1n} \sin \Delta_{2n} + \left(\frac{A}{L} \cdot \Delta_{1n} + \Delta_{1n} \right) \sin \Delta_{1n} \cos \Delta_{2n}$$

²⁰⁾ Řešení tohoto případu nesouvisí, jak již výše bylo uvedeno, s předcházejícími případy a nelze je proto z těchto odvodit. To však neznamená, že nelze udat případ, který by obsahl všechny v této práci uvedené případy.

a

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} U(X_1; \Phi) = \frac{z l_1^2}{2\lambda_1} \left(1 - X_1^2 + \frac{2A}{L} \right). \quad (20 - b)$$

Pro druhý úsek tyče máme

$$\begin{aligned} \Theta_2(X_2; \Phi) = 1 - \frac{4}{\frac{2A}{L}(1 - X_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \Delta_{1n} \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] \cdot \\ \cdot \{ -\operatorname{ctg} \Delta_{2n} \sin \Delta_{2n} X_2 + \cos \Delta_{2n} X_2 \} \end{aligned} \quad (20 - 2)$$

a

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} T(\Phi; X_2) = \frac{z l_1^2}{2\lambda_1} \cdot \frac{2A}{L} (1 - X_2). \quad (20c)$$

Funkce $\operatorname{tg} \Delta_{1n} \cdot \operatorname{tg} \Delta_{2n} = \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\varrho_1 c_1}{\lambda_1}} \cdot \delta l_1 \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\varrho_2 c_2}{\lambda_2}} \delta l_2$ nabývá pro δ z intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ všech hodnot od 0 do $+\infty$, ať je hodnota výrazu $\sqrt{\frac{\varrho_1 c_1}{\lambda_1}} \cdot l_1$ a $\sqrt{\frac{\varrho_2 c_2}{\lambda_2}} \cdot l_2$ jakákoliv. Není proto třeba existenci kladných kořenů této rovnice zvlášť dokazovat. Pokud chceme kontrolovat, zda okrajové podmínky jsou skutečně splněny, nutno dbát jejich transformovaného tvaru, např.

$$\lambda_1 U_x(l_1, \tau) = \lambda_2 T_x(0, \tau) \text{ přechází v } \frac{\partial \Theta_1}{\partial X_1} = \frac{L}{A} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X_2}.$$

Pro případy 7a až 8b sestavíme opět tabulku (tab. 3), podobně jako pro případy 1 až 5c (tab. 2), a v ní vyznačíme, jakých hodnot nabývají bezrozměrné parametry případu 8b, aby bylo vyhověno zadáním případu 7a. až 8a. Parametry jsou Φ , L , X_1 , X_2 , Δ_{1n} a Δ_{2n} jako u případu 6 a dále

$$\begin{aligned} Z = \frac{z_1}{z_2}, \quad A_1 = \sqrt{\frac{z_1 \alpha}{\lambda}} \cdot l_1, \quad B_1 = \sqrt{\frac{z_2 \alpha}{\lambda}} \cdot l_2, \quad A_2 = \sqrt{\frac{\vartheta_1 \bar{O}}{\lambda P}} \cdot l_1 \quad \text{a} \\ B_2 = \sqrt{\frac{\vartheta_2 \bar{O}}{\lambda P}} \cdot l_2, \end{aligned}$$

analogicky k případu 5c.

Dosazením příslušných hodnot, resp. výpočtem příslušných limit dle tab. 3 obdržíme z řešení případu 8b opět další hledané případy.

Případ 8b. Zavedením výše uvedených parametrů do řešení, jehož postup je naznačen v dodatku, obdržíme pro první úsek tyče, použijeme-li ještě pro přehlednost zkratk $C_{12n} = \sqrt{A_{1n}^2 + A_{12}^2}$ a $D_{12n} = \sqrt{A_{2n}^2 + B_{12}^2}$

$$\Theta_1(X_1, \Phi) = 1 -$$

$$\left[\frac{2}{-A_{12}^2} + \left(\frac{1}{ZL^2} \cdot \frac{2}{-B_{12}^2} - \frac{2}{-A_{12}^2} \right) \frac{\sec A_{12} \cdot \operatorname{tg} B_{12}}{L B_{12}} \cos A_{12} X_1 \right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\cos C_{12n}} \cdot \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] \cdot \cos C_{12n} X_1, \quad (21-1)$$

kde

$$\beta_n = \frac{\frac{1}{L} C_{12n} \left[\frac{1}{ZL^2} \cdot \frac{1}{D_{12n}^2} - \frac{1}{C_{12n}^2} \right]}{-\frac{A_{1n} A_{2n}}{C_{12n} D_{12n}} + \frac{A_{2n}^2 C_{12n}}{L D_{12n}^3} + \frac{A_{1n}^2 \operatorname{tg} D_{12n}}{C_{12n} \sin^2 C_{12n}} - \frac{A_{2n}^2 \operatorname{ctg} C_{12n}}{D_{12n} \cos^2 D_{12n}}}. \quad (21a)$$

Kořeny δ_n jsou kladné kořeny transcendentní rovnice $\operatorname{ctg} C_{12n} \cdot \operatorname{tg} D_{12n} = \frac{-1}{L}$.

$\frac{C_{12n}}{D_{12n}}$, tj.

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\rho c}{\lambda} \delta_n^2 + \frac{z_1 \alpha}{\lambda} - \frac{O \delta_1}{P \lambda}} \cdot l_1 \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\rho c}{\lambda} \delta_n^2 + \frac{z_2 \alpha}{\lambda} - \frac{O \delta_2}{P \lambda}} \cdot l_2 = - \sqrt{\frac{\left(\frac{\rho c \delta_n^2 + z_1 \alpha}{P} - \frac{O \delta_1}{P} \right)}{\left(\frac{\rho c \delta_n^2 + z_2 \alpha}{P} - \frac{O \delta_2}{P} \right)}}. \quad (21b)$$

Dále máme pro poměrné oteplení druhého úseku tyče

$$\Theta_2(X_2, \Phi) = 1 - 4 \left[\frac{2}{ZL^2 \cdot (-B_{12}^2)} - \left(\frac{1}{ZL^2} \cdot \frac{2}{-B_{12}^2} - \frac{2}{-A_{12}^2} \right) \frac{1}{L} \cdot \frac{A_{12}}{B_{12}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L B_{12}} + \operatorname{ctg} A_{12} \operatorname{tg} B_{12}} \cdot (\cos B_{12} X_2 + \operatorname{tg} B_{12} \sin B_{12} X_2) \right]^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] (\cos D_{12n} X_2 + \operatorname{tg} D_{12n} \sin D_{12n} X_2). \quad (21-2)$$

$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} U$ a $\lim_{\Phi \rightarrow \infty} T$ obdržíme, vynásobíme-li ve vzorci (21-1) resp. (21-2)

jmenovatele zlomku před sumačním znaménkem číslem $\frac{z_1 l_1^2}{2\lambda}$. Jako v předchozích, tak i v tomto případě (a rovněž i v dalších) nutno při aplikaci uvážit že jednotlivé parametry mohou nabýt kladných, záporných, po případě nulových hodnot. Z toho pak plyne buďto platnost uvedených vzorců, nebo přechod v jiný případ, nebo konečně vzrůst teplot $U(X, \Phi)$ a $T(X, \Phi)$ nad všechny meze pro $\Phi \rightarrow \infty$.

Případ 8a. Přejít na případ 8a je, jak patrně z tab. 3, triviální.

Případ 7c. Řešení bude

$$\Theta_1(X_1, \Phi) = 1 - \left[1 - X_1^2 + \frac{2}{LB_2 \operatorname{tgh} B_2} + \frac{1}{ZL^2 B_2^2} \right]^{-1} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\cos \Delta_{1n}} \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] \cos \Delta_{1n} X_1, \quad (22-1)$$

kde při značení $D_{2n} = \sqrt{\Delta_{2n}^2 - B_2^2}$ je

$$\beta_n = \frac{\frac{1}{L} \frac{\Delta_{1n}}{D_{2n}} \left(\frac{1}{ZL^2} \cdot \frac{1}{B_2^2} - \frac{1}{\Delta_{1n}^2} \right)}{-\frac{\Delta_{2n}}{D_{2n}} + \frac{\Delta_{2n}^2 \Delta_{1n}}{LD_{2n}^3} + \frac{\Delta_{1n} \operatorname{tg} D_{2n}}{\sin^2 \Delta_{1n}} - \frac{\Delta_{2n}^2 \operatorname{ctg} \Delta_{1n}}{D_{2n} \cos^2 D_{2n}}}. \quad (22a)$$

Dále pak

$$\Theta_2(X_2, \Phi) = 1 - \left[\frac{1}{ZL^2 B_2^2} + \frac{2}{LB_2 \operatorname{tgh} B_2} \cosh B_2 X_2 - \frac{2}{LB_2} \sinh B_2 X_2 \right]^{-1} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] (\cos D_{2n} X_2 + \operatorname{tg} D_{2n} \cdot \sin D_{2n} X_2), \quad (22-2)$$

kde δ_n jsou kořeny transcendentní rovnice

$$\operatorname{ctg} \Delta_{1n} \cdot \operatorname{tg} D_{2n} = -\frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta_{1n}}{D_{2n}}. \quad (22b)$$

Případ 7b. V tomto případě stačí dosadit $Z = 1$.

Případ 7a. Poměrná teplota prvního úseku tyče bude

$$\Theta_1(X_1, \Phi) = 1 - \left(1 - X_1^2 + \frac{2}{LB_2 \operatorname{tgh} B_2} \right)^{-1} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\cos \Delta_{1n}} \cdot \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] \cos \Delta_{1n} X_1, \quad (23-1)$$

kde

$$\beta_n = \frac{-\frac{1}{L} \frac{1}{D_{2n} \Delta_{1n}}}{-\frac{\Delta_{2n}}{D_{2n}} + \frac{\Delta_{2n}^2 \Delta_{1n}}{LD_{2n}^3} + \frac{\Delta_{1n} \operatorname{tg} D_{2n}}{\sin^2 \Delta_{1n}} - \frac{\Delta_{2n}^2 \operatorname{ctg} \Delta_{1n}}{D_{2n} \cos^2 D_{2n}}}. \quad (23a)$$

Poměrné oteplení druhého úseku tyče bude

$$\Theta_2(X_2, \Phi) = 1 - \left(\frac{2}{LB_2 \operatorname{tgh} B_2} \cdot \cosh B_2 X_2 - \frac{2}{LB_2} \sinh B_2 X_2 \right)^{-1} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp \left[-\Phi \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^2 \right] (\cos D_{2n} X_2 + \operatorname{tg} D_{2n} \cdot \sin D_{2n} \cdot X_2). \quad (23-2)$$

$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} U$ a $\lim_{\Phi \rightarrow \infty} T$ obdržíme stejně jako v případě 8b. Jmenovatele zlomku ve vzorci (23-1) i (23-2) vynásobíme číslem $\frac{z_1 l_1^2}{2\lambda}$.

Závěr

Postup řešení zvolených případů oteplování tyčí a desek s vnitřním vývinem tepla ukázal výhody aplikace metody Laplaceovy transformace. Výsledky vyjádřené ve formě kritériálních rovnic umožňují snazší přehlednutí zákonitostí. Dále se ukázalo, že některé ze zvolených případů lze považovat za zvláštní případy jiných obecnějších. Řešení těchto zvláštních případů lze pak nalézt jako limity řešení zmíněných případů obecnějších, pro speciální hodnoty některého z kritérií podobnosti.

Dodatek

V hlavním textu nebylo pro přehlednost provedeno podrobné řešení základních případů. Proto zde uvádíme podrobný výpočet případů 5c, stručný výpočet případů 6 a 8b a odvození ostatních.

Výpočet případu 5c. Parciální diferenciální rovnice zní

$$U_{xx}(x, \tau) - \frac{1}{K} U_{\tau}(x, \tau) + \frac{1}{h} U(x, \tau) = -\frac{z_0}{\lambda}, \quad \text{kde } \frac{1}{h} = \frac{z_0 x}{\lambda} - \frac{\partial_1 0}{\lambda P} \quad (24)$$

a počáteční a okrajové podmínky budou $U(x, 0) = 0$; $U_x(0, \tau) = 0$; $U_x(l, \tau) = -\frac{\partial}{\lambda} U(l, \tau)$. Podobně jako u případu 1 provedeme nejprve Laplaceovu transformaci dle τ

$$u_{xx}(x, p) - \xi^2 u(x, p) = -\frac{1}{p} \frac{z_0}{\lambda}, \quad \text{kde } \xi^2 = \frac{p}{K} - \frac{1}{h}. \quad (24a)$$

Řešení rovnice (24a) má opět tvar

$$u(x, p) = \frac{z_0}{\lambda} \frac{1}{p \xi^2} + \left(a - \frac{z_0}{\lambda} \frac{1}{p \xi^2} \right) \cosh \xi x + \frac{b}{\xi} \sinh \xi x. \quad (25)$$

Konstanty a, b určíme dosazením z obrazů okrajových podmínek $u_x(0, p) = 0$ a $u_x(l, p) = -\frac{\partial}{\lambda} u(l, p)$. Řešení obdržíme posléze v integrální formě

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z}{\lambda} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{\exp(\zeta\tau)}{\zeta \left(\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h} \right)} d\zeta - \frac{z}{\lambda} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{\exp(\zeta\tau)}{\zeta \left(\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h} \right)} \cdot \frac{\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot x}{\frac{\lambda}{\partial} \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l} \cdot d\zeta \right\}. \quad (26)$$

První integrand má póly prvního řádu v bodech $\zeta = 0$ a $\zeta = \frac{K}{h}$. Příslušná residua jsou

$$\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{e^{\zeta\tau}}{\zeta \left(\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h} \right)} = -h \quad \text{a} \quad \operatorname{Res}_{\zeta=\frac{K}{h}} \frac{e^{\zeta\tau}}{\zeta \left(\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h} \right)} = h \cdot \exp\left(\frac{K}{h}\tau\right).$$

Druhý integrand má opět póly prvního řádu v bodě $\zeta = 0$ a $\zeta = \frac{K}{h}$. Pro residuum v $\zeta = 0$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \frac{\exp(\zeta\tau)}{\zeta \left(\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h} \right)} \cdot \frac{\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot x}{\frac{\lambda}{\partial} \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l} &= \\ &= -h \frac{\cos \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot x}{-\frac{\lambda}{\partial} \sqrt{\frac{1}{h}} \sin \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot l + \cos \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot l} \end{aligned}$$

a pro residuum v bodě $\zeta = K/h$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\exp(\zeta\tau)}{\left[\zeta \left[\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h} \right) \right] \right]} \cdot \frac{\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot x}{\frac{\lambda}{\partial} \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l} \right\}_{\zeta=\frac{K}{h}} &= \\ &= h \exp\left(\frac{K}{h}\tau\right). \end{aligned}$$

Druhý integrand má ještě další póly prvního řádu v bodech $\zeta = \zeta_n$, kde ζ_n jsou kořeny rovnice

$$f(\zeta) = \frac{\lambda}{\partial} \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l = 0.$$

Označme

$$\zeta = \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l = i\delta$$

a máme pak

$$f(\zeta) = -\frac{\lambda}{\vartheta l} \delta \sin \delta + \cos \delta = 0$$

a dále

$$\delta \operatorname{tg} \delta = \frac{\vartheta \cdot l}{\lambda}, \quad (26a)$$

kde stačí omezit se na $\delta_n \geq 0$ (za předpokladu, že $\zeta_n \neq \frac{K}{h}$).

Bude tedy

$$\zeta_n = K \left(\frac{1}{h} - \frac{\delta_n^2}{l^2} \right).$$

Pro residua v bodech $\zeta = \zeta_n$ máme tedy

$$\frac{\exp \left[K \left(\frac{1}{h} - \frac{\delta_n^2}{l^2} \right) \tau \right] \cos \delta_n \frac{x}{l}}{-K \left(\frac{1}{h} - \frac{\delta_n^2}{l^2} \right) \frac{\delta_n^2}{l^2} \cdot \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\lambda}{\vartheta} \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K} - \frac{1}{h}} \cdot l \right)_{\zeta=\zeta_n}}$$

Provedeme-li derivaci a dosadíme za ζ_n , dostaneme

$$\frac{1}{2K\delta_n} \frac{\lambda l}{\vartheta} \left[\left(1 + \frac{\vartheta l}{\lambda} \right) \sin \delta_n + \delta_n \cos \delta_n \right].$$

Dosadíme-li ještě z (26a) za $\delta_n \cos \delta_n = \frac{\lambda}{\vartheta l} \delta_n^2 \sin \delta_n$ a máme konečně pro residua v bodech $\zeta = \zeta_n$

$$\frac{\exp \left[K \left(\frac{1}{h} - \frac{\delta_n^2}{l^2} \right) \tau \right] \cos \delta_n \frac{x}{l}}{\frac{\lambda}{\vartheta} \frac{\delta_n}{2l^3} \left(\frac{l^2}{h} - \delta_n^2 \right) \left(1 + \frac{\vartheta l}{\lambda} + \frac{\lambda}{\vartheta l} \cdot \delta_n^2 \right) \sin \delta_n}$$

Řešení tedy bude, dosadíme-li za $\frac{1}{h}$ a dosadíme-li do (26) $\Sigma \operatorname{Res}$ za integrály,

$$U(x, \tau) = \frac{z_0 P}{z_0 x P - \vartheta_1 O} \cdot \left(\frac{\cos \sqrt{\frac{z_0 x}{\lambda} - \frac{\vartheta_1 O}{\lambda P}} \cdot x}{- \frac{\lambda}{\vartheta} \sqrt{\frac{z_0 x}{\lambda} - \frac{\vartheta_1 O}{\lambda P}} \sin \sqrt{\frac{z_0 x}{\lambda} - \frac{\vartheta_1 O}{\lambda P}} \cdot l + \cos \sqrt{\frac{z_0 x}{\lambda} - \frac{\vartheta_1 O}{\lambda P}} \cdot l} - 1 \right) +$$

²¹⁾ Tabulka prvního kořene této funkce, viz JAHNKE, EMDE [8] a prvních 6 kořenů viz CARSLAW a JAEGER [1], str. 378.

$$+ \frac{2\vartheta z_0 l^3}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left[\frac{1}{\rho c} \left(z_0 \alpha - \frac{\vartheta_1 O}{P} - \lambda \frac{\delta_n^2}{l^2} \right) \tau \right] \cdot \cos \delta_n \frac{x}{l}}{\delta_n \left(\frac{z_0 \alpha l^2}{\lambda} - \frac{\vartheta_1 O l^2}{\lambda P} - \delta_n^2 \right) \left(1 + \frac{\vartheta l}{\lambda} + \frac{\lambda}{\vartheta l} \delta_n^2 \right) \sin \delta_n}. \quad (27)$$

Po zavedení příslušných bezrozměrných parametrů obdržíme konečně již uvedené rovnice (12) až (12c).

Z tab. 2 je, jak již bylo uvedeno, patrné, že případy 1 až 5b jsou jen speciální případy případu 5c. Toho využijeme pro výpočet případů 5b až 3a z řešení 5c.

Případ 5b. Máme tu $A_1 = 0$ a dále $\lim_{A_1 \rightarrow 0} A_{12} = iA_2$. Z toho plynou změny znamének a změna trigonometrických funkcí na hyperbolické oproti řešení 5c.

Případ 5a. Máme $A_2 = 0$ a $A_{12} = A_1$. Řešení obdržíme jednoduše dosazením, při čemž se tvar řešení 5c nemění.

Případ 4b a 4a. Máme tu především $B_i = 0$. Pro kořeny rovnice (26a) $\delta \operatorname{tg} \delta = B_i$ obdržíme po dosazení za $B_i = 0$ pro δ_n hodnoty $\pi, 2\pi, \dots, n\pi$. Nyní vypočteme limitu β_n/δ_n pro $B_i \rightarrow 0$:

$$\lim_{B_i \rightarrow 0} \frac{\beta_n}{\delta_n} = \lim_{B_i \rightarrow 0} \frac{1}{\left[1 + B_i + \frac{\delta_n^2(B_i)}{B_i} \right] \frac{\delta_n(B_i) \sin \delta_n(B_i)}{B_i}}.$$

Při stanovení limity vyjdeme z následující úvahy. Budiž $1 \gg B_i > 0$. Pak i pro δ_1 bude $1 \gg \delta_1 > 0$ a proto $\delta_1 \doteq \operatorname{tg} \delta_1$. Proto můžeme místo (26a) psát $\delta_1^2 \doteq B_i$. Pak platí

$$\frac{\delta_1^2(B_i)}{B_i} \doteq \frac{B_i}{B_i} = 1$$

a protože platí také $\delta_1(B_i) \doteq \sin \delta_1(B_i)$, máme

$$\frac{\delta_1(B_i) \sin \delta_1(B_i)}{B_i} \doteq 1.$$

Je tedy $\lim_{B_i \rightarrow 0} \beta_1/\delta_1 = \frac{1}{2}$, kdežto $\lim_{B_i \rightarrow 0} \beta_n/\delta_n = 0$ pro $n > 1$ neboť $\delta_n(B_i) > 0$.

Limita výrazu

$$\frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{4}{\cos A_{12} X} - 1 \right) \cdot \frac{1}{(\delta_n^2 - A_{12}^2)}$$

je pro $n = 1$ jak snadno nahlédneme rovna dvěma, takže obdržíme pro řešení případu 4b, vztahy (14) a (14a) a po dosazení $A_1 = 0$ řešení případu 4a (15) a (15a).

Případ 3c. V tomto případě $B_i \rightarrow \infty$ a z toho plyne

$$\lim_{B_i \rightarrow \infty} \frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{-\frac{A_{12}}{B_i} \sin A_{12} + \cos A_{12}} - 1 \right) = \frac{2}{A_{12}^2} \left(\frac{\cos A_{12} X}{\cos A_{12}} - 1 \right).$$

Dále bude $\delta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ a tedy

$$\lim_{B_i \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{B_i \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\frac{1}{B_i} + 1 + \frac{\delta_n^2(B_i)}{B_i} \right] \sin \delta_n(B_i)} = (-1)^{n+1}.$$

Dosazením obdržíme řešení 3c (16, 16b).

Případ 3b a 3a. Do výsledku 3c dosadíme A_1 resp. A_2 rovno nule. Nutno dbát toho, že v případě 3b se mění znaménka a trigonometrické funkce na hyperbolické, jako v případě 5b.

Výpočet případu 6. Mějme jako v případě 1 tyč o délce l_1 a o tepelné vodivosti λ_1 v bodě $x = 0$ a na povrchu tepelně izolovanou. V tyči se vyvíjí za sekundu v objemové jednotce teplo z , nezávisle na teplotě tyče. Toto teplo se odvádí do druhé tyče stejného průřezu, délky l_2 a tepelné vodivosti λ_2 , která je na konci udržována na teplotě 0°C .

Oteplování obou tyčí bude popsáno dvěma parciálními diferenciálními rovnicemi. Značíme-li teplotu v první tyči $U(x_1, \tau)$, teplotu v druhé tyči $T(x_2, \tau)$ a značí-li $x_{1,2}$ vzdálenost od počátku tyče první resp. druhé, máme

$$U_{xx}(x_1, \tau) - \frac{1}{K_1} U_\tau(x_1, \tau) = -\frac{z}{\lambda_1} \quad (28-1)$$

a

$$T_{xx}(x_2, \tau) - \frac{1}{K_2} T_\tau(x_2, \tau) = 0, \quad (28-2)$$

s počátečními a okrajovými podmínkami $U(x_1; 0) = T(x_2; 0) = 0$; $U_x(0; \tau) = 0$, $\lambda_1 U_x(l_1; \tau) = \lambda_2 T_x(0; \tau)$; $U(l_1; \tau) = T(0; \tau)$ a $T(l_2; \tau) = 0$. Provedeme-li postupně jako v předchozích případech nejprve Laplaceovu transformaci vzhledem k proměnné τ , obdržíme obraz řešení

$$u(x_1, p) = \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{pq_1^2} + \left(a_1 = \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{pq_1^2} \right) \cosh q_1 x_1 + \frac{b_1}{q_1} \sinh q_1 x_1 \quad (29-1)$$

a

$$t(x_2, p) = a_2 \cosh q_2 x_2 + \frac{b_2}{q_2} \sinh q_2 x_2. \quad (29-2)$$

Z dosazení do obrazů jednotlivých okrajových podmínek máme

$$u_x(0, p) = q_1 \left(a_1 - \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{pq_1^2} \right) \sinh q_1 0 + b_1 \cosh q_1 0 = 0,$$

tedy $b_1 = 0$ a

$$t(l_2, \tau) = a_2 \cosh q_2 l_2 + \frac{b_2}{q_2} \sinh q_2 l_2 = 0,$$

tedy $b_2 = -a_2 q_2 \operatorname{ctgh} q_2 l_2$. Z obrazů společných okrajových podmínek získáme dvě rovnice pro obě neznámé konstanty $a_{1,2}$

$$\lambda_1 q_1 \left(a_1 - \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} \right) \sinh q_1 l_1 = \underbrace{\lambda_2 q_2 a_2 \sinh q_2 l_2}_0 - \lambda_2 q_2 a_2 \operatorname{ctgh} q_2 l_2,$$

$$\frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} + \left(a_1 - \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} \right) \cosh q_1 l_1 = a_2 - \underbrace{a_2 \operatorname{ctgh} q_2 l_2 \sinh q_2 l_2}_0.$$

Eliminací obdržíme přímo

$$a_1 = \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} \frac{(\cosh q_1 l_1 - 1) \lambda_2 q_2 \operatorname{ctgh} q_2 l_2 + \lambda_1 q_1 \sinh q_1 l_1}{\lambda_1 q_1 \sinh q_1 l_1 + \lambda_2 q_2 \cosh q_1 l_1 \operatorname{ctgh} q_2 l_2} =$$

$$= \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} \left(1 - \frac{\cosh q_2 l_2}{\frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 q_2} \sinh q_1 l_1 \cdot \sinh q_2 l_2 + \cosh q_1 l_1 \cdot \cosh q_2 l_2} \right)$$

a

$$a_2 = \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} \frac{\operatorname{tgh} q_1 l_1}{\frac{\lambda_2 q_2}{\lambda_1 q_1} \operatorname{ctgh} q_2 l_2 + \operatorname{tgh} q_1 l_1} =$$

$$= \frac{z}{\lambda_1} \frac{1}{p q_1^2} \frac{\sinh q_1 l_1 \sinh q_2 l_2}{\frac{\lambda_2 q_2}{\lambda_1 q_1} \cosh q_2 l_2 \cosh q_1 l_1 + \sinh q_1 l_1 \sinh q_2 l_2}.$$

Řešení je tedy v integrální formě

$$U(x_1, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z K_1}{\lambda_1} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{\exp \zeta \tau}{\zeta^2} d\zeta - \frac{z K_1}{\lambda_1} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{\exp \zeta \tau}{\zeta^2} \cdot \right.$$

$$\frac{\cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} l_2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} \cdot l_1 \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2 + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} \cdot l_1 \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2} \cdot \left. \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} x_1 d\zeta \right\}, \quad (30 - 1)$$

$$T(x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{zK_1}{\lambda_1} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} \frac{\exp \zeta \tau}{\zeta^2} \cdot \frac{\sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} l_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2 \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} \cdot l_1 + \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} \cdot l_1 + \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2} \cdot \left(\sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2 \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot x_2 - \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2 \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot x_2 \right) d\zeta \right\}. \quad (30-2)$$

Pro $U(x_1, \tau)$ snadno odvodíme, že první integrál řešení dává $\frac{zK_1}{\lambda_1} \tau$. Dále má druhý integrand především pól druhého řádu v bodě $\zeta = 0$. Hodnotu residua v bodě $\zeta = 0$ obdržíme opět jako koeficient A_{-1} Laurentově řadě integrandu v okolí bodu $\zeta = 0$. K tomu účelu rozvineme všechny hyperbolické funkce a $e^{\zeta \tau}$ v řady, sečteme obě řady ve jmenovateli, vynásobíme čitatele i jmenovatele a konečně provedeme dělení a máme

$$A_{-1} = -\frac{zK_1}{\lambda_1} \tau + \frac{z}{2\lambda_1} (l_1^2 - x_1^2) + \frac{zl_1 l_2}{\lambda_2}.$$

Druhý integrand má ještě další póly prvního řádu v bodech $\zeta_n = \delta_n^2$, $n = 1, 2, \dots$, kde δ_n jsou kořeny transcendentní rovnice

$$\operatorname{tg} \frac{l_1}{\sqrt{K_1}} \delta \cdot \operatorname{tg} \frac{l_2}{\sqrt{K_2}} \delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_2 \varrho_2 c_2}{\lambda_1 \varrho_1 c_1}}. \quad (31)$$

Pro $\zeta = \zeta_n$ totiž platí

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta_n}{K_1}} \cdot l_1 \sinh \sqrt{\frac{\zeta_n}{K_2}} \cdot l_2 + \cosh \sqrt{\frac{\zeta_n}{K_1}} l_1 \cosh \sqrt{\frac{\zeta_n}{K_2}} \cdot l_2 = 0, \quad (32)$$

takže pro residua v bodech $\zeta = \zeta_n$ máme

$$\left(\frac{\exp \zeta \tau}{\zeta^2} \frac{A}{B} \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} x_1 \right)_{\zeta_n} = 2 \frac{C}{D} \cdot \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} x_1,$$

kde

$$A = \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2,$$

$$B = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} \cdot l_1 \sinh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2 + \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_1}} \cdot l_1 \cosh \sqrt{\frac{\zeta}{K_2}} \cdot l_2 \right),$$

$$C = \exp[-\delta_n^2 \tau] \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} \cdot l_2,$$

$$D = \delta_n^3 \left[\cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\sqrt{K_2}}{K_1} l_1 + \frac{l_2}{\sqrt{K_2}} \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{l_2}{\sqrt{K_1}} + \frac{l_1}{\sqrt{K_1}} \right) \right].$$

Pro funkci $T(x_2; \tau)$ nalezneme stejným postupem jako výše z residua v pólu druhého řádu $\zeta = 0$ pro část řešení, která vyhovuje ustálenému stavu proudění tepla, tj. pro $\tau \rightarrow \infty$, $\frac{z l_1}{\lambda_2} (l_2 - x_2)$. Časově proměnnou část řešení nalezneme

jako shora, jako součet residuí v pólech prvního řádu v bodech $\zeta = \zeta_n$, kde opět, jak se snadno přesvědčíme, $\zeta_n = -\delta_n^2$ jsou-li δ_n , $n = 1, 2, \dots$ kořeny transcendentní funkce (31). Residua v bodech $\zeta = \zeta_n$ budou

$$2 \cdot \frac{A}{B}$$

$$A = \exp. [\delta_n^2 \tau] \left(-\sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} x_2 + \right. \\ \left. + \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} x_2 \right)$$

$$B = \delta_n^3 \left[\cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\sqrt{K_1}}{K_2} l_2 + \frac{l_1}{\sqrt{K_1}} \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{l_1}{\sqrt{K_2}} + \frac{l_2}{\sqrt{K_2}} \right) \right].$$

Uvážíme-li, že (viz 31)

$$\sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 = + \frac{1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}} \cdot \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1 \cos \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} l_2$$

a dosadíme-li za $\sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_2}} \cdot l_2 \sin \frac{\delta_n}{\sqrt{K_1}} l_1$, obdržíme konečně

$$U(x_1, \tau) = \frac{z}{2\lambda_1} (l_1^2 - x_1^2) + \\ + \frac{z l_1 l_2}{\lambda_2} - 2 \frac{z}{\varrho_1 c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^3 \gamma_n} \exp[-\delta_n^2 \tau] \cdot C_{2n} \cos \sqrt{\frac{\varrho_1 c_1}{\lambda_1}} \delta_n x_1, \quad (33 - 1)$$

kde

$$\gamma_n = C_{1n} S_{2n} \left(\frac{\varrho_1 c_1}{\sqrt{\lambda_2 \varrho_2 c_2}} l_1 + \sqrt{\frac{\varrho_2 c_2}{\lambda_2}} l_2 \right) + S_{1n} C_{2n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\varrho_1 c_1}{\lambda_1}} l_2 + \sqrt{\frac{\varrho_1 c_1}{\lambda_1}} \cdot l_1 \right),$$

$$C_{1,2n} = \cos \sqrt{\frac{\varrho_{1,2} c_{1,2}}{\lambda_{1,2}}} \delta_n l_{1,2}, \quad S_{1,2n} = \sin \sqrt{\frac{\varrho_{1,2} c_{1,2}}{\lambda_{1,2}}} \delta_n l_{1,2}, \quad C \operatorname{tg}_{2n} = C_{2n}/S_{2n} \quad (33 - 2)$$

a

$$T(x_2, \tau) = \frac{z l_1}{\lambda_2} (l_2 - x_2) - 2 \frac{z}{\varrho_1 c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-\delta_n^2 \tau]}{\delta_n^3} \left\{ \frac{-C_{1n} C_{2n} C \operatorname{tg}_{2n}}{\gamma_n} \sin \sqrt{\frac{\varrho_2 c_2}{\lambda_2}} \delta_n x_2 + \frac{C_{2n} C_{1n}}{\gamma_n} \cos \sqrt{\frac{\varrho_2 c_2}{\lambda_2}} \delta_n x_2 \right\}.$$

Na výsledku je evidentní, že pro každé τ skutečně platí $U(l, \tau) = T(0, \tau)$.²²⁾

Případ 8b. Zadání toho případu je

$$\begin{aligned} U_{xx}(x_1, \tau) - \frac{1}{K} U_{\tau}(x_1, \tau) + \frac{1}{h_1} U(x_1, \tau) &= -\frac{z_1}{\lambda}, \\ T_{xx}(x_2, \tau) - \frac{1}{K} T_{\tau}(x_2, \tau) + \frac{1}{h_2} T(x_2, \tau) &= -\frac{z_2}{\lambda}, \\ \frac{1}{h_1} &= -\frac{\partial_1 O}{\lambda P} + \frac{z_1 x}{\lambda} \quad \frac{1}{h_2} = -\frac{\partial_2 O}{\lambda P} + \frac{z_2 x}{\lambda}. \end{aligned}$$

Počáteční a okrajové podmínky jsou $U(x_1; 0) = T(x_2, 0) = 0$ dále $U_x(0, \tau) = 0$, $T_x(l_2, 0) = 0$, $U_x(l_1, \tau) = T_x(0, \tau)$ a $U(l_1, \tau) = T(0, \tau)$. Provedeme-li pro obě rovnice Laplaceovu transformaci podle τ a pak nalezneme řešení transformovaných rovnic, obdržíme výsledek analogický k rovnici (29). Postupem jako v případě 6 obdržíme posléze výrazy pro konstantu $a_{1,2}$ a $b_{1,2}$ a po dosazení, výsledek v integrální formě

²²⁾ Chceme-li z řešení 6 odvodit řešení 1, musíme vzít $\lambda_1 = \lambda_2$ a provést limitu pro $l_2 \rightarrow 0$. Z charakteristické rovnice

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{l_1}{K_1}} \delta_n \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{l_2}{K_2}} \delta_n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$$

dostáváme (píšeme stručně l místo l_1 , ϱ místo ϱ_1 atd.)

$$\sqrt{\frac{\varrho c}{\lambda}} \cdot \delta_n l = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dále bude

$$\frac{l_2}{\gamma_n} = \frac{1}{S_{1n}} \sqrt{\frac{\varrho c}{\lambda}} \cdot l,$$

po čemž snadným počtem zjistíme, že $U(x, \tau)$ přejde v řešení případu 1.

$$\begin{aligned}
 U(x_1, \tau) = & \\
 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} & \left[\frac{z_1}{\lambda \zeta \mu_1^2} - \left(\frac{z_1}{\lambda \zeta \mu_1^2} - \frac{z_2}{\lambda \zeta \mu_2^2} \right) \frac{\frac{1}{\sinh \mu_1 l_1} \cdot \operatorname{tgh} \mu_2 l_2}{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \operatorname{ctgh} \mu_1 l_1 \cdot \operatorname{tgh} \mu_2 l_2}} \cdot \cosh \mu_1 x_1 \right] \cdot \\
 & \cdot \exp(\zeta \tau) d\zeta, \quad (34 - 1)
 \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mu_1^2 = \left(\frac{\zeta}{K} + \frac{1}{h_1} \right), \quad \mu_2^2 = \left(\frac{\zeta}{K} + \frac{1}{h_2} \right), \\
 T(x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} & \left[\frac{z_2}{\lambda \zeta \mu_2^2} + \left(\frac{z_1}{\lambda \zeta \mu_1^2} - \frac{z_2}{\lambda \zeta \mu_2^2} \right) \cdot \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \operatorname{ctgh} \mu_1 l_1 \cdot \operatorname{tgh} \mu_2 l_2}} \cdot \right. \\
 \cdot \cosh \mu_2 x_2 - & \left. \left(\frac{z_1}{\lambda \zeta \mu_1^2} - \frac{z_2}{\lambda \zeta \mu_2^2} \right) \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tgh} \mu_2 l_2}{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \operatorname{ctgh} \mu_1 l_1 \cdot \operatorname{tgh} \mu_2 l_2} \cdot \sinh \mu_2 x_2 \right] \exp(\zeta \tau) d\zeta. \quad (34 - 2)
 \end{aligned}$$

Residua v pólech prvního řádu $\zeta = 0$, $\zeta = \frac{K}{h_1}$ a $\zeta = \frac{K}{h_2}$ se naleznou podobně, jak již bylo ukázáno výše. Zbývá ještě určit ζ_n taková, aby platilo

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} + \operatorname{ctgh} \mu_1 l_1 \cdot \operatorname{tgh} \mu_2 l_2 = 0. \quad (35)$$

Dosadíme $\zeta = -\delta^2$ a obdržíme

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\delta^2}{K} + \frac{1}{h_1}} \cdot l_1 \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\delta^2}{K} + \frac{1}{h_2}} \cdot l_2 = - \sqrt{\frac{\frac{\delta^2}{K} + \frac{1}{h_1}}{\frac{\delta^2}{K} + \frac{1}{h_2}}}. \quad (35a)$$

Kořeny této rovnice δ_n zřejmě vyhovují rovnici (35). Residua v pólech prvního řádu $\zeta = \zeta_n$ nalezneme stejným postupem jako v případě 6, takže pro řešení máme po dosazení kritéria podobnosti konečně výsledek (21, -1, -2, 21a, b).

Z řešení 8b obdržíme 7b z úvahy, že $\alpha = 0$ a tedy i $A_1 = 0$ a $B_1 = 0$, dále $\vartheta_1 = 0$, tedy $A_2 = 0$ a $A_{12} = 0$. Dále je $z_1 = z_2$, tedy $Z = 1$ atd.

²³⁾ Místo δ_n^2 dalo by se dosadit stejně tak např. $\zeta_n = -\gamma_n$ atd. Druhou mocninu zavádíme s ohledem na jednotnost všech bezrozměrných kritérií.

LITERATURA

- [1] *H. S. Carslaw, J. C. Jaeger*: Conduction of heat in solids, Oxford 1948.
- [2] *M. Jakob*: Heat transfer, New York 1949.
- [3] *A. В. Лыков*: Теория теплопроводности, Moskva 1950.
- [4] *Technický průvodce 12, Elektrotechnika II, Elektrické stroje I, odd. II — Termika elektrických strojů točivých, nebo též J. Hak TZ MEZ 135, Brno 1952.*
- [5] *R. V. Churchill*: Modern Operational Mathematics in Engineering, New York 1944.
- [6] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*: Методы теории функций, Moskva 1952.
- [7] *I. I. Privalov*: Analytické funkce, Praha 1955.
- [8] *E. Janke, F. Emde*: Elementare Funktionen, Leipzig 1948.
Таблицы функций, Moskva 1949.
- [9] *Л. Н. Седов*: Метод подобия и размерности в механике, Moskva 1951.
- [10] *W. Langhaar*: Dimensional Analysis and Theory of Models, New York, London 1951.

Резюме

ОТЕПЛЕНИЕ ПЛАСТИНОК И СТЕРЖНЕЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В ЗАДАЧЕ ОДНОМЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

АРНОШТ КЕССЛЕР (Arnošt Kessler)

(Поступило в редакцию 25/V 1956 г.)

Целый ряд, в особенности технических, проблем теплопроводности сводится к проблеме одномерного распространения тепла в пластинках (стержнях) конечной длины ($0 \leq x \leq l$) при наличии внутренних источников тепла. В таком случае отопление пластинки описано дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{h} U(x, \tau) = -\frac{z}{\lambda}, \quad \frac{1}{K} > 0, \quad -\infty < \frac{1}{h} < +\infty.$$

В предлагаемой работе это уравнение решается для симметрических случаев, т. е. для краевого условия $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ при нулевой начальной температуре $U(x, \tau) = 0$. Что касается краевых условий на втором конце стержня ($x = l$), то исследуются следующие случаи:

$$1. U(l, \tau) = f(\tau), \quad 2. -\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=l} = f(\tau), \quad 3. -\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=l} = \vartheta U(l, \tau).$$

Образование тепла (от внутренних источников) предполагается постоянным или линейно зависимым от температуры. Затем исследуется еще случай

двух пластинок, имеющих идеальное касание в точке $x = l$, что приводит нас к следующим краевым условиям (величины, касающиеся второй пластинки, обозначены с черточкой):

$$\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=l} = \lambda' \left(\frac{\partial U'}{\partial x'} \right)_{x'=0}, \quad U(l, \tau) = U'(0, \tau).$$

Оказывается, что 13 из 16 случаев, в которых надо было бы проводить решение, можно рассматривать как частные случаи остающихся трех случаев. Частные случаи получим из упомянутых трех общих случаев, придав параметрам системы определенные предельные значения.

Решение общих трех случаев проводится при помощи преобразования Лапласа, и отдельные решения были получены в виде ряда посредством комплексного обратного интеграла.

Решение частных случаев мы получили, как было уже сказано, проведя определенные предельные переходы при подходящих значениях параметров.

Результаты приводятся в виде не имеющих размерности соотношений, в которые превращаются отдельные решения путем введения подходящих, не имеющих размерности, критериев и параметров.

Zusammenfassung

DIE ERWÄRMUNG VON PLATTEN UND ENDLICHEN STÄBEN MIT INNERER WÄRMEERZEUGUNG, BEI EINDIMENSIONALER LÖSUNG DER WÄRMESTRÖMUNG

ARNOŠT KESSLER

(Eingegangen am 25. Mai 1956.)

Eine Reihe technischer Probleme der Wärmeleitung lassen sich auf das eindimensionale Problem der Wärmeleitung in Platten (Stäben) endlicher Länge ($0 \leq x \leq l$) mit innerer Wärmeerzeugung reduzieren. Die Erwärmung der Platte ist in diesem Falle durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial \mu(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{h} U(x, \tau) = -\frac{z}{\lambda}, \quad \frac{1}{K} > 0, \quad -\infty < \frac{1}{h} < +\infty$$

gegeben.

In der vorgelegten Arbeit wird diese partielle Differentialgleichung für symmetrische Fälle gelöst, d. h. mit der Randbedingung $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$ und der

Anfangstemperatur $U(x, \tau) = 0$. Die Randbedingungen am anderen Ende des Stabes ($x = l$) werden für folgende Fälle untersucht:

$$1) U(l, \tau) = f(\tau), \quad 2) -\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=l} = f(\tau), \quad 3) -\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=l} = \vartheta U(l, \tau).$$

Die Wärmeentwicklung wird als konstant oder linear von der Temperatur abhängig angenommen.

Weiter wird noch der Fall der idealen Berührung zweier Platten im Punkte $x = l$ untersucht, was zu folgenden Randbedingungen führt: (Die gestrichelten Größen beziehen sich auf die zweite Platte.)

$$\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=l} = \lambda' \left(\frac{\partial U'}{\partial x'} \right)_{x'=0}, \quad U(l, \tau) = U'(0, \tau).$$

Es zeigt sich, dass man 13 von 16 Fällen, welche für die Lösung in Betracht kommen, als spezielle Fälle der drei übrigen ausdrücken kann. Die speziellen Fälle erhält man aus den drei allgemeinen Fällen wenn die Parameter des Systems bestimmte Grenzwerte annehmen.

Die Lösung der drei grundlegenden Fälle wurde mit Hilfe der Laplaceschen Transformation durchgeführt und die einzelnen Lösungen in der Form von Reihen mit Hilfe des komplexen inversen Integrals erhalten.

Die Lösung der speziellen Fälle wurde, wie schon gesagt, durch bestimmte Grenzübergänge für passende Werte der Parameter erhalten.

Die Ergebnisse sind in Form von dimensionslosen Beziehungen angegeben, in welche die einzelnen Lösungen nach Einführung passender dimensionsloser Kriterien und Parameter übergehen.