Jaroslav Fuka

Řešení prvního problému pružnosti v excentrickém mezikruží

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 1, 45–66

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102601`

ŘEŠENÍ PRVNÍHO PROBLÉMU PRUŽNOSTI V EXCENTRICKÉM MEZIKRUŽÍ

JAROSLAV FUKA

(Došlo dne 22. května 1957.) DT: 539.31

V tomto článku je použito homografického zobrazení k odvození explicitních vzorců pro řešení 1. problému pružnosti v excentrickém mezikruží.

1. V tomto odstavci uvedeme nejprve definici prvního problému pružnosti pro excentrické mezikruží (t. j. pro oblast, ohraničenou dvěma kružnicemi) a pak jej rozřešíme pro speciální případ, pro mezikruží, t. j. oblast ohraničenou dvěma soustřednými kružnicemi.

Umístěme počátek souřadnic do středu vnější kružnice (označení a orientaci hraničních kružnic viz obr. 1). Buďtež dána vnější napětí, působící na kružnice c_0 a c_1. Stanovme z nich funkci hlavního vektoru: $D_0(\Theta)$ na c_0, $D_1(\Theta)$ na c_1[1]), jakožto (obecně komplexní) funkci úhlu Θ (na c_0 je $z = r_0 e^{i\Theta}$, na c_1 $z = z_1 + r_1 e^{i\Theta}$, $z_1 \neq 0$).

Předpokládejme, že $D_0(\Theta)$ a $D_1(\Theta)$ jsou po částech dostatečně hladké (viz [2], str. 109, Definice 2.11.3). První problém pružnosti na excentrickém mezikruží budeme definovat[2]) jako

Problém I. Jest určiti funkce $\varphi(z)$, $\psi(z)$, holomorfní v T, a komplexní konstantu β_1 tak, aby platilo:

1. Funkce $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ a $D(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ jsou spojité v $\overline{T}$[3])

[1]) Fysikálně znamená hlavní vektor výslednici sil, působících na nějaký oblouk. Funkce hlavního vektoru je pak i-násobek ($i^2 = -1$) hlavního vektoru. Přesnou definici těchto pojmů viz v knize [2], str. 94, Definice 2.11.2. Nutno si však uvědomit, že v našem označení je (podle [2], str. 92, úmluva 2.11.1)

$$s = r_1(2\pi - \Theta) \text{ na } k_1, \quad 0 < \Theta \leq 2\pi$$
$$s = 2\pi r_1 + r_0\Theta \text{ na } k_0, \quad 0 \leq \Theta < 2\pi .$$

[2]) Za předpokladu, že výslednice sil (t. j. hlavní vektor), působících na každou z kružnic c_0, c_1, je nulová.

[3]) $\overline{T}$ znamená uzávěr tělesa T.

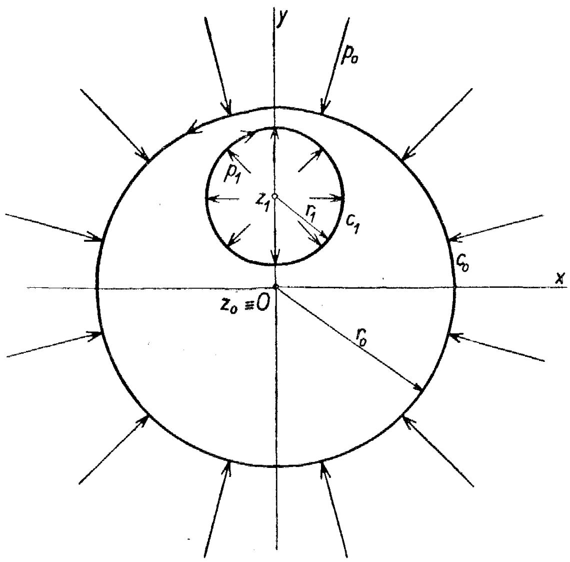
s výjimkou konečného počtu bodů $t_k (k = 1, 2, \ldots, p)$, v jejichž okolí se funkce $\varphi(z)$ a $D(z)$ chovají tak, že

$$|\varphi(z)| \leq \left|\frac{1}{z - t_k}\right|^{\frac{1}{2} - \sigma}, \quad |D(z)| \leq \left|\frac{1}{z - t_k}\right|^{\frac{1}{2} - \sigma}, \quad \sigma > 0 . \tag{1}$$

2. Je-li $z \neq t_k$, je

$$\begin{aligned} D(z) &= D_0(\Theta) \text{ na } c_0 , \\ D(z) &= D_1(\Theta) + \beta_1 \text{ na } c_1 , \end{aligned} \tag{2}$$

kde β_1 jest (komplexní) konstanta.



Obr. 1

Poznámka. Funkce $D_0(\Theta)$ a $D_1(\Theta)$ v definici problému I. jsou předem dané funkce, jejichž fysikální význam je uveden v poznámce pod čarou[1]).

Budiž nyní speciálně T mezikruží. Označme hraniční kružnice k_0, k_1, R_i poloměr $k_i (i = 0,1)$. (Toto označení zachováváme i v dalším textu).

Poněvadž funkce $D_0(\Theta)$, $D_1(\Theta)$ jsou po částech dostatečně hladké, jsou integrovatelné s kvadrátem a lze je tedy formálně rozvinout ve Fourierovu řadu:

$$D_0(\Theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\Theta} , \quad D_1(\Theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\Theta} . \tag{3}$$

Předpokládáme-li, že funkce φ, ψ jsou řešením problému I., lze je uvnitř T rozvinout v Laurentovu řadu. Budiž tedy $\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$, $\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k z^k$. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$D(z) = \varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi} = \sum_{-\infty}^{\infty} [a_k R^k + (2 - k)\,\bar{a}_{2-k} R^{2-k} + \bar{b}_{-k} R^{-k}]\, e^{ik\Theta}\,, \tag{4}$$

kde $z = Re^{i\Theta}$.

Porovnejme nyní koeficienty rozvojů (2) a (4) pro $R = R_0$ a $R = R_1$, nestarajíce se zatím o oprávněnost tohoto kroku. Dostaneme nekonečný systém rovnic o neznámých a_k, b_k, β_1:

$$\begin{aligned} A_k &= a_k R_0^k + (2 - k)\,\bar{a}_{2-k} R_0^{2-k} + \bar{b}_{-k} R_0^{-k}, \quad k \text{ celé},\\ B_k &= a_k R_1^k + (2 - k)\,\bar{a}_{2-k} R_1^{2-k} + \bar{b}_{-k} R_1^{-k}, \quad k \neq 0\,, \text{celé},\\ B_0 + \beta_1 &= a_0 + 2\bar{a}_2 R_1^2 + \bar{b}_0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Zvolme pevně $k \neq 0, 1, 2$. Pak je i $2 - k \neq 0, 1, 2$. Vezměme v úvahu rovnice systému (5) pro $k' = 2 - k$

$$\begin{aligned} A_{2-k} &= a_{2-k} R_0^{2-k} + k\bar{a}_k R_0^k + b_{k-2} R_0^{k-2}\,,\\ B_{2-k} &= a_{2-k} R_1^{2-k} + k\bar{a}_k R_1^k + \bar{b}_{k-2} R_1^{k-2}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Přejdeme-li v rovnicích (6) ke komplexně sdruženým hodnotám, dostáváme ve spojení s rovnicemi systému (5) pro zvolené k soustavu čtyř rovnic pro koeficienty a_k, $\bar{a}_{2-k}$, $\bar{b}_{-k}$, b_{k-2}. Lehce se přesvědčíme, že determinant d_k této soustavy je nenulový[4]), takže koeficienty a_k, a_{2-k}, $\bar{b}_{-k}$, b_{k-2} jsou jednoznačně určeny.

Vypočteme

$$\left.\begin{aligned} &a_k = \frac{\Delta_k}{\mathrm{d}_k}\,, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} \dfrac{A_k}{R_1^k} - \dfrac{B_k}{R_0^k}\,, & (k - 2)\,\dfrac{R_0^2 - R_1^2}{(R_0 R_1)^k} \\ \dfrac{\bar{A}_{2-k}}{R_1^{2-k}} - \dfrac{\bar{B}_{2-k}}{R_0^{2-k}}\,, & \left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^{k-2} - \left(\dfrac{R_1}{R_0}\right)^{k-2} \end{vmatrix}\\ &\text{a}\\ &\bar{b}_{-k} = [A_k - a_k R_0^k + (k - 2)\,\bar{a}_{2-k} R_0^{2-k}]\, R_0^k =\\ &\quad = [B_k - a_k R_1^k + (k - 2)\,\bar{a}_{2-k} R_1^{2-k}] R_1^k\,. \end{aligned}\right\} \tag{7_k}$$

Vypišme nyní rovnice systému (5) pro $k = 0, 1, 2$:

$$a_0 + 2\bar{a}_2 R_0^2 + \bar{b}_0 = A_0\,; \quad a_0 + 2\bar{a}_2 R_1^2 + \bar{b}_0 = B_0 + \beta_1\,, \tag{8_0}$$

---

[4]) Je totiž

$$\mathrm{d}_k = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2(k-1)} + \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{2(k-1)} - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 + k(2 - k)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \left[\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 - 1\right]^2.$$ Označíme-li $a = \left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^2 > 1$, jest $\mathrm{d}_k = \dfrac{1}{a}\,\delta_k(a)$, kde $\delta_k(x) = x^k + x^{2-k} - x^2 - 1 + k(2 - k) \,.\, (x - 1)^2$. Snadno zjistíme $\delta_k(1) = \delta_k'(1) = \delta_k''(1) = \delta_k'''(1) = 0$, $\delta_k^{\mathrm{IV}}(x) = k(k - 1)(k - 2) \,.\, (k - 3)\, x^{k-4} + (k - 2)(k - 1)\, k(k + 1)\, x^{-k-2} > 0$ pro $x \geqq 1$. Odtud již plyne $\delta_k(a) > 0$, tedy $\mathrm{d}_k > 0$.

$$a_1 R_0 + \bar{a}_1 R_0 + \bar{b}_{-1} R_0^{-1} = A_1 \,; \quad a_1 R_1 + \bar{a}_1 R_1 + \bar{b}_{-1} R_1^{-1} = B_1 \,, \tag{8_1}$$

$$a_2 R_0^2 + \bar{b}_{-2} R_0^{-2} = A_2 \,; \quad a_2 R_1^2 + \bar{b}_{-2} R_1^{-2} = B_2 \,. \tag{8_2}$$

Z rovnic (8_1) vidíme, že musí být

$$\operatorname{Im}\,(A_1 R_0 - B_1 R_1) = 0 \,. \tag{9}$$

Snadno zjistíme, že (9) znamená, že hlavní moment M (vzhledem k počátku), kterým vnější zatížení působí na hranici mezikruží T, je nulový.[5]) Pak již z rovnic (8_1) vypočteme

$$2 \operatorname{Re} a_1 = \frac{A_1 R_0 - B_1 R_1}{R_0^2 - R_1^2} \,, \quad \bar{b}_{-1} = \frac{R_0 R_1}{R_0^2 - R_1^2} (B_1 R_0 - A_1 R_1) \tag{10_1}$$

Z rovnic (8_2) vypočteme

$$a_2 = \frac{A_2 R_0^2 - B_2 R_1^2}{R_0^4 - R_1^4} \,, \quad b_2 = R_0^2 R_1^2 \frac{\bar{B}_2 R_0^2 - \bar{A}_2 R_1^2}{R_0^4 - R_1^4} \tag{10_2}$$

Konečně z rovnic (8_0) dostáváme

$$a_0 + \bar{b}_0 = A_0 - 2\bar{a}_2 R_0^2 \,, \quad \beta_1 = A_0 - B_0 - 2\bar{a}_2 (R_0^2 - R_1^2) \,. \tag{10_0}$$

$\varphi(z)$ je tedy systémem (5) jednoznačně určena až na funkci tvaru $icz + d$ (c reálná, d komplexní konstanta). Zvolíme-li konstantu d, je ψ jednoznačně určena. To souhlasí s větou o jednoznačnosti řešení prvního problému pružnosti (viz [2], str. 208, věta 3.2.2).

Nyní vznikají otázky: konvergují vůbec nalezené řady v T? A dále: konvergují-li, jsou řešením problému I. v T? Na tyto otázky nyní odpovíme.

Podle [2], věta 3.3.1, str. 219, existují holomorfní funkce φ^*, ψ^*, jež řeší problém I. Funkce φ^*, ψ^* jsou jednoznačně určeny ve smyslu zmíněné již věty 3.2.2, str. 208, [2]. Nechť tedy platí $\varphi^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^* z^n$, $\psi^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n^* z^n$, při čemž

$$a_n^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_\varrho} \varphi^*(\zeta)\, \zeta^{-(n+1)}\, d\zeta \,, \quad b_n^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_\varrho} \psi^*(\zeta)\, \zeta^{-(n+1)}\, d\zeta \,, \tag{11}$$

kde k_ϱ je kružnice se středem v počátku a poloměrem ϱ, $R_1 < \varrho < R_0$. Poněvadž funkce $D^*(z) = D^*(\varrho, \Theta)$ má na k_0, k_1 podle podmínky 1. def. 1 omezený

---

[5]) Jest totiž $M = \operatorname{Re}(\int_{k_0} \overline{D_0(t)}\, dt + \int_{k_1} \overline{D_1(t)}\, dt)$ $(t = R_l e^{i\Theta}$ na k_l, $l = 1, 2)$ (viz na př. [2], str. 202 a 203). Avšak $\int_{k_0} \overline{D_0(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_k e^{-ik\Theta} i R_0 e^{i\Theta}\, d\Theta = i R_0 \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \bar{A}_k e^{-i(k-1)\Theta}\, d\Theta = 2\pi i R_0 \bar{A}_1$. Záměna integračního a sumačního znamení plyne z podmínky (1) užitím věty 65, str. 121, [5]. Podobně $\int_{k_1} \overline{D_1(t)}\, dt = -2\pi i R_1 \bar{B}_1$ a tedy $M = 2\pi \operatorname{Im}\,(A_1 R_0 - B_1 R_1)$.

růst a poněvadž je uvnitř T spojitá, platí podle věty o záměně limity a integrálu (viz na př. [5], str. 121, věta 65)

$$\lim_{\varrho\to R_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(R_0, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,,$$

$$\lim_{\varrho\to R_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(R_1, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,.$$

Poněvadž se však $D^*(R_0, \Theta)$ a $D_0(\Theta)$ resp. $D^*(R_1, \Theta)$ a $D_1(\Theta)$ liší na k_0 resp. k_1 jen v konečném počtu bodů, jest na k_0 resp. k_1

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_0(\Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(R_0, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta$$

resp.

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_1(\Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(R_1, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,.$$

Konečně tedy platí:

$$A_k = \lim_{\varrho\to R_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\,,$$

$$B_k = \lim_{\varrho\to R_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta \quad (k \neq 0)\,,$$

$$B_0 + \beta_1 = \lim_{\varrho\to R_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(\varrho, \Theta)\, \mathrm{d}\Theta\,. \tag{12}$$

Nyní však (v dalším $\zeta = \varrho e^{i\Theta}$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\zeta\varphi^{*\prime}(\varrho, \Theta)}\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\psi^*(\varrho, \Theta)}\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta + \frac{\varrho}{2\pi} \overline{\int_0^{2\pi} \varphi^{*\prime}(\varrho, \Theta)\, e^{i(k-1)\Theta}\, \mathrm{d}\Theta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \overline{\int_0^{2\pi} \psi^*(\varrho, \Theta)\, e^{-ik\Theta}\, \mathrm{d}\Theta}\,.$$

Vypočtěme každý z těchto integrálů. Jest:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^*(\varrho,\Theta)\, e^{-ik\Theta}\, d\Theta = \frac{\varrho^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^*(\varrho,\Theta)\, \zeta^{-k}\, d\Theta =$$

$$= \frac{\varrho^k}{2\pi i}\int_{k_\varrho} \varphi'^*(\zeta)\, \zeta^{-(k+1)}\, d\zeta = \varrho^k a_k^* \quad \text{podle (11)}\,.$$

Stejně

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi^*(\varrho,\Theta)\, e^{ik\Theta}\, d\Theta = \varrho^{-k} b_k^*\,.$$

Konečně

$$\frac{\varrho}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'^*(\varrho,\Theta)\, e^{i(k-1)\Theta}\, d\Theta = \frac{\varrho^{2-k}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^{*\prime}(\varrho,\Theta)\, \zeta^{k-1}\, d\Theta =$$

$$= \frac{\varrho^{2-k}}{2\pi i}\int_{k_\varrho} \varphi'^*(\zeta)\, \zeta^{k-2}\, d\zeta = (2-k)\, \varrho^{2-k}\, a_{2-k}^* \qquad \text{podle (11)}$$

neboť koeficient u ζ^{1-k} funkce $\varphi^*(z)$ je roven $(2-k)\, a_{2-k}$, kde a_{2-k} je koefficient u z^{2-k} funkce $\varphi^*(z)$. Jest tedy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^*(\varrho,\Theta)\, e^{-ik\Theta}\, d\Theta = a_k^*\varrho^k + (2-k)\, \overline{a_{2-k}^*}\varrho^{2-k} + \overline{b_k^*}\varrho^{-k}\,.$$

Odtud a ze vztahů (11) a (12) plyne

$$\begin{aligned} A_k &= a_k^* R_0^k + (2-k)\, \overline{a_{2-k}^*} R_0^{2-k} + \overline{b_{-k}^*} R_0^{-k}\,, \\ B_k &= a_k^* R_1^k + (2-k)\, \overline{a_{2-k}^*}\, R_1^{2-k} + \overline{b_{-k}^*} R_1^{-k} \quad (k \neq 0)\,, \\ B_0 + \beta_1 &= a_0^* + 2\overline{a_2^*} R_1^2 + \overline{b_0^*}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Systém (13) pro neznámé a_k^*, b_k^*, k celé, je totožný se systémem (5), který jednoznačně určuje $a_k^*(k \neq 0,1)$, $b_k^*(k \neq 0)$, $\operatorname{Re} a_1$, $a_0 + \bar{b}_0$. Poněvadž však funkce holomorfní v mezikruží je jednoznačně určena koeficienty svého Laurentova rozvoje, jest (při vhodné volbě konstant $\operatorname{Im} a_1, a_0$) $\varphi(z) \equiv \varphi^*(z)$, $\psi(z) \equiv \psi^*(z)$. Shrňme výsledek větou:

Věta 1. *Koeficienty Laurentova rozvoje funkcí, jež řeší problém I. na mezikruží, jsou řešením systému* (5), *který se sestaví tak, že se funkce $D(z)$ a $D_0(\Theta)$, $D_1(\Theta)$ rozvinou na kružnicích k_0, k_1 formálně ve Fourierovy řady a porovnají se koeficienty těchto rozvojů.*

Poznámka. Známe-li funkce napětí $\varphi(z)$, $\psi(z)$, určíme složky tensoru napětí X_x, X_y, Y_y podle [2], str. 75, vztahy 2.8.13, 2.8.14, 2.8.15.

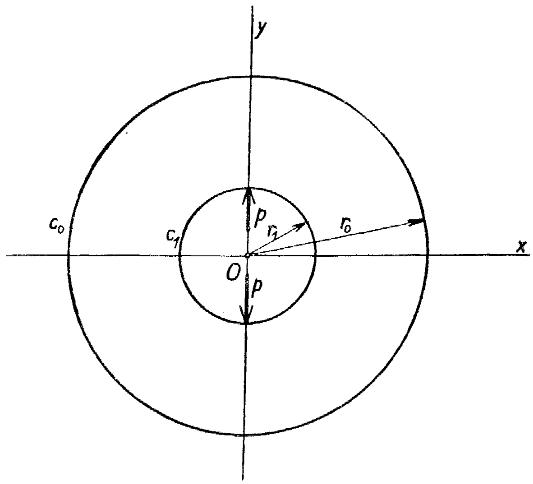
Na závěr tohoto odstavce uveďme příklad na výpočet koeficientů Laurentových rozvojů funkcí napětí $\varphi(z)$, $\psi(z)$ na mezikruží, které je zatíženo dvěma osamělými břemeny velikosti p podle obr. 2.

Je zřejmé, že funkce hlavního vektoru je dána takto:

$$D_1(\Theta) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq \Theta < \frac{\pi}{2},$$

$$D_0(\Theta) = 0\,; \quad D_1(\Theta) = -p \quad \text{pro} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \Theta < \frac{3\pi}{2},$$

$$D_1(\Theta) = 0 \quad \text{pro} \quad \frac{3\pi}{2} \leqq \Theta < 2\pi\,.$$



Obr. 2

Fourierovy koeficienty jsou (zachováváme označení z (3)!):

$$A_k = 0\,, \; B_0 = -\pi p\,, \; B_{2k} = 0 \; (k \neq 0)\,, \; B_{4k+1} = \frac{-2p}{4k+1}\,, \; B_{4k+3} = \frac{2p}{4k+3}\,.$$

Ze vzorců (10_1), (10_2), (10_3) pak máme:

$$\beta_1 = \pi p\,, \; a_0 + \bar{b}_0 = 0\,, \; \operatorname{Re} a_1 = \frac{pR_1}{R_0^2 - R_1^2}\,, \; b_{-1} = \frac{-2pR_0^2R_1}{R_0^2 - R_1^2}\,, \; a_2 = b_{-2} = 0\,.$$

Ostatní koeficienty vypočteme ze vzorců (7_k).

2. Přistupme nyní k řešení problému I. na excentrickém mezikruží T.

Excentrické mezikruží lze snadno zobrazit pomocí homografického zobrazení $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$, $ad - bc \neq 0$, na mezikruží se středem v počátku. Touto transformací přejdou funkce napětí $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ve funkce $\varphi^*(w)$, $\psi^*(w)$ a funkce $D(z)$ ve funkci $D^*(w) = \varphi^*(w) +$

$$+ \frac{\overline{(cw + d)^2}}{ad - bc} \frac{aw + b}{cw + d} \overline{\frac{\mathrm{d}\varphi^*(w)}{\mathrm{d}w}} + \overline{\frac{\mathrm{d}\psi^*(w)}{\mathrm{d}w}} .$$

Pokusíme-li se však metodou odstavce 1. nalézt holomorfní funkce $\varphi^*(w)$, $\psi^*(w)$ splňující transformovanou krajovou podmínku, zjistíme, že se nám nekonečný systém pro koeficienty funkcí $\varphi^*(w)$, $\psi^*(w)$ nerozpadne a že neumíme nalézt explicitní vzorce pro koeficienty, jako se nám to podařilo v odstavci 1. Snadno se přesvědčíme, že ani umělé úpravy (na př. vynásobení $D^*(w)$ dvojčlenem $cw + d$ a pod.) nevedou k cíli. Viz ostatně počátek § 64, str. 231 knihy [1].

Pokusíme se tedy nalézt funkce $f(w)$, $h(w)$ $\left(w = \dfrac{az + b}{cz + d}\right.$ zobrazuje T na mezikruží $\left.T_1\right)$, svázané jistým způsobem s $\varphi(z)$, $\chi(z)$, $(\chi'(z) = \psi(z))$ tak, aby funkce $U_1(w) = \mathrm{Re}\,[\overline{w}f(w) + h(w)]$ byla biharmonická a abychom uměli vyjádřit krajovou podmínku pro funkci $U_1(w)$ pomocí krajové podmínky pro funkci $U(z) = \mathrm{Re}\,[\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)]$. To je smysl věty 2, kterou nyní vyslovíme.

Věta 2. *Budiž T těleso, jež neobsahuje bod $z = -c$, T_1 těleso, které vznikne z T transformací $w = \dfrac{az + b}{z + c}$, $ac - b \neq 0$, reálné.*

Budiž $U(z) = \mathrm{Re}\,[\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)]$ funkce biharmonická na T, $U_1(w) = \mathrm{Re}\,[\overline{w}f(w) + h(w)]$ funkce biharmonická na T_1. Nechť funkce $f(w)$, $h(w)$ jsou s funkcemi $\varphi(z)$, $\chi(z)$ svázány vztahy

$$\varphi(z) = \frac{1}{w - a} [h(w) + \overline{a}f(w)] , \quad \chi(z) = \frac{1}{w - a} [\overline{c}h(w) + (b - ac + \overline{ac}) f(w)] . \tag{14}$$

Potom platí

$$f(w) + w \overline{\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}} + \overline{\frac{\mathrm{d}h(w)}{\mathrm{d}w}} = \frac{\overline{z + c}}{z + c} \left[\frac{2U(z)}{\overline{z + c}} - \left(\varphi(z) + z \overline{\frac{\mathrm{d}\varphi(z)}{\mathrm{d}z}} + \overline{\frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}}\right)\right] \tag{15}$$

a

$$U(z) = \frac{b - ac}{|w - a|^2} U_1(w) . \tag{16}$$

Důkaz. Lehce nahlédneme, že (16) vskutku platí. Dokažme tedy (15). Snadno zjistíme $z = \dfrac{-cw + b}{w - a}$, $z + c = \dfrac{b - ac}{w - a}$, $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \dfrac{ac - b}{(z + c)^2} = \dfrac{(w - a)^2}{ac - b}$ a dále

$$\varphi'(z) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}h(w)}{\mathrm{d}w} + \overline{a} \dfrac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}\right)(w - a) - (h(w) + \overline{a}f(w))}{(w - a)^2} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} =$$

$$= \frac{1}{ac - b} \left(\frac{\mathrm{d}h(w)}{\mathrm{d}w} + \overline{a} \frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}\right)(w - a) - \frac{1}{ac - b} (h(w) + \overline{a}f(w))$$

a podobně

$$\chi'(z) = \frac{1}{ac - b}\left[\frac{\bar{c}\,\mathrm{d}h(w)}{\mathrm{d}w} + (b - ac + \overline{ac})\,\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}\right](w - a) -$$

$$- \frac{1}{ac - b}\,[\bar{c}h(w) + (b - ac + \overline{ac})\,f(w)]\,.$$

Dosazením do (15) a užitím (16) dostaneme po úpravách, v nichž užíváme vztahu $b - ac = \overline{b - ac}$, platnost vztahu (15).

Poznámka. Vztahy (14), (15) lze lehce odvodit pro speciální zobrazení $w = z - a$, $w = \varrho z$, $\varrho \neq 0$, reálné. Obtížnější případ $w = \frac{1}{z}$ je rozřešen v německém překladu knihy [2]. Obecný případ $w = \frac{az + b}{z + c}$, $ac - b \neq 0$, reálné, dostaneme postupným užíváním vztahů pro uvedená speciální zobrazení, neboť lze psát $w = a + \frac{b - ac}{z + c}$. Vzorec (16) je uveden v práci [3].

Vztah (15) ukazuje, jak budeme dále postupovat při řešení problému I. na excentrickém mezikruží T: budeme se snažit stejně jako v odstavci 1 rozvinout funkce $f(w)$, $g(w) = \frac{\mathrm{d}h(w)}{\mathrm{d}w}$, definované v mezikruží T_1 vztahy (14), rozvinout v Laurentovy rozvoje a porovnat $f + w\bar{f}' + \bar{g}$ na hranici T_1 s Fourierovým rozvojem nové krajové podmínky, dané vztahem (15). Abychom tak mohli učinit, musí být $f(w)$, $g(w)$, jednoznačné funkce. Z (14) vypočteme $\frac{b - ac}{w - a}\,f(w) = \chi(z) - \bar{c}\varphi(z)$. $f(w)$ je tedy jednoznačná v T_1 právě tehdy, je-li $\chi(z)$ jednoznačná v T. To však v našem případě nemusí být splněno, neboť excentrické mezikruží není jednoduše souvislá oblast. Další obtíž spočívá v tom, že na hranici T známe pouze $D(z) = D_i(\Theta)$ na c_i, $i = 0,1$ a nikoliv $U(z)$ a že tedy musíme $U(z)$ nějak na hraničních kružnicích c_i definovat, abychom mohli užít podmínky (15). Tyto nesnáze budeme nyní postupně odstraňovat. Předpokládejme nejdříve, že $U(z)$ je jednoznačná v T a že funkce $\varphi(z)$, $\psi(z)$ jsou řešením problému I. v T. Potom na každé kružnici soustředné s c_0 a s poloměrem ϱ, jež leží v T, zřejmě platí ($z = \varrho e^{i\Theta}$)

$$U(z) = \gamma_\varrho + \int_0^s \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s\,,$$

kde γ_ϱ je reálné číslo, s je parametr délky. V našem případě tedy

$$U(\varrho e^{i\Theta}) = \gamma_\varrho + \int_0^\Theta \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\sin\Theta + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\Theta\right)\varrho\,\mathrm{d}\Theta\,.$$

Vzhledem k (1) můžeme užít věty o záměně limity a integrálu a dostaneme

$$U(r_0 e^{i\Theta}) = \gamma_0 + \int_0^{\Theta} (-\operatorname{Re} D_0(\Theta) \sin \Theta + \operatorname{Im} D_0(\Theta) \cos \Theta)\, r_0\, \mathrm{d}\Theta \text{ na } c_0, \tag{17}$$

neboť platí (viz [2], str. 74, vzorec (2.8.1))

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = D(z)$$

a na c_0 je $D(z) = D_0(\Theta)$ s výjimkou konečného počtu bodů. Budeme tedy definovat $U(r_0 e^{i\Theta})$ vztahem (17). Z týchž důvodů budeme na c_1 definovat $U(z_1 + r_1 e^{i\Theta}) = \gamma_1 + \int_{2\pi}^{\Theta} [(\operatorname{Re} D_1(\Theta) + \beta_1) \sin \Theta - \operatorname{Im} (D_1(\Theta) + \beta_1) \cos \Theta]$ $(-r_1)\mathrm{d}\Theta = \gamma_1 + \int_{2\pi}^{\Theta} (-\operatorname{Re} D_1(\Theta) \sin \Theta + \operatorname{Im} D_1(\Theta) \cos \Theta) r_1\, \mathrm{d}\Theta - \operatorname{Re} \beta_1 r_1 +$ $+ \operatorname{Re} \beta_1 r_1 \cos \Theta + \operatorname{Im} \beta_1 r_1 \sin \Theta$ (c_1 je orientována opačně než c_0!) a tedy

$$U(z_1 + r_1 e^{i\Theta}) = \gamma_1 + \int_{2\pi}^{\Theta} (-\operatorname{Re} D_1(\Theta) \sin \Theta + \operatorname{Im} D_1(\Theta) \sin \Theta)\, r_1\, \mathrm{d}\Theta + \\ + \operatorname{Re} [\bar{\beta}_1 (z - z_1) - \beta_1 r_1]\,, \tag{18}$$

kde z_1 je souřadnice středu kružnice c_1.

Obraťme se nyní k mnohoznačnosti funkce $\chi(z)$, t. j. k případu, že $U(z)$ není jednoznačná. Buďtež $\varphi(z)$, $\psi(z)$ řešením problému I. Zobrazíme-li T pomocí zobrazení $w = \dfrac{az + b}{z + c}$ z věty 2 na mezikruží T_1[6]), zjistíme lehce, že funkce

$$\chi^*(w) = \chi(z) = \int_{z_0}^{z} \psi(z)\, \mathrm{d}z$$

bude tvaru

$$\chi^*(w) = \chi_0^*(w) + \alpha \lg w\,,$$

kde $\chi_0^*(w)$ je holomorfní v T_1 a α je komplexní číslo (neboť $\chi^*(w) = \displaystyle\int_{w_0}^{w} \frac{ac - b}{(w - a)^2}\,.$ $.\, \varphi^*(w)\, \mathrm{d}w$, kde $\psi^*(w) = \psi(z)$).

Funkce $\chi(z)$ bude tedy tvaru

$$\chi(z) = \chi_0(z) + \alpha \lg w\,, \tag{19}$$

[6]) Takové zobrazení existuje. Neboť lehce lze ukázat, že existuje homografické zobrazení $w = \dfrac{az + b}{z + c}$, $ac - b \neq 0$, převádějící excentrické mezikruží na mezikruží se středem v počátku tak, že vnitřek kružnice c_0 přejde ve vnitřek k_0 (k_0 je obraz c_0; k_1 leží tedy ve vnitřku k_0). Vynásobení číslem $e^{i \arg (ac - b)}$, t. j. otočením mezikruží, dostaneme zobrazení s vlastnostmi požadovanými větou 2. Zejména bude $z + c \neq 0$ v T a tedy $w - a \neq 0$ v T_1, $a \neq 0$.

kde $\chi_0(z)$ je funkce holomorfní v T, $w = \dfrac{az + b}{z + c}$ je zobrazení s vlastnostmi z věty 2, α je komplexní číslo. Nyní docílíme toho, že bude platit $\operatorname{Im} \alpha = 0$. Platí totiž (viz [1], str. 113, vzorec (3))

$$M = \operatorname{Re} [\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\varphi'(z)]_A^B, \tag{20}$$

kde M je hlavní moment (vzhledem k počátku) uvažovaných napětí působících na oblouk o počátečním bodu A a koncovém bodu B, symbol $[f]_A^B$ znamená $f(B) - f(A)$.

Z (20) vidíme, že $\operatorname{Re} \chi(z)$ a tedy i $U(z)$ je jednoznačná v $\overline{T}$ právě tehdy, je-li $M = 0$ na každé uzavřené křivce, ležící v $\overline{T}$. Poněvadž však je T v rovnováze, stačí k tomu, aby bylo $M = 0$ na c_0. Toho však lehce docílíme přičtením řešení, které má na c_0 hlavní moment rovný $- M$. Takovým řešením jsou funkce napjatosti tvaru $\varphi_1(z) = 0$, $\psi_1(z) = \dfrac{iM}{2\pi(z - z_1)}$ (z_1 je střed c_1), jak se snadno přesvědčíme. Můžeme tedy předpokládat, že $M = 0$ a že $\operatorname{Re} \chi(z)$ a tedy i $U(z)$ je jednoznačná. Poněvadž však má $\chi(z)$ mnohoznačnost tvaru $\alpha \lg w$, jest $\operatorname{Re} \chi(z)$ jednoznačná právě tehdy, je-li $\operatorname{Im} \alpha = 0$. V dalším můžeme tedy předpokládat, že $\chi(z) = \chi_0(z) + \alpha \lg w$, (21), kde $\chi_0(z)$ je holomorfní v T a α je reálné číslo, takže $\operatorname{Re} \chi(z)$ a tedy i $U(z)$ budou jednoznačné v T.

Uvědomme si dále toto: funkce $\varphi(z)$ je určena jednoznačně až na funkci tvaru $Az + B$ a zvolíme-li A, B, je $\psi(z)$ určena jednoznačně. $\operatorname{Re} \chi(z)$ a tedy $\operatorname{Re} \chi_0(z)$ bude určena v tom případě jednoznačně až na reálnou konstantu, která bude dána hodnotou funkce $\operatorname{Re} \chi_0(z)$ v jednom bodě, na př. v bodě $z = r_0$ (neboť souřadný systém lze vzhledem ke konečnému počtu výjimečných bodů funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ na hraničních kružnicích k_0, k_1, zvolit tak, aby bod $z = r_0$ byl bodem spojitosti funkcí φ, ψ). Zvolme tedy $\operatorname{Re} (\chi(r_0))$ tak, aby bylo $U(r_0) = 0$. Pak bude $\operatorname{Re} \chi_0(z)$ jednoznačně určena a ve vzorci (17) bude $\gamma_0 = 0$. Dosaďme konečně $\chi(z) = \chi_0(z) + \alpha \lg w$ do (14). Z druhé rovnice (14) vypočteme

$$\frac{b - ac}{w - a} f(w) = \chi(z) - \bar{c}\varphi(z) = \chi_0(z) - \bar{c}\varphi(z) + \alpha \lg w$$

a tedy

$$f(w) = f_0(w) + \frac{\alpha(w - a)}{b - ac} \lg w\,, \tag{22}$$

kde $f_0(w)$ je holomorfní v $T_1(f_0(w) = \dfrac{w - a}{b - ac} (\chi_0(z) - \bar{c}\varphi(z)))$.

Dosazením (22) do první rovnice (14) dostaneme podobně

$$h(w) = h_0(w) - \frac{\alpha\bar{a}\,(w - a)}{b - ac} \lg w\,, \tag{23}$$

kde $h_0(w)$ je holomorfní v T_1.

Dosazením (22) a (23) do (15) zjistíme vzhledem k $\alpha = \bar{\alpha}$
$\left(\text{píšeme } \frac{\mathrm{d}h_0(w)}{\mathrm{d}w} = g_0(w)\right)$

$$f(w) + w\,\overline{\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}} + \overline{g(w)} = f_0(w) + w\,\overline{\frac{\mathrm{d}f_0(w)}{\mathrm{d}w}} + \overline{g_0(w)} + \\ + \frac{\alpha(w-a)}{b-ac}\left(2\lg|w| + \frac{\overline{w-a}}{\bar{w}}\right),$$

t. j.

$$f_0(w) + w\,\overline{\frac{\mathrm{d}f_0(w)}{\mathrm{d}w}} + \overline{g_0(w)} = \frac{\overline{z+c}}{z+c}\left[\frac{2U(z)}{\overline{z+c}} - D(z)\right] - \\ - \frac{\alpha(w-a)}{b-ac}\left(2\lg|w| + \frac{\overline{w-a}}{\bar{w}}\right), \tag{24}$$

kde

$$D(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$$

Tyto úvahy nás přirozeným způsobem vedou k formulaci.

Problém II. Budiž dán problém I. na excentrickém mezikruží T takový, že hlavní moment vnějšího zatížení je nulový na každé z kružnic c_0, c_1. Budiž T_1 mezikruží, jež vznikne z T transformací $w = \frac{az+b}{z+c}$, $ac - b \neq 0$, reálné. Jest nalézti funkce $f_0(w)$ a $g_0(w)$, holomorfní v T_1, komplexní konstantu β_1 a reálné konstanty γ_1, α tak, aby platilo:

1. Funkce $f_0(w)$ a $h_0(w)$ $\left(g_0(w) = \frac{\mathrm{d}h_0(w)}{\mathrm{d}w}\right)$ jsou s funkcemi $\varphi(z)$ a $\chi_0(z) = \chi(z) - \alpha \lg w$ ($\varphi(z)$ a $\psi(z) = \frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}$ jsou řešením problému I. v T takovým, že platí $U(r_0) = 0$, kde $U(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z))$, svázány vztahy (14).

2. Funkce $h_0(w)$ je holomorfní v T_1.

3. Funkce $f_0(w)$, $f_0'(w)$, $g_0(w)$ a $\Delta(w) = f_0(w) + w\,\overline{\frac{\mathrm{d}f_0(w)}{\mathrm{d}w}} + \overline{g_0(w)}$ jsou spojité v $\overline{T}_1$ s výjimkou konečného počtu bodů $\tau_k (k = 1, 2, \ldots, p)$, v jejichž okolí se funkce $\Delta(w)$ chová tak, že

$$|\Delta(w)| \leq \left|\frac{1}{w-\tau_k}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}, \quad \sigma > 0 \tag{25}$$

4. Je-li $w \neq \tau_k$, je

$$\Delta(w) = \frac{\overline{w-a}}{w-a}\left[2\,\frac{\overline{w-a}}{b-ac}\,U^*(w) - D^*(w)\right] - \\ - \alpha\,\frac{w-a}{b-ac}\left[2\lg|w| + \frac{\overline{w-a}}{\bar{w}}\right] \quad \text{na} \quad k_0, k_1, \tag{26}$$

$U^*(w) = U(z)$, $D^*(w) = D(z)$, kde $U(z)$ je na c_0 definována vzorcem (17), kde klademe $\gamma_0 = 0$, na c_1 vzorcem (18), $D(z) = D_0(\Theta)$ na c_0, $D(z) = D_1(\Theta) + \beta_1$ na c_1.

Pomocná věta 1. *Existuje řešení problému II.*

Důkaz. Existují funkce $\varphi(z)$, $\psi(z)$, řešící problém I. v T s krajovou podmínkou $D(z) = D_0(\Theta)$ na c_0, $D(z) = D_1(\Theta) + \beta_1$ takové, že v (17) platí $\gamma_0 = 0$.

Definujeme-li funkce $f(w)$, $h(w)$ vztahy (14) a $f_0(w)$, $h_0(w)$ vztahy (22), (23), jsou funkce $f_0(w)$, $h_0(w)$ řešením problému II, jak se lehce přesvědčíme opakováním úvah na str. 53—56.

Pomocná věta 2. *Nechť funkce $f_0(w)$, $g_0(w)$ jsou řešením problému II. Nechť $f_0(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k w^k$, $g_0(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k w^k$ a nechť A_k resp. B_k jsou koeficienty Fourierových rozvojů pravých stran vztahů* (26) *na k_0 resp. k_1. Pak platí:*

a) *Koeficienty a_k, b_k vyhovují systému*

$$\begin{aligned} A_k &= a_k R_0^k + (2-k)\,\bar{a}_{2-k} R_0^{2-k} + \bar{b}_{-k} R_0^{-k} \\ B_k &= a_k R_1^k + (2-k)\,\bar{a}_{2-k} R_1^{2-k} + \bar{b}_{-k} R_1^{-k} \end{aligned} \tag{27}$$

b) *A_k, B_k pro $k \neq 0, 1, 2$ nezávisejí na α, β_1, γ_1.*

c) *Je splněna nutná podmínka řešitelnosti systému* (5) $\operatorname{Im}(A_1 R_0 - B_1 R_1) = 0$ *a další podmmínky:*

$$\operatorname{Im} A_1 = \operatorname{Im} B_1 = 0\,, \tag{28}$$

$$A_1 R_1 - B_1 R_0 = 0\,, \tag{29}$$

$$A_0 - B_0 = \frac{2(\overline{A_2 R_0^2 - B_2 R_1^2})}{R_0 + R_1^2} \tag{30}$$

$$R_0^2 \frac{A_1 R_0 + B_1 R_1}{R_0^2 - R_2^1} + 2\varepsilon = \frac{-2\alpha \lg R_0}{b - ac} (R_0^2 + a\bar{a}) + n_0\,. \tag{31$_0$}$$

$$\begin{aligned} R_1^2 \frac{A_1 R_0 - B_1 R_1}{R_0^2 - R_1^2} + 2\varepsilon &= \\ = \frac{2\gamma_1 - \bar{\beta}_1(c + z_1) - \beta_1(\overline{c + z_1}) - r_1(\beta_1 + \bar{\beta}_1) - 2\alpha \lg R_1}{b - ac} &(R_1^2 + a\bar{a}) - \\ - a\beta_1 - \bar{a}\bar{\beta}_1 + n_1 & \end{aligned} \tag{31$_1$}$$

kde ε je reálná část absolutního členu Laurentova rozvoje funkce $h_0(w)$, $n_i (i = 1, 2)$ nezávisejí na α, β_1, γ_1, ε.

Důkaz. a) Poněvadž funkce $w - a$, $\overline{w - a}$, $U^*(w)$ jsou spojité na T_1 (neboť $U(z)$ je spojitá na $\bar{T}$), $w - a \neq 0$, $w \neq 0$ v T_1, a poněvadž $D^*(w)$ je integrovatelná s kvadrátem na k_0, k_1 (neboť $D(z)$ je integrovatelná s kvadrátem na c_0, c_1), lze pravou stranu vztahu (26) rozvinout na k_0, k_1 ve Fourierovu řadu. Poněvadž $f_0(w)$, $g_0(w)$ jsou řešením problému II., platí (25) a tedy doslovným užitím metody odst. 1, str. 48—50 dostáváme tvrzení.

b) Jednoduchými úpravami (užíváme $b - ac = \overline{b - ac}$) dostaneme

$$\frac{w-a}{b-ac}\, 2\operatorname{Re}\,[\gamma_1 + \bar{\beta}_1(z - z_1) - \beta_1 r_1] - \beta_1 \frac{w-a}{\overline{w-a}} =$$

$$\frac{w-a}{b-ac}\, [2\gamma_1 - \bar{\beta}_1(z_1 + c) - \beta_1(\overline{z_1 + c}) - r_1(\beta_1 + \bar{\beta}_1) + \bar{\beta}_1]. \tag{32}$$

Podobně

$$\frac{\alpha(w-a)}{b-ac}\left(2 \lg |w| + \frac{\overline{w-a}}{\bar{w}}\right) = \frac{\alpha(w-a)}{b-ac}\left(2 \lg R_i + 1 - \frac{\bar{a}}{R_i^2}\, w\right) \tag{33}$$

na k_1 $(i = 0,1)$, neboť na k_1 jest $\frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{R_i^2}\, w$ $(i = 0,1)$.

Avšak podle (18) a (26) vyjadřují (32) a (33) příspěvek konstant α, β_1, γ_1 k rozvojům krajových podmínek na k_0, k_1. Z (32) a (33) lehce zjistíme, že koeficienty A_0, A_1, A_2, B_2 závisejí pouze na α, koeficienty B_0, B_1 závisejí na α, β_1, γ_1. Ostatní koeficienty na těchto konstantách nezávisejí.

c) Podle poznámky pod čarou na str. 48 je $\operatorname{Im} A_1 R_0 = \frac{M_0}{2\pi}$, kde M_0 je hlavní moment (vzhledem k počátku) uvažovaných napětí působících na k_0. Podle podmínky 2. v definici problému II. a podle (20) je však $M_0 = 0$, tedy $\operatorname{Im} A_1 R_0 = 0$. Stejně platí $\operatorname{Im} B_1 R_1 = 0$. Poněvadž je splněna podmínka 2. z definice problému II., jest $b_{-1} = 0$. Rovnice systému (27) pro $k = 0, 1, 2$ tedy jsou:

$$a_0 + 2\bar{a}_2 R_0^2 + \bar{b}_0 = A_0\,; \quad a_0 + 2\bar{a}_2 R_1^2 + \bar{b}_0 = B_0 \tag{34_0}$$

$$R_0(a_1 + \bar{a}_1) = A_1\,; \quad R_1(a_1 + \bar{a}_1) = B_1 \tag{34_1}$$

$$a_2 R_0^2 + \bar{b}_{-2} R_0^{-2} = A_2\,; \quad a_2 R_1^2 + \bar{b}_{-2} R_1^{-2} = B_2 \tag{34_2}$$

Rovnice (34_2) určují jednoznačně a_2, b_{-2}. Z rovnic (34_1) dostáváme vztah (29). Odečtením rovnic (34_0) dostáváme $A_0 - B_0 = 2\bar{a}_2(R_0^2 - R_1^2)$. Sem dosadíme hodnotu a_2 z (10_2) a dostaneme (30).

Poněvadž je dále splněna podmínka 1. z definice problému II., platí podle (16)

$$2U_1(w) = \frac{2|w-a|^2}{b-ac}\,(U(z) - \alpha \lg |w|)\,, \quad w \in T_1\,, \quad z \in T\,, \tag{35}$$

kde $U_1(w) = \operatorname{Re}\,(\bar{w} f_0(w) + h_0(w))$, $U(z) = \operatorname{Re}\,(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z))$. Vzhledem ke spojitosti $U(z)$ v $\bar{T}$ je i $U(w)$ spojitá v $\bar{T}_1$ a (35) platí i na hranici T, T_1. Avšak $U(z)$ je na c_0 dána vztahem (17), kde klademe $\gamma_0 = 0$, na c_1 vztahem (18). Pomocí (35) můžeme tedy najít absolutní člen Fourierova rozvoje $U_1(w)$ na k_i, označme jej $m_i (i = 0,1)$. Poněvadž nás však zajímají pouze členy, jež jako činitel obsahují některou z konstant α, β_1, γ_1, dostaneme pomocí (18) a (35)

$$m_0 = \frac{-2\alpha \lg R_0}{b-ac}\,(R_0^2 + a\bar{a}) + n_0 \tag{36_0}$$

$$m_1 = \frac{2\gamma_1 - \bar{\beta}_1(c + z_1) - \beta_1(\overline{c + z_1}) - r_1(\beta_1 + \bar{\beta}_1) - 2\alpha \lg R_1}{b - ac}(R_1^2 + a\bar{a}) -$$
$$- a\beta_1 - \bar{a}\beta_1 + n_1, \tag{36_1}$$

kde n_0, n_1 nezávisejí na α, β_1, γ_1.

Z Laurentova rozvoje funkcí $f_0(w)$, $g_0(w)$ však s ohledem na $2U_1(w) = 2 \operatorname{Re} [\bar{w}f_0(w) + h_0(w)]$ lehce zjistíme

$$m_i = 2R_i^2 \operatorname{Re} a_1 + 2\varepsilon, \quad i = 0, 1, \tag{37}$$

kde ε je reálná část absolutního členu Laurentova rozvoje funkce $h_0(w)$. Srovnáním (36_0), (36_1) a (37) a dosazením hodnoty $2 \operatorname{Re} a_1$ z (10_1) dostáváme (31_0) a (31_1).

Pomocná věta 3. *Buďtež $f_0(w)$, $g_0(w)$ a konstanty α, β_1, γ_1 řešením problému II. Potom platí: konstanty α, β_1, γ_1, a navíc ε jsou jednoznačně určeny. $f_0(w)$ je určena jednoznačně až na funkci tvaru $\mathrm{i}Aw + B$, A reálné číslo. Zvolíme-li B pevně, je $g_0(w)$ jednoznačně určena.*

Důkaz. Budiž $f_0(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k w^k$, $g_0(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k w^k$. Podle pomocné věty 2b) vyhovují a_k, b_k systému (27). Z tvrzení b) téže věty plyne, že koeficienty a_k pro $k \neq 0, 1, 2$ a koeficienty b_k pro $k \neq 0, -2$ ($b_{-1} = 0$) jsou jednoznačně určeny a jsou dány vzorci (7_k). Zbývající koeficienty splňují rovnice (34_0), (34_1), (34_2). Na pravých stranách těchto rovnic se vyskytují konstanty α, β_1, γ_1. Z rovnic (34_0), (34_1,) (34_2) jsou tedy jednoznačně určeny koeficienty a_{-2}, $\operatorname{Re} a_1$, $a_0 + \bar{b}_0$, b_{-2} jakožto funkce α, β_1, γ_1. Budou-li tedy α, β_1, γ_1 určeny jednoznačně, bude tvrzení dokázáno. Pro α, β_1, γ_1, ε však máme systém rovnic (28), (29), (30), (31_0), (31_1). Rovnice (31_0) a (31_1) jsou reálné a vzhledem ke (28) je reálná také rovnice (29). Rovnice (30) je rovnice komplexní (t. j. dvě reálné rovnice). Máme tedy celkem 3 reálné a jednu komplexní rovnici pro tři reálné (α, γ_1, ε) a jednu komplexní (β_1) neznámou. Stačí tedy dokázat, že determinant této soustavy je nenulový. Odečtěme nejdříve rovnici (31_1) od (31_0) a označme výslednou rovnici (31'). Tak dostaneme systém (29), (30), (31') pro neznámé α, β_1, γ_1. Z (29), (30), (31') dostaneme užitím (32) a (33) po jednoduchých úpravách

$$\left.\begin{aligned}
A + \alpha\left[2 \lg \frac{R_0}{R_1} - a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right)\right] &= P \\
A - \frac{\bar{\beta}_1}{a}(b - ac) + \alpha\left[2 \lg \frac{R_0}{R_1} - 2\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 + R_1^2}\right] &= Q = Q_0 + \mathrm{i}Q_2 \\
A - \frac{\bar{a}\bar{b}_1 + a\beta_1}{a\bar{a}}(b - ac) + \alpha\left[2 \lg \frac{R_0}{R_1} - \frac{R_0^2 - R_1^2}{a\bar{a}}\right] &= R,
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

kde $A = 2\gamma_1 - \bar{\beta}_1(c + z_1) - \beta_1(\overline{c_1 + z_1}) - r_1(\beta_1 + \bar{\beta}_1)$, P, Q_0, Q_1, R jsou reálná čísla. Pravé strany P, Q, R nevypisujeme, neboť závisejí, jak plyne z (26), na Fourierových koeficientech funkcí $D_0(\Theta)$ a $D_1(\Theta)$ složitým způsobem, takže by byly prakticky bezcenné. Rozepíšeme-li ještě druhou rovnici systému (38) na dvě reálné rovnice, bude determinant soustavy (38)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2, & \mu, & \nu, & 2\lg\frac{R_0}{R_1} - a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) \\ 2, & \mu - \frac{a_1(b-ac)}{a\bar{a}}, & \nu + \frac{a_2(b-ac)}{a\bar{a}}, & 2\lg\frac{R_0}{R_1} - 2\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 + R_1^2} \\ 0, & \frac{a_2(b-ac)}{a\bar{a}}, & \frac{a_1(b-ca)}{a\bar{a}}, & 0 \\ 2, & \mu - \frac{2a_1(b-ac)}{a\bar{a}}, & \nu + \frac{2a_2(b-ac)}{a\bar{a}}, & 2\lg\frac{R_0}{R_1} - \frac{R_0^2 - R_1^2}{a\bar{a}} \end{vmatrix},$$

kde čísla v 1., 2., 3., 4. sloupci jsou koeficienty u γ_1, β_x^1, β_y^1, α a dále $\beta_1 = \beta_x^1 + i\beta_y^1$, $a = a_1 + ia_2$, $\mu = -\operatorname{Re}(c + z_1) - 2r_1$, $\nu = -\operatorname{Im}(c + z_1)$. Zřejmými úpravami dostaneme

$$\Delta = 2(ac - b)\left[4\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 + R_1^2} - a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) - \frac{R_0^2 - R_1^2}{a\bar{a}}\right]. \tag{39}$$

Kdyby nyní bylo $\Delta = 0$, bylo by vzhledem k $ac - b \neq 0$, $a \neq 0$ [7])

$$(a\bar{a})^2 - 4\frac{R_0^2R_1^2}{R_0^2 + R_1^2}a\bar{a} + R_0^2R_1^2 = 0\,. \tag{40}$$

Diskriminant kvadratické formy na levé straně (30) je

$$\lambda^2 = -\frac{R_0^2R_1^2}{(R_0^2 + R_1^2)^2}(R_0^2 - R_1^2)^2 \leqq 0\,.$$

Avšak vzhledem k $0 < R_1 < R_0$ je $\lambda^2 \neq 0$.

Kdyby bylo $\lambda^2 < 0$, nebylo by $a\bar{a}$ reálné číslo. Tedy $\Delta \neq 0$ a neznámé α, β_x^1, β_y^1, γ_1 jsou jednoznačně určeny. Neznámou ε vypočteme z (31_0) nebo (31_1). Tím je důkaz hotov.

Nakonec se podívejme, jak dalece nalezené funkce $f_0(\omega)$, $h_0(\omega)$ určují funkce $\varphi(z)$, $\psi_0(z)$ $\left(\psi_0(z) = \frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}\right)$ z podmínky 1. problému II. Dosazením $f_0(w) = a_1 w + a_0$, $h_0(w) = b_0 w + (\varepsilon + i\eta)$ do (14) zjistíme:

$$\varphi(z) = \frac{z}{b - ac}(ab_0 + a\bar{a}a_1 + \varepsilon + i\eta + a_0\bar{a}) + \frac{(b_0 + \bar{a}a_1)b}{b - ac} + \frac{(\varepsilon + i\eta + a_0\bar{a})c}{b - ac} \tag{41}$$

$$\psi_0(z) = \bar{c}\frac{\mathrm{d}\varphi(z)}{\mathrm{d}z} + a_0 + aa_1 \tag{42}$$

Avšak $\operatorname{Re}(ab_0 + a\bar{a}a_1 + \varepsilon + i\eta + a_0\bar{a}) = a\bar{a}\operatorname{Re}a_1 + \varepsilon + \operatorname{Re}[\bar{a}(a_0 + \bar{b}_0)]$, takže reálná část koeficientu u z funkce $\varphi(z)$ je jednoznačně určena, neboť $\operatorname{Re}a_1$, ε, $a_0 + \bar{b}_0$ jsme vypočetli. Ze (42) pak plyne, že $\psi_0(z)$ je určena jednoznačně až na konstantu.

[7]) Viz poznámku pod čarou na str. 54.

Z pomocných vět 1, 3 a z právě dokázaného plyne:

Věta 3. *Funkce $\varphi(z)$, $\psi(z)$, jež jsou řešením problému I., jsou určeny funkcemi $f_0(w)$, $g_0(w)$, $h_0(w)$ pomocí vztahů (22), (23) a (14). Funkce $f_0(w)$, $g_0(w)$ jsou řešením problému II. Koeficienty jejich Laurentova rozvoje dostaneme řešením systému (27), který se sestaví tak, že se funkce $\Lambda(w)$ a pravá strana (26) formálně rozvinou ve Fourierovu řadu a srovnají se koeficienty těchto rozvojů. Neznámé konstanty α, β_1, γ, se předem určí řešením systému (38).*

3. Budiž dáno excentrické mezikruží zatížené rovnoměrným tlakem (viz obr. 1). Lehce zjistíme, že funkce hlavního vektoru na c_0 je

$$D_0(z) = -p_0(z - z_0)\,,$$

na c_1

$$D_1(z) = -p_1(z - z_1)\,, \tag{43}$$

kde z_i je střed c_i.

Vzhledem k tomu, že hlavní moment působící na c_0 i c_1 je zřejmě roven nule, můžeme postupovat podle věty 3. Ze (43) zjistíme snadným výpočtem

$$\begin{aligned} &U(z) = 0 \quad \text{na} \quad c_0\,,\\ &U(z) = \gamma_1 + \operatorname{Re}[\bar\beta_1(z - z_1) - r_1\beta_1] \quad \text{na} \quad c_1 \end{aligned} \tag{44}$$

Krajová podmínka na k_0 tedy bude po úpravě

$$\Lambda(w) = \frac{w-a}{b-ac}[p_0r_0^2 - p_0(z_0+c)\overline{(z_0+c)}] + p_0\overline{(z_0+c)} -$$

$$- \alpha\frac{w-a}{b-ac}\left(2\lg|w| + \frac{\overline{w-a}}{\bar w}\right) \text{na } k_0\,,$$

$$\Lambda(w) = \frac{w-a}{b-ac}[2\gamma_1 - \bar\beta_1(c+z_1) - \beta_1\overline{(c+z_1)} - r_1(\beta_1 + \bar\beta_1) + p_1r_1^2 -$$

$$- p_1(c+z_1)\overline{(c+z_1)}] + \bar\beta_1 + p_1\overline{(z_1+c)} - \frac{\alpha(w-a)}{b-ac}\left[2\lg|w| + \frac{\overline{w-a}}{\bar w}\right] \text{na } k_1\,, \tag{45}$$

kde $w = R_ie^{i\Theta}$ na $k_i(i = 0,1)$.

Odtud (zachováváme označení z pomocné věty 2.)

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= -aM_0 + p_0\overline{(z_0+c)} + \frac{1}{b-ac}a\alpha(2\lg R_0 + 1)\\ B_0 &= -aM_1 + p_1\overline{(z_1+c)} + \frac{1}{b-ac}[a\alpha(2\lg R_0 + 1) - A]\\ A_1 &= R_0\left[M_0 - \frac{1}{b-ac}\alpha\left(2\lg R_0 + 1 + \frac{a\bar a}{R_0^2}\right)\right]\\ B_1 &= R_1\left[M_1 - \frac{1}{b-ac}\left\{\alpha\left(2\lg R_1 + 1 + \frac{a\bar a}{R_2^1}\right) - A\right\}\right]\\ A_2 &= B_2 = \frac{\alpha\bar a}{b-ac}\,,\quad A_k = B_k = 0 \quad \text{pro} \quad k \neq 0, 1, 2, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

kde $M_i = p_i r_i^2 - p_i(z_i + c)(\overline{z_i + c})$, $A = 2\gamma_1 - \bar{\beta}_1(c + z_1) - \beta_1(\overline{c + z_1}) - r_1(\beta_1 + \bar{\beta}_1)$. Dosazením ze (46) do systému (29), (30), (31′) dostaneme po úpravách pro neznámé konstanty α, β_1, γ_1 systém (38′) s determinantem Δ daným vzorcem (39). Vypišme pravé strany systému (38′):

$$P = M_0 - M_1$$

$$Q = M_0 - M_1 - \frac{b - ac}{a}\,[p_0(\overline{z_0 + c}) - p_1(\overline{z_1 + c})]$$

$$R = -\frac{1}{a\bar{a}}\,[R_0^2 M_0 - R_1^2 M_1]\,.$$

Řešením dostaneme

$$\alpha = \frac{R + P - 2Q_1}{H}\,, \quad \text{kde } H = \frac{\Delta}{2(ac - b)} \neq 0 \tag{47}$$

$$\beta_x^1 = \frac{a_2 \operatorname{Im} Q}{b - ac} - \frac{a_1}{b - ac}\left[\operatorname{Re} Q - P - \alpha a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) + 2\alpha\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 + R_1^2}\right] \tag{48}$$

$$\beta_y^1 = \frac{a_1 \operatorname{Im} Q}{b - ac} - \frac{a_2}{b - ac}\left[\operatorname{Re} Q - P - \alpha a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) + 2\alpha\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 + R_1^2}\right] \tag{49}$$

$$2\gamma_1 = P - \mu\beta_x^1 - \nu\beta_y^1 - \alpha\left[2 \lg \frac{R_0}{R_1} - a\bar{a}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2}\right)\right], \tag{50}$$

kde $\mu = -\operatorname{Re}(c + z_1) - 2r_1$, $\nu = -\operatorname{Im}(c + z_1)$.

Nyní pomocí α, β_1, γ_1 vypočteme ze (46) A_i, B_i ($i = 0, 1, 2$) a z (10_0), (10_1) (10_2) vypočteme $a_0 + \bar{b}_0$, $\operatorname{Re} a_1$, b_{-1}, a_2 a b_2. Tím jsou nalezeny funkce $f_0(w)$, $g_0(w)$ a tedy i $h_0(w)$. Pomocí vztahů (14) určíme funkce $\varphi(z)$ a $\chi(z)$, tedy i $\psi_0(z)$ a $\psi(z) = \psi_0(z) - \frac{\alpha}{w}$. Hledaná napětí pak určíme ze vztahů

$$X_x = \operatorname{Re}\,[2\Phi - \bar{z}\Phi' - \Psi]\,,$$
$$Y_y = \operatorname{Re}\,[2\Phi + \bar{z}\Phi' + \Psi]\,,$$
$$X_y = \operatorname{Im}\,[\bar{z}\Phi' + \Psi]\,,$$

kde $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$[8].

Poznámka. Explicitní vzorec pro hlavní napětí na hranici excentrického mezikruží jsou nalezeny v knize [5] metodou bipolárních souřadnic. Z našich vztahů bychom je dostali vhodným umístěním T v rovině z. Metody uvedené v tomto článku lze však užít i na řešení druhého problému pružnosti a na řešení smíšeného problému, jak ukážeme v některém z příštích čísel Aplikací matematiky.

Jako numerický příklad uvedeme řešení excentrického mezikruží T, zatíže-

[8]) Odvození těchto vzorců najde čtenář na př. ve [2], str. 75, vzorce (2.8.13), (2.8.14,), (2.8.15).

ného vnitřním tlakem $p = 1$ kg/cm². Umístíme-li T (viz obr. 1) tak, že $z_0 = 0$, $z_1 = is$, potom zobrazení

$$w = \frac{iR_0 \frac{t+1}{t-1} z + r_0 R_0}{z - ir_0 \frac{t+1}{t-1}} \quad (51), \text{kde } t = \sqrt{\frac{(r_0+s)^2 - r_1^2}{(r_1-s)^2 - r_1^2}},$$

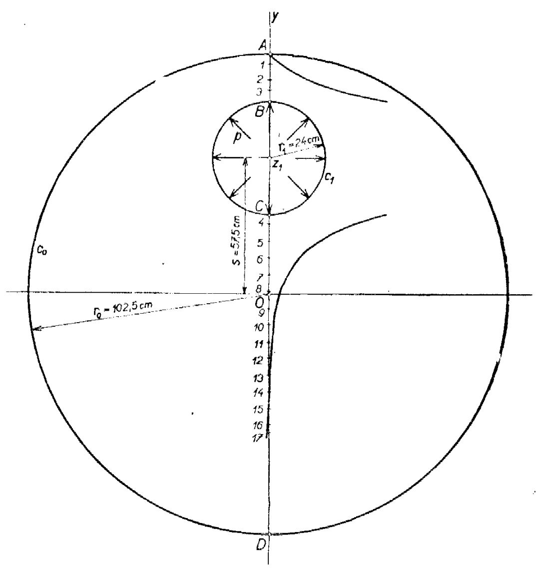
převádí T v mezikruží T_1 se středem v počátku roviny w o poloměrech $R_0 = \frac{r_0(t+1) - (s+r_1)(t-1)}{r_0(t-1) - (s+r_1)(t+1)}$, $R_1 = 1$. Pro praktický výpočet jsme volili $r_1 = 24$ cm; $r_0 = 102{,}5$ cm; $s = 57{,}5$ cm a dostali jsme

$\alpha =$	$-705{,}1574$	$a_0 =$	$8{,}672690$
$\beta_1 =$	$-2{,}98857$	$a_1 =$	$4{,}211685$
$2\gamma_1 =$	$706{,}4522$	$a_2 =$	$-0{,}759594$
$\varepsilon =$	$10{,}609651$	$b_0 =$	0
		$b_{-2} =$	$5{,}973913$

Na obr. 3 je vyneseno napětí X_y na příčném řezu $ABCD$.

Tabulka

	$z : i$	X_y (v kg/cm²)
A	102,5	+0,000005
1	97,977612	−0,086197
2	90,813433	−0,335486
3	87,231344	−0,531310
B	81,5	−0,999996
C	33,5	−0,999996
4	29,917911	−0,737901
5	22,753732	−0,428012
6	15,589553	−0,262038
7	8,425374	−0,165366
8	1,261195	−0,105796
9	−5,902985	−0,067657
10	−13,067164	−0,042612
11	−20,231343	−0,025926
12	−27,395522	−0,014748
13	−34,559701	−0,007304
14	−41,723880	−0,002439
15	−48,888059	+0,000613
16	−56,052238	+0,002381
17	−59,634327	+0,002901



Obr. 3

Podobný případ byl změřen fotoelasticimetricky v práci [6].

Na závěr uvádíme stručný návod pro praktický výpočet funkcí napjatosti $\varphi(z)$, $\chi(z)$:

1. Ze vzorce (51) určíme zobrazení excentrického mezikruží na mezikruží se středem v počátku.
2. Z daného napětí určíme funkci hlavního vektoru $D_0(\Theta)$, $D_1(\Theta)$.

3. Určíme Fourierovy rozvoje funkcí $D_0(\Theta)$, $D_1(\Theta)$.
4. Ze vzorců (17) a (18) určíme funkci $U(z)$ a její Fourierův rozvoj na hraničních kružnicích.
5. Pomocí transformace (51) (klademe $z_i = r_i e^{i\Theta}$ na c_i, $i = 1, 2$) určíme funkce $U^*(w)$, $D^*(w)$ a ze vztahu (26) stanovíme koeficienty A_k, B_k Laurentova rozvoje funkce $\Lambda(w)$.
6. Stanovíme pravé strany P, Q, R systému (38) a ze vzorců (47), (48), (49), (50) vypočteme konstanty α, β_1, γ_1.
7. Pomocí α, β_1, γ_1 vypočteme A_i, B_i pro $i = 0, 1, 2$ a konstantu ε z (31_0) resp. (31_1) a z (10_0), (10_1), (10_2) vypočteme $a_0 + \bar{b}_0$, Re a_1, b_{-1}, a_2 a b_{-2}.
8. Ze vzorců (7_k) určíme koeficienty a_k, b_k pro $k \neq 0, 1, 2$.
9. Integrací funkce $g_0(w)$ určíme funkci $h_0(w)$.
10. Ze vztahů (14) určíme $\varphi(z)$, $\chi_0(z)$ a ze vztahu (21) funkci $\chi(z)$.

Děkuji kandidátu fysikálně matematických věd Ing. dr I. BABUŠKOVI *za cenné podněty a rady při vypracování tohoto článku.*

SEZNAM LITERATURY

[1] *Н. И. Мусхелишвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва 1949.

[2] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo:* Matematická theorie rovinné pružnosti, Praha 1955.

[3] *Ch. Loewner:* On generation of solutions of the biharmonic equation in the plane by conformal mappings. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 3, No. 2, 1953, 417—436.

[4] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

[5] *Я. С. Уфлянд:* Биполярные координаты в теории упругости, Москва 1950.

[6] České vysoké učení technické v Praze, FIS, Laboratoř experimentální pružnosti. Zpráva č. 56-III-6. Fotoelasticimetrický výzkum tří případů kotoučů s otvory namáhanými vnitřním přetlakem.

Резюме

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ

ЯРОСЛАВ ФУКА (Jaroslav Fuka)

(Поступило в редакцию 22/V 1957 г.)

В первом отделе излагается решение 1-ой основной задачи теории упругости в кольце методом, описанным в книге А. Н. Мусхалишвили (1). Коэффициенты рядов Лорана функций напряжения $\varphi(z)$, $\psi(z)$ являются

решением бесконечной системы линейных уравнений (5), которая образуется так, что функция $D(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ и краевое условие $D_0(\Theta)$, $D_1(\Theta)$ развиваются в ряды Фурье и сравниваются коэффициенты этих рядов.

Если мы захотим перенести этот метод на экцентрическое кольцо, столкнемся с той трудностью, что не сумеем решить возникнувшую бесконечную систему линейных уравнений. Это препятствие переодолено в отделе 2 следующим способом: В кольце T_1 (концентрическом), возникнувшем из данного экцентрического кольца T при помощи дробнолинейного преобразования $w = \dfrac{az + b}{z + c}$ определена новая краевая проблема (проблема II.) так, что функции $f(w)$, $h(w)$, решающие проблему II., и краевое условие этой проблемы связаны определенным отношением с функциями $\varphi(z)$, $\chi(z)$ решающими проблему I. на T, и с краевым условием проблемы I на T. Если мы сумеем решить проблему II., то тем самым решена проблема I. Доказано существование и однозначность решения проблемы II., которая решается в сущности методом отдела 1. В заключение приводится численный пример и сжатое указание для практического нахождения функции напряжения $\varphi(z)$, $\chi(z)$.

Zusammenfassung

LÖSUNG DER ERSTEN AUFGABE DER ELASTIZITÄTSTHEORIE AUF DEM EXZENTRISCHEN RINGE

JAROSLAV FUKA

(Eingegangen am 22. Mai 1957.)

Im 1. Absatz findet man die Lösung der ersten Aufgabe der Elastizitätstheorie auf dem Ringe mittels der Methode, welche im Buche N. I. Muschelišvili [1] erklärt ist. Die Koeffizienten der Laurententwickelungen der Spannungsfunktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sind Lösungen eines unendlichen Systems der Lineargleichungen (5), das man durch Vergleich der Koeffizienten der Entwickelung der Funktion $D(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ und der Randbedingungen $D_0(\Theta)$, $D_1(\Theta)$ in Fourierreihen erhält.

Wenn wir diese Methode auf exzentrische Ringe übertragen wollen, so entsteht die Schwierigkeit, dass wir nicht imstande sind das entstandene System der Lineargleichungen zu lösen. Diese Schwierigkeit ist im 2. Absatz auf folgende Weise überwunden: Im Ringe T_1 (konzentrischen), der aus dem gegebe-

nen exzentrischen Ringe T mittels der homographischen Transformation $w = \frac{az + b}{z + c}$ entsteht, definieren wir eine neue Randaufgabe (Problem II.) so, dass die Funktionen $f(w)$, $h(w)$ — die Lösungen des Problems II. — resp. die Randbedingung dieses Problems mit den Funktionen $\varphi(z)$, $\chi(z)$ — den Lösungen des Problems I. auf T — resp. mit der Randbedingung des Problems I. auf bestimmte Weise verbunden sind. Wenn wir das Problem II. lösen können, so können wir auch das Problem I. lösen. Es ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems II., welche man (im wesentlichen) durch die Methode des 1. Absatzes erhält, bewiesen. Am Schluss ist ein numerisches Beispiel und eine kurze Anleitung für die praktische Bestimmung der Spannungsfunktionen $\varphi(z)$, $\chi(z)$ angegeben.