Aplikace matematiky

Jan Polášek

Tenký profil v nehomogenním proudovém poli

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 2, 119–135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102522

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

TENKÝ PROFIL V NEHOMOGENNÍM PROUDOVÉM POLI

JAN POLÁŠEK

(Pokračování.)

6. Vzorce pro numerický výpočet

Ve své teorii jsme užívali z důvodu obecnosti pro jednotlivé veličiny trigonometrických rozvojů o nekonečně mnoha členech. V praktických příkladech však stačí užít obvykle trigonometrických polynomů poměrně nízkého stupně. Pro přímé technické použití uvedeme si v tomto odstavci vzorce, ve kterých bude u členů prvního řádu respektováno několik prvních koeficientů trigonometrických rozvojů (obvykle je zbytečné bráti jich více než šest) a u členů druhého řádu pouze tři koeficienty.

a) Přímý problém. Složky primární rychlosti jsou dány trigonometrickými polynomy:

$$\frac{V_\nu}{V_0} = \sum_{n=0}^{N} \nu_n \cos n\vartheta\,, \quad \frac{V_\tau}{V_0} = 1 + \sum_{n=0}^{2} \mu_n \cos n\vartheta \tag{6,1}$$

a funkce $\frac{d\eta}{d\varphi}$ je dána trigonometrickým polynomem:

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sum_{n=0}^{N} B_n \cos n\vartheta\,, \quad \text{kde} \quad B_0 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{B_{2m}}{4m^2 - 1}\,. \tag{6,2}$$

Z rovnic (2,11) pak dostaneme (ve členech druhého řádu můžeme psát $B_0 = \frac{1}{3}B_2$):

$$\left(1 + \frac{\omega}{12} B_2 + \frac{\omega^2}{96}\right) g_0 - \frac{\omega}{24} B_2 g_1 - \frac{\omega^2}{192} g_2 = B_0 - \nu_0 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + \\ + B_2\left(\frac{1}{3}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2\right) - \frac{\omega}{8}\left[B_1\left(\nu_0 - \frac{1}{2}\nu_2\right) + \frac{1}{3} B_2 \nu_1\right],$$

$$\left(\frac{\omega}{4} B_1 + \frac{\omega^2}{48}\right) g_0 + \left(1 - \frac{\omega}{8} B_1 - \frac{\omega^2}{96}\right) g_1 = B_1 - \nu_1 + B_1\left(\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2\right) + \\ + \frac{5}{6} B_2 \mu_1 - \frac{\omega}{8}\left[\frac{1}{2} B_1 \nu_1 + \frac{2}{3} B_2 \nu_0\right], \tag{6,3}$$

$$\frac{\omega}{4} B_2 g_0 - \frac{\omega}{8} B_2 g_1 + g_2 = B_2 - \nu_2 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + B_2 \left(\mu_0 + \frac{1}{3} \mu_2\right) + \frac{\omega}{8} B_1 (\nu_0 - \nu_2) ,$$

$$g_3 = B_3 - \nu_3 + \frac{1}{2} (B_1 \mu_2 + B_2 \mu_1) + \frac{\omega}{8} \left[\frac{1}{2} B_1 \nu_1 + \frac{1}{3} B_2 \nu_0\right] , \tag{6,3}$$

$$g_4 = B_4 - \nu_4 + \frac{1}{2} B_2 \mu_2 + \frac{\omega}{8} \left[\frac{1}{2} B_1 \nu_2 + \frac{1}{3} B_2 \nu_1\right] ,$$

$$g_5 = B_5 - \nu_5 + \frac{\omega}{24} B_2 \nu_2 ,$$

$$g_n = B_n - \nu_n , \quad \text{pro} \quad 6 \leq n \leq N .$$

Vyřešíme-li první tři rovnice systému (6,3), dostaneme (po zanedbání malých veličin třetího řádu; přitom pokládáme také $\frac{1}{48}\omega^2$ za malou veličinu prvního řádu) konečné vzorce pro výpočet rozložení cirkulace při přímém problému:

$$\gamma = 2V_0 \left(- g_0 \operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} + \sum_{n=1}^{N} g_n \sin n\vartheta\right) ,$$

kde

$$g_0 = B_0 - \nu_0 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + B_2 \left(\frac{1}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2\right) - \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(\nu_0 - \frac{1}{2} \nu_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} B_2 \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2\nu_0 - \nu_1\right)\right] + \frac{\omega^2}{192} \left(\frac{1}{3} B_2 + 2\nu_0 - \nu_2\right) ,$$

$$g_1 = B_1 - \nu_1 + B_1 \left(\mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2\right) + \frac{5}{6} B_2 \mu_1 + \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(B_1 + 2\nu_0 - \frac{3}{2} \nu_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3} B_2 (B_1 + \nu_0)\right] + \frac{\omega^2}{96} \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2\nu_0 - \nu_1\right) ,$$

$$g_2 = B_2 - \nu_2 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + B_2 \left(\mu_0 + \frac{1}{3} \mu_2\right) + \frac{\omega}{8} \left[B_1 (B_2 + \nu_0 - \nu_2) - \right. \tag{6,4}$$
$$\left. - \frac{2}{3} B_2 \left(B_2 - 3\nu_0 + \frac{3}{2} \nu_1\right)\right] ,$$

$$g_3 = B_3 - \nu_3 + \frac{1}{2} (B_1 \mu_2 + B_2 \mu_1) + \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{2} B_1 \nu_1 + \frac{1}{3} B_2 \nu_0\right) ,$$

$$g_4 = B_4 - \nu_4 + \frac{1}{2} B_2 \mu_2 + \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{2} B_1 \nu_2 + \frac{1}{3} B_2 \nu_1\right) ,$$

$$g_5 = B_5 - \nu_5 + \frac{\omega}{24} B_2 \nu_2 ,$$

$$g_n = B_n - \nu_n , \quad \text{pro} \quad 6 \leq n \leq N .$$

Při numerickém výpočtu je stanovení koeficientů μ_n a ν_n rozvojů složek primární rychlosti na profilu někdy dosti pracné a je snažší počítat složky primární rychlosti a normální derivace radiální složky primární rychlosti na náhradním kruhovém oblouku. V tomto případě stanovíme jednak koeficienty ν'_n pro $0 \leq n \leq N$ a μ_n pro $0 \leq n \leq 2$ rozvojů složek primární rychlosti na náhradním kruhovém oblouku, jednak koeficienty $\bar{\nu}_n = \nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta}$ pro $0 \leq n \leq 2$, kde $\frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta}$ značí koeficienty v rozvoji normální derivace radiální složky primární rychlosti na náhradním kruhovém oblouku. Koeficienty g_n počítáme pak ze vzorců:

$$g_0 = B_0 - \nu'_0 + \frac{1}{2} B_1\mu'_1 + B_2\left(\frac{1}{3}\mu'_0 + \frac{1}{2}\mu'_2\right) - \frac{\omega}{8}\left[B_1\left(\bar{\nu}_0 - \frac{1}{2}\bar{\nu}_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} B_2\left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2\nu'_0 - \bar{\nu}_1\right)\right] + \frac{\omega^2}{192}\left(\frac{1}{3} B_2 + 2\nu'_0 - \nu'_2\right),$$

$$g_1 = B_1 - \nu'_1 + B_1\left(\mu'_0 + \frac{1}{2}\mu'_2\right) + \frac{5}{6} B_2\mu'_1 + \frac{\omega}{8}\left[B_1\left(B_1 + 2\nu'_0 - \nu'_1 - \frac{1}{2}\bar{\nu}_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3} B_2(B_1 + \bar{\nu}_0)\right] + \frac{\omega^2}{96}\left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2\nu'_0 - \nu'_1\right),$$

$$g_2 = B_2 - \nu'_2 + \frac{1}{2} B_1\mu'_1 + B_2\left(\mu'_0 + \frac{1}{3}\mu'_2\right) + \frac{\omega}{8}\left[B_1(B_2 + \bar{\nu}_0 - \bar{\nu}_2) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3} B_2\left(B_2 - 3\nu'_0 - \frac{3}{2}\nu'_1\right)\right], \qquad (6,5)$$

$$g_3 = B_3 - \nu'_3 + \frac{1}{2}(B_1\mu'_2 + B_2\mu'_1) + \frac{\omega}{8}\left(\frac{1}{2} B_1\bar{\nu}_1 + \frac{1}{3} B_2\bar{\nu}_0\right),$$

$$g_4 = B_4 - \nu'_4 + \frac{1}{2} B_2\mu'_2 + \frac{\omega}{8}\left(\frac{1}{2} B_1\bar{\nu}_2 + \frac{1}{3} B_2\bar{\nu}_1\right),$$

$$g_5 = B_5 - \nu'_5 + \frac{\omega}{24} B_2\bar{\nu}_2,$$

$$g_n = B_n - \nu'_n, \quad \text{pro} \quad 6 \leq n \leq N.$$

b) N e p ř í m ý p r o b l é m. Při řešení nepřímého problému postupujeme, jak bylo naznačeno v odst. 3, tak, že si nejprve zvolíme náhradní oblouk (R, ω) a vhodný úhel nastavení α_0. Pro tuto konfiguraci určíme hodnoty koeficientů:

$$\nu'_n \quad \text{pro} \quad 0 \leq n \leq N$$

a

$$\mu'_n, \bar{\nu}_n = \nu'_n + \frac{\partial \nu'}{\partial \eta}, \frac{\partial \nu'_n}{\partial \lambda}, \quad \text{pro} \quad 0 \leq n \leq 2.$$

Konečně máme ještě předepsáno rozložení cirkulace trigonometrickým polynomem:

$$\gamma = 2V_0 \sum_{n=1}^{N} g_n \sin n\vartheta; \qquad (6,6)$$

poněvadž se obvykle navrhuje profil s hladkým vstupem, položili jsme v (6,6) přímo $g_0 = 0$.

S těmito výchozími hodnotami budeme nyní řešit systém (3,9). Jako u přímého problému budeme v členech druhého řádu zanedbávat všechny koeficienty s indexem větším než 2. První aproximace řešení je:

$$B_n^0 = g_n + \nu_n', \quad 1 \leq n \leq N . \tag{6,7}$$

Tyto hodnoty dosadíme do systému (3,9):

$$\begin{aligned}
B_1^0 &= g_1 + \nu_1' - (g_1 + \nu_1')\left[\mu_0' + \frac{1}{2}\mu_2' + \frac{\omega}{8}\left(g_1 - \frac{1}{2}\bar{\nu}_1\right)\right] - \\
&\quad - (g_2 + \nu_2')\left(\frac{5}{6}\mu_1' - \frac{\omega}{12}\bar{\nu}_0\right) - \frac{\omega^2}{96} g_1 , \\
B_2^0 &= g_2 + \nu_2' - (g_1 + \nu_1')\left[\frac{1}{2}\mu_1' + \frac{\omega}{8}(\bar{\nu}_0 - \bar{\nu}_2)\right] - \\
&\quad - (g_2 + \nu_2')\left(\mu_0' + \frac{1}{3}\mu_2' + \frac{\omega}{8} g_1\right) ,
\end{aligned} \tag{6,8}$$

$$B_3^0 = g_3 + \nu_3' - (g_1 + \nu_1')\left(\frac{1}{2}\mu_2' + \frac{\omega}{16}\bar{\nu}_1\right) - (g_2 + \nu_2')\left[\frac{1}{2}\mu_1' + \frac{\omega}{12}\left(\bar{\nu}_0 - \frac{1}{2}\bar{\nu}_2\right)\right],$$

$$B_4^0 = g_4 + \nu_4' - \frac{\omega\bar{\nu}_2}{16}(g_1 + \nu_1') - \frac{1}{2}(g_2 + \nu_2')\left(\mu_2' + \frac{\omega}{12}\bar{\nu}_1\right) ,$$

$$B_5^0 = g_5 + \nu_5' - \frac{\omega\bar{\nu}_2}{24}(g_2 + \nu_2') ,$$

$$B_n^0 = g_n + \nu_n' , \quad \text{pro} \quad 6 \leq n \leq N .$$

Změna úhlu nastavení $\Delta\alpha$ je:

$$\Delta\alpha = \frac{P}{1 + Q} ,$$

kde

$$\begin{aligned}
P &= -\nu_0' + (1 + \mu_0')\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{B_{2m}^0}{4m^2 - 1} + \frac{1}{2}(B_1^0\mu_1' - B_2^0\mu_2') - \frac{\omega}{8}\left[B_1^0\left(\bar{\nu}_0 - \frac{1}{2}\bar{\nu}_2\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} B_2^0\left(\frac{1}{2} g_1 - 5\bar{\nu}_1\right)\right] - \frac{\omega^2}{192} g_2 ,
\end{aligned} \tag{6,9}$$

$$Q = \frac{\partial\nu_0'}{\partial\alpha} + \mu_0' - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\nu_2'}{\partial\alpha} + \mu_2'\right) + \frac{\omega}{8} B_1^0 .$$

Správný úhel nastavení je $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ a tvar profilu je dán vztahem:

$$\eta = \frac{\omega}{4}\left[B_0(1 - \cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n}(1 - \cos n\vartheta)\right] ,$$

kde

$$
\begin{aligned}
B_1 &= B_1^0 + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial\alpha} + \mu_1'\right)\Delta\alpha\,, \\
B_2 &= B_2^0 + \left(\frac{\partial v_2'}{\partial\alpha} + \mu_2'\right)\Delta\alpha\,, \qquad (6,10)\\
B_n &= B_n^0\,, \quad 3 \leq n \leq N\,,
\end{aligned}
$$

a

$$
B^0 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{B_{2m}}{4m^2 - 1}\,.
$$

c) Rozložení povrchové rychlosti na profilu. Povrchová rychlost na profilu je podle (4,5) a (4,6) dána vzorcem:

$$
U = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right] V_\tau + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi} V_\nu + u \pm \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{1+\eta}\,. \qquad (6,11)
$$

Všechny veličiny na pravé straně rovnice (6,11) s výjimkou tečné složky indukované rychlosti jsou známé, a to buď dané nebo vypočítané podle příslušných vzorců tohoto odstavce (buď pro přímý nebo nepřímý problém). Tečná složka indukované rychlosti je podle (4,4) dána při naší přesnosti vzorcem:

$$
\frac{u}{V_0} = -\left[\frac{1}{2} B_1 + \frac{4}{3} B_2 \cos\vartheta + \frac{\omega}{4}\left(1 - \frac{5}{6}\eta\right)\right]\left(g_0 - \frac{1}{2} g_1\right) - \frac{1}{3} B_2\left(g_0 - \frac{1}{2} g_2\right). \qquad (6,12)
$$

Závěr

V práci je vybudována teorie potenciálního obtékání osamoceného tenkého profilu vloženého do nehomogenního proudového pole. Rozložení cirkulace podél profilu (a tím rychlostní pole) při daném tvaru profilu je dáno rovnicemi (2,11). Tyto rovnice dávají vztahy mezi Fourierovými koeficienty g_n hledaného rozložení cirkulace, Fourierovými koeficienty B_n tvaru profilu a Fourierovými koeficienty μ_n, ν_n složek primární rychlosti. Pro obecnost jsou psány jako vztahy mezi nekonečně mnoha koeficienty; prakticky stačí vzíti při výpočtu jen několik málo prvních členů, jak je provedeno v (6,4) nebo (6,5), kde jsou sestaveny vzorce pro praktický výpočet rozložení cirkulace na tenkém profilu vloženém do nehomogenního proudového pole (přímý problém).

K určení tvaru profilu a úhlu nastavení z daného rozložení cirkulace (nepřímý problém) jsou odvozeny rovnice (3,7)—(3,9) a připojen návod, jak postupovat při numerickém výpočtu. Pro praktický výpočet jsou v odstavci 6 sestaveny vzorce (6,8)—(6,10) (respektující jen malý, pro většinu skutečných případů však bohatě dostačující počet členů).

Povrchová rychlost na profilu je dána vzorci (4,4) a (4,5), které jsou v šestém odstavci (6,11), (6,12) upraveny na tvar vhodný k numerickému výpočtu. Konečně je ještě v pátém odstavci odvozen vztah pro celkovou cirkulaci.

Obtékání profilu může býti uvedenými vzorci popsáno nekonečně mnoha způsoby podle volby parametru ω (středového úhlu náhradního kruhového oblouku); z těchto možných popisů zvolíme ten, který dává co možná malé koeficienty B_n.

Vzorce jsou přehledné tím, že obsahují jednoduché hlavní členy (prvého řádu):

$$g_n = B_n - \nu_n ,$$

k nimž přistupují malé korekce (členy druhého řádu).

Uvážíme-li, že hodnotě $g_1 = 0{,}4$ odpovídá (v homogenním proudu s hladkým náběhem) hodnota vztlakového koeficientu $c = \pi g_1 = 1{,}27$ (t. j. téměř na hranici odtržení proudu), dostaneme pro velikost koeficientů $g_n(B_n, \ldots)$ i při velké nehomogenitě primárního proudového pole směrné hodnoty $\sim 0{,}2$. Pak činí uvažované korekční členy druhého řádu jen několik setin a zanedbané členy třetího řádu jsou řádově tisíciny. Přesnost vzorců je tedy v celém rozsahu použití dostatečná.

Konečně ještě upozorníme na několik skutečností, které jednak omezují rozsah problémů, zvládnutelných uvedenými vzorci, jednak dávají náměty pro další práce:

a) vzorce platí jen pro tenké profily;

b) vzorce platí jen pro rovinný případ;

c) nejsou vypracovány vzorce, dávající tvar profilu přímo z předepsané rychlosti na jedné (podtlakové) straně profilu.

Závěrem chce autor poděkovat dr Ladislavu Špačkovi za cenné rady a podněty při vypracování tohoto článku.

Dodatek I

Dosadíme-li do výrazu pro radiální a azimutální složku indukované rychlosti (1,12) a (1,14) výrazy (1,20)—(1,21), dostaneme:

$$\frac{v_\nu}{V_0} = (1 - \eta_0)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{ g_0(1 + \cos\chi) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} g_n[\cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\chi] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\cos\chi - \cos\vartheta} - \frac{\omega^2}{48}(\cos\chi - \cos\vartheta)\right] \mathrm{d}\chi ; \tag{1}$$

$$\frac{v_r}{V_0} = -\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{4}\int_0^\pi \left\{ g_0(1 + \cos\chi) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} g_n[\cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\chi] \right\} \mathrm{d}\chi . \tag{2}$$

Označíme-li

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \, \mathrm{d}\chi \,, \quad 0 < \vartheta < \pi \,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

dostaneme:

$$\frac{v_\nu}{V_0} = (1 - \eta_0) \left\{ g_0(I_0 + I_1) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(I_{n-1} - I_{n+1}) - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega^2}{48} \left[\frac{1}{2} g_0 - \frac{1}{4} g_2 - \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \cos\vartheta \right] \right\} , \tag{4}$$

$$\frac{v_\tau}{V_0} = - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) . \tag{5}$$

Jak bylo již dříve řečeno, rozumí se hodnotou integrálu (3) jeho hlavní hodnota. Pro $\varepsilon > 0$ platí:

$$\int_0^{\vartheta-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta} \log \left| \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta + \chi)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta - \chi)} \right|_0^{\vartheta-\varepsilon} =$$
$$= \frac{1}{\sin\vartheta} \left[\log\sin\left(\vartheta - \frac{1}{2}\varepsilon\right) - \log\sin\frac{1}{2}\varepsilon \right] ; \tag{6}$$

$$\int_{\vartheta+\varepsilon}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta} \left[\log\sin\frac{1}{2}\varepsilon - \log\sin\left(\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \right] . \tag{7}$$

Z výrazů (6) a (7) plyne:

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sin\vartheta} \log \frac{\sin(\vartheta - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon)} = 0 \,. \tag{8}$$

Dále platí:

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \, \mathrm{d}\chi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{\cos\vartheta}{\cos\chi - \cos\vartheta} \right) \mathrm{d}\chi = 1 \,. \tag{9}$$

Pro $n \geq 1$ dostaneme:

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\chi + \cos(n-1)\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \, \mathrm{d}\chi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\chi \cos n\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \, \mathrm{d}\chi =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\cos n\chi + \frac{\cos\vartheta \cos n\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \right] \mathrm{d}\chi = \frac{2\cos\vartheta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \, \mathrm{d}\chi$$

a tedy:

$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2\cos\vartheta I_n \,. \tag{10}$$

Metodou úplné indukce dokážeme pomocí rovnic (8), (9) a (10) snadno, že

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta}\,\mathrm{d}\chi = \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\,. \tag{11}$$

Dosadíme-li hodnoty I_n do výrazu (4) pro radiální složku indukované rychlosti, dostaneme:

$$\frac{v_\nu}{V_0} = (1 - \eta_0)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos n\vartheta - \frac{\omega^2}{48}\left[\frac{1}{2}g_0 - \frac{1}{4}g_2 - \left(g_0 - \frac{1}{2}g_1\right)\cos\vartheta\right]\right\}. \tag{12}$$

Dodatek II

Při úpravě rovnice (2,10) potřebujeme rozvinout Cauchyův součin

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos\nu\vartheta \,.\, \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cos i\vartheta\,, \tag{13}$$

v trigonometrickou řadu tvaru:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\vartheta\,.$$

$$S = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_\nu b_i[\cos(\nu + i)\,\vartheta + \cos(\nu - i)\vartheta] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\{\sum_{n=\nu}^{\infty} a_\nu b_{n-\nu}\cos n\vartheta + \sum_{n=0}^{\nu} a_\nu b_{\nu-n}\cos n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} a_\nu b_{n+\nu}\cos n\vartheta\}\,,$$

a tedy

$$S = \tfrac{1}{2}\{\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\cos n\vartheta + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b_{\nu-n}\cos n\vartheta] + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_{\nu+n}\cos n\vartheta\} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n b_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(b_{|n-\nu|} + b_{n+\nu})]\cos n\vartheta\,, \tag{14}$$

nebo

$$S = \tfrac{1}{2}(a_0 b_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu b_{n+\nu} + a_{n+\nu} b_\nu)]\cos n\vartheta\,. \tag{15}$$

Užijeme-li vzorců (14) a (15), dostaneme z rovnice (2,10) snadnou úpravou nekonečný systém rovnic (2,11).

Dodatek III

Abychom se mohli přesvědčit, že nekonečný systém lineárních nehomogenních rovnic (3,6) má právě jedno ohraničené řešení, připomeneme si následující větu z teorie systémů lineárních rovnic [10]:

Nechť je dán nekonečný systém lineárních nehomogenních rovnic pro nekonečně mnoho neznámých x_i, $i = 1, 2, \ldots$, ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots, \\ x_2 &= b_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots, \\ x_3 &= b_3 + c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + \ldots, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{16}$$

Splňují-li koeficienty tohoto systému nerovnosti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leq 1 - \Theta, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

kde

$$\Theta > 0$$

a jsou-li absolutní hodnoty absolutních členů ohraničené shora konečným číslem:

$$|b_i| \leq p < \infty, \tag{18}$$

pak systém (16) má právě jedno omezené řešení, které je možno získat metodou postupných aproximací.

Užijeme-li systému (3,6) pro výpočet koeficientů B_n, pak, za předpokladu, že dané veličiny g_n, μ_n', a ν_n' jsou malé ve smyslu pozn. 2 a 5, jsou nerovnosti (17) a (18) zřejmě splněny a nalezené hodnoty koeficientů B_n jsou rovněž malé veličiny ve smyslu pozn. 2.

Dodatek IV

Podle (4,3) je tečná složka indukované rychlosti dána integrálem:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\omega} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\eta(\varphi) + \eta(\varphi_0)] - \left[\frac{1}{2} [\eta(\varphi) - \eta(\varphi_0)] \cot g \frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{d\eta(\varphi_0)}{d\varphi_0} \right] \cot g \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right\} \gamma(\varphi) \, d\varphi . \tag{19}$$

Rozvineme-li cotangens v řadu:

$$\cot g \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = \frac{2}{\varphi - \varphi_0} - \frac{\varphi - \varphi_0}{6} + \ldots, \tag{20}$$

ve které bereme, jako v prvním odstavci (1,21), jen první dva členy, dostaneme:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\omega} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\eta(\varphi) + \eta(\varphi_0)] + \frac{1}{3} [\eta(\varphi) - \eta(\varphi_0)] - \frac{\varphi - \varphi_0}{6} \frac{d\eta(\varphi_0)}{d\varphi_0} - \right.$$
$$\left. - 2 \left[\frac{\eta(\varphi) - \eta(\varphi_0)}{(\varphi - \varphi_0)^2} - \frac{\frac{d\eta(\varphi_0)}{d\varphi_0}}{\varphi - \varphi_0} \right] \right\} \gamma(\varphi) \, d\varphi . \tag{21}$$

V tomto integrálu zavedeme novou proměnnou χ definovanou rovnicí (1,15) a za funkce η, $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi}$ a $\gamma(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ dosadíme rozvoje (2,7), (2,6) a (1,20). Hodnoty funkcí η a $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi}$ v bodě φ_0 (který má v nových proměnných souřadnici ϑ) budeme v dalším označovat prostě symboly η a $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi}$ (bez indexů; srov. odst. 2 rov. (2,2) a (2,3)).

$$\frac{u}{V_0} = -\frac{\omega}{4\pi}\int_0^\pi \Big\{1 - \frac{5}{6}\eta + \frac{\omega}{12}(\cos\chi - \cos\vartheta)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\omega}{24}\Big[B_0(1-\cos\chi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}-B_{n+1}}{n}(1-\cos n\chi)\Big] + \frac{2}{\omega}\Big[\frac{B_0}{\cos\chi-\cos\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}-B_{n+1}}{n}\cdot\frac{\cos n\chi - \cos n\vartheta}{(\cos\chi-\cos\vartheta)^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n\cos n\vartheta}{\cos\chi-\cos\vartheta}\Big]\Big\}\Big\{g_0(1+\cos\chi) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} g_m[\cos(m-1)\chi - \cos(m+1)\chi]\Big\}\,\mathrm{d}\chi\,. \tag{22}$$

Po provedení elementárních integrací a malé úpravě dostaneme:

$$\frac{u}{V_0} = -\frac{\omega}{4}\Big[1 - \frac{5}{6}\eta - \frac{\omega}{12}\cos\vartheta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\omega}{24}\Big(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}-B_{n+1}}{n}\Big)\Big]\Big(g_0 - \frac{1}{2}g_1\Big) - \frac{\omega^2}{96}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi}\Big(g_0 - \frac{1}{2}g_2\Big) - \frac{\omega^2}{384}\Big[(2B_0 - B_2)g_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}-B_{n+1}}{n}(g_{n-1}-g_{n+1})\Big] - S(\vartheta)\,, \tag{23}$$

kde

$$S(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\Big\{B_1 + \sum_{n=2}^{\infty}B_n\Big[\frac{\cos(n+1)\chi - \cos(n+1)\vartheta}{(n+1)(\cos\chi-\cos\vartheta)^2} - \frac{\cos(n-1)\chi - \cos(n-1)\vartheta}{(n-1)(\cos\chi-\cos\vartheta)^2} - \frac{2\cos n\vartheta}{\cos\chi-\cos\vartheta}\Big]\Big\}\Big\{g_0(1+\cos\chi) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}g_m[\cos(m-1)\chi - \cos(m+1)\chi]\Big\}\,\mathrm{d}\chi\,. \tag{24}$$

Integrál $S(\vartheta)$ není singulární, jak by se snad na první pohled zdálo, neboť limita koeficientu u B_n pro $\chi = \vartheta$ je

$$\lim_{\chi\to\vartheta}\Big[\frac{\cos(n+1)\chi - \cos(n+1)\vartheta}{(n+1)(\cos\chi-\cos\vartheta)^2} - \frac{\cos(n-1)\chi - \cos(n-1)\vartheta}{(n-1)(\cos\chi-\cos\vartheta)^2} - \frac{2\cos n\vartheta}{\cos\chi-\cos\vartheta}\Big] = \frac{n\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\,. \tag{25}$$

V tomto dodatku budeme předpokládat na př., že $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 |B_n| < \infty$. Za tohoto předpokladu řada s koeficienty B_n v integrandu integrálu (24) konverguje v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ stejnoměrně a můžeme proto integrovat člen po členu (k tomu, aby bylo možné integrovat v integrálu (24) člen po členu, stačila by i mírnější podmínka, avšak zvolený předpoklad nám zajišťuje, že i řada pro gradient tečné složky indukované rychlosti bude konvergovat stejnoměrně).

Jak bylo poznamenáno, jsou všechny integrály v (24) regulární, pro výpočet je však výhodnější (vzhledem k tvaru integrandu) počítat je jako integrály singulární. Nejprve spočítáme hlavní hodnotu singulárního integrálu:

$$S_n = S_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi - \cos n\vartheta}{(\cos\chi - \cos\vartheta)^2} \,\mathrm{d}\chi \,. \tag{26}$$

Především je zřejmé, že

$$S_0 = 0 \quad \text{a} \quad S_1 = I_0 = 0 \,. \tag{27}$$

Pro $n > 1$ dostaneme:

$$S_{n+1} + S_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\chi + \cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\vartheta - \cos(n-1)\vartheta}{(\cos\chi - \cos\vartheta)^2} \,\mathrm{d}\chi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\chi \cos n\chi - \cos\vartheta \cos n\vartheta}{(\cos\chi - \cos\vartheta)^2} \,\mathrm{d}\chi = \frac{2\cos\vartheta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi - \cos n\vartheta}{(\cos\chi - \cos\vartheta)^2} \,\mathrm{d}\chi +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos\chi - \cos\vartheta} \,\mathrm{d}\chi = 2\cos\vartheta S_n + 2I_n \,.$$

Hodnoty singulárních integrálů I_n byly počítány v dodatku I. rovn. (11). Můžeme tedy psáti:

$$S_{n+1} + S_{n-1} = 2\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + 2\cos\vartheta S_n \,. \tag{28}$$

Pomocí rovnic (27) a (28) dokážeme snadno metodou úplné indukce, že:

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi - \cos n\vartheta}{(\cos\chi - \cos\vartheta)^2} \,\mathrm{d}\chi = -\frac{n\cos n\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \frac{\cos\vartheta \sin n\vartheta}{\sin^3\vartheta} \,. \tag{29}$$

Pomocí integrálů S_n můžeme snadno vyjádřit hlavní hodnotu integrálu:

$$S_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\chi (\cos n\chi - \cos n\vartheta)}{(\cos\chi - \cos\vartheta)^2} \,\mathrm{d}\chi \,, \tag{30}$$

neboť

$$S_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{\cos (m + n)\chi - \cos (m + n)\vartheta + \cos (m - n)\chi -$$

$$- \cos (m - n)\vartheta - 2\cos n\vartheta(\cos m\chi - \cos m\vartheta)\} \frac{\mathrm{d}\chi}{(\cos \chi - \cos \vartheta)^2},$$

a tedy

$$S_{m,n} = \tfrac{1}{2} S_{m+n} + \tfrac{1}{2} S_{|m-n|} - \cos n\vartheta S_m \,. \tag{31}$$

Konečně si ještě odvodíme výrazy pro dvě jednoduché kombinace funkcí $S_{m,n}$, které budeme v dalším používat:

$$S_{0,n} + S_{1,n} = S_n + \tfrac{1}{2} S_{n+1} + \tfrac{1}{2} S_{n-1} - \cos n\vartheta\, S_1 \,, \quad n \geq 1 \,.$$

Podle (28) je

$$S_{0,n} + S_{1,n} = (1 + \cos \vartheta)\, S_n + \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}$$

a dosadíme-li ještě za S_n výraz (29), dostaneme:

$$S_{0,n} + S_{1,n} = (1 + \cos \vartheta) \left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin^3 \vartheta} - \frac{n \cos n\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right) . \tag{32}$$

Obdobně určíme:

$$S_{m+1,n} - S_{m-1,n} = \frac{1}{2} (S_{m+n+1} - S_{m+n-1}) + \frac{1}{2} (S_{|m-n+1|} - S_{|m-n-1|}) -$$

$$- \cos n\vartheta(S_{m+1} - S_{m-1}) = \frac{1}{\sin \vartheta} [(m + n) \sin (m + n)\vartheta +$$

$$+ (m - n) \sin|m - n|\vartheta - 2m \cos n\vartheta \sin m\vartheta] \,. \tag{33}$$

Po této přípravě můžeme přistoupit k výpočtu jednotlivých členů integrálu (24). Člen obsahující součin $B_n g_m$, pro $n \geq 2$, $m \geq 1$ bude tvaru:

$$B_n g_m \,.\, K_{m,n} \,, \tag{34}$$

kde

$$K_{m,n} = K_{m,n}(\vartheta) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{n + 1} (S_{m+1,n+1} - S_{m-1,n+1}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n - 1} (S_{m+1,n-1} - S_{m-1,n-1}) - 2 \cos n\vartheta(I_{m+1} - I_{m-1}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4 \sin \vartheta} \left\{ \frac{1}{n + 1} [(m + n + 1) \sin (m + n + 1)\vartheta + \right.$$

$$+ (m - n - 1) \sin|m - n - 1|\vartheta - 2m \cos (n + 1)\vartheta \sin m\vartheta] -$$

$$- \frac{1}{n - 1} [(m + n - 1) \sin (m + n - 1)\vartheta + (m - n + 1) \sin|m - n + 1|\, \vartheta -$$

$$\left. - 2m \cos (n - 1)\vartheta \sin m\vartheta] - 2 \cos n\vartheta[\sin (m + 1)\vartheta - \sin (m - 1)\vartheta] \right\} . \tag{35}$$

Nejprve budeme uvažovat případ, kdy $m > n$; pak platí:

$$K_{m,n} = \frac{1}{4 \sin \vartheta} \{2 \cos m\vartheta[\sin (n + 1)\vartheta - \sin (n - 1)\vartheta] - \\ - 4 \cos n\vartheta \cos m\vartheta \sin \vartheta\} ,$$

a tedy:

$$K_{m,n} = 0 \quad \text{pro} \quad m > n . \tag{36}$$

Dále budeme uvažovat případ $m = n$:

$$K_{n,n} = \frac{1}{4 \sin \vartheta} \Big\{ 2 \cos (n + 1)\vartheta \sin n\vartheta + \frac{2n}{n + 1} [\sin (n + 1)\vartheta \cos n\vartheta - \\ - \cos (n + 1)\vartheta \sin n\vartheta] - 2 \cos n\vartheta[\sin (n - 1)\vartheta + \sin (n + 1)\vartheta - \\ - \sin (n - 1)\vartheta] \Big\} = - \frac{1}{2(n + 1)} . \tag{37}$$

Pro $1 \leq m < n$ dostaneme:

$$K_{m,n} = \frac{1}{4 \sin \vartheta} \Big\{ 2 \cos (n + 1)\vartheta \sin m\vartheta + \frac{2m}{n + 1} [\sin (n + 1)\vartheta \cos m\vartheta - \\ - \cos (n + 1)\vartheta \sin m\vartheta] - 2\cos (n - 1)\vartheta \sin m\vartheta - \\ - \frac{2m}{n - 1} [\sin (n - 1)\vartheta \cos m\vartheta - \cos (n - 1)\vartheta \sin m\vartheta] - \\ - 4 \cos n\vartheta \cos m\vartheta \sin \vartheta \Big\} = \\ = - \cos (n - m)\vartheta + \frac{m}{2(n + 1)} \frac{\sin (n - m + 1)\vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{m}{2(n - 1)} \frac{\sin (n - m - 1)\vartheta}{\sin \vartheta} .$$

Tedy

$$K_{m,n} = - \frac{1}{n^2 - 1} \left[(n^2 - mn - 1) \cos (n - m)\vartheta + m \frac{\cos \vartheta \sin (n - m)\vartheta}{\sin \vartheta} \right], \\ \text{pro} \quad 1 \leq m < n . \tag{38}$$

Konečně ještě zbývá vypočítati

$$K_{0,n} = \frac{1}{2} \Big\{ \frac{1}{n + 1} (S_{0,n+1} + S_{1,n+1}) - \frac{1}{n - 1} (S_{0,n-1} + S_{1,n-1}) - \\ - 2 \cos n\vartheta(I_0 + I_1) \Big\} .$$

Dosadíme-li do této rovnice výrazy (32), dostaneme:

$$K_{0,n} = \frac{1}{2} \Big\{ (1 + \cos \vartheta) \left(\frac{S_{n+1}}{n + 1} - \frac{S_{n-1}}{n - 1} \right) + \\ + \frac{1}{(n^2 - 1) \sin \vartheta} [(n - 1) \sin (n + 1)\vartheta - (n + 1) \sin (n - 1)\vartheta] - 2 \cos n\vartheta \Big\}$$

a po úpravě:

$$K_{0,n} = (1 + \cos\vartheta)\left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\cos n\vartheta}{\sin^2\vartheta} - \frac{1}{n^2-1}\,\frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right) - \cos n\vartheta\,. \tag{39}$$

Pro lepší přehled uvedeme výrazy (36)—(39) souhrnně:
pro $n \geq 2$ platí:

$$K_{m,n} = \begin{cases} (1+\cos\vartheta)\left(\dfrac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{\cos n\vartheta}{\sin^2\vartheta} - \dfrac{1}{n^2-1}\,\dfrac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right) - \cos n\vartheta\,; & \text{pro} \quad m = 0\,, \\ -\dfrac{1}{n^2-1}\left[(n^2 - mn - 1)\cos(n-m)\vartheta + m\,\dfrac{\cos\vartheta\sin(n-m)\vartheta}{\sin\vartheta}\right]; & \text{pro} \quad 1 \leq m < n\,, \\ -\dfrac{1}{2(n+1)}\,; & \text{pro} \quad m = n\,, \\ 0\,; & \text{pro} \quad m > n\,. \end{cases} \tag{40}$$

Dosadíme-li nyní

$$S(\vartheta) = \tfrac{1}{2}B_1(g_0 - \tfrac{1}{2}g_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} B_n g_m K_{m,n} \tag{41}$$

do výrazu (23) pro tečnou složku indukované rychlosti, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{u}{V_0} = &-\frac{\omega}{4}\left[1 - \frac{5}{6}\eta - \frac{\omega}{12}\cos\vartheta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\omega}{24}\left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n}\right)\right]\left(g_0 - \frac{1}{2}g_1\right) - \\ &- \frac{\omega^2}{96}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi}\left(g_0 - \frac{1}{2}g_2\right) - \frac{\omega^2}{384}\left[(2B_0 - B_2)\,g_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n}\,(g_{n-1} - g_{n+1})\right] - \\ &- \frac{1}{2}B_1\left(g_0 - \frac{1}{2}g_1\right) - \frac{1}{3}B_2\left[(1 + 4\cos\vartheta)\,g_0 - 2g_1\cos\vartheta - \frac{1}{2}g_2\right] - \\ &- \frac{1}{2}B_3\left[(1 + 2\cos\vartheta + 3\cos 2\vartheta)\,g_0 - \frac{1}{4}(1 + 6\cos 2\vartheta)\,g_1 - g_2\cos\vartheta - \frac{1}{4}g_3\right] - \\ &- \sum_{n=4}^{\infty}B_n\left\{g_0\left[(1+\cos\vartheta)\left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{1}{n+1}\,\frac{\cos n\vartheta}{\sin^2\vartheta} - \frac{1}{n^2-1}\,\frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right) - \right.\right. \\ &\left. - \cos n\vartheta\right] - \frac{1}{n^2-1}\sum_{m=1}^{n-1}g_m\left[(n^2 - mn - 1)\cos(n-m)\vartheta + \right. \\ &\left.\left. + m\,\frac{\cos\vartheta\sin(n-m)\vartheta}{\sin\vartheta}\right] - \frac{g_n}{2(n+1)}\right\}. \end{aligned} \tag{42}$$

Ve výrazu (42) jsme napsali explicitně jen první tři členy řady (41); další členy jsou v praktických příkladech tak malé, že je můžeme zanedbat (proto se u nich ve výrazu (42) spokojujeme s kratším, ale méně přehledným tvarem).

Pro posouzení funkce profilu je nutné vyšetřovat i průběh gradientu povrchové rychlosti, neboť, jak plyne z práce [11], může mít velký záporný gradient povrchové rychlosti za následek odtržení mezní vrstvy. Napíšeme si proto v tomto dodatku ještě výraz pro derivaci tečné složky indukované rychlosti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\omega}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\omega}{12}\cos\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nB_n\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\right)\left(g_0 - \frac{1}{2}g_1\right) + \\
+ \frac{\omega^2}{96}\left(g_0 - \frac{1}{2}g_2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nB_n\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{8}{3\omega}B_2\left(g_0 - \frac{1}{2}g_1\right) + \frac{2}{\omega}B_3\Big[(1 + 6\cos\vartheta)\,g_0 + \\
+ 3\cos\vartheta\, g_1 + \frac{1}{2}g_2\Big] + \frac{2}{\omega}\sum_{n=4}^{\infty}B_n\Big\{g_0\Big[-\frac{(n-1)\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{1}{n+1}\frac{\cos n\vartheta}{\sin^2\vartheta} - \\
- \frac{1}{n^2-1}\frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3\vartheta} - (1 + \cos\vartheta)\left(\frac{n\cos n\vartheta}{\sin^2\vartheta} - \frac{\cos\vartheta\sin n\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \right. \\
- \frac{n}{n+1}\frac{\sin n\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \frac{2}{n+1}\frac{\cos\vartheta\cos n\vartheta}{\sin^4\vartheta} - \frac{1}{n+1}\frac{\cos(n-1)\vartheta}{\sin^4\vartheta} + \\
\left. + \frac{3}{n^2-1}\frac{\cos\vartheta\sin(n-1)\vartheta}{\sin^5\vartheta}\right)\Big] - \\
- \frac{1}{n^2-1}\sum_{m=1}^{n-1}g_m(n-m)\Big[(n^2 - nm - 1)\frac{\sin(n-m)\vartheta}{\sin\vartheta} - \\
- m\frac{\cos\vartheta\cos(n-m)\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \frac{m}{n-m}\frac{\sin(n-m)\vartheta}{\sin^3\vartheta}\Big]\Big\}\,. \qquad (43)
\end{aligned}$$

Za našich předpokladů o koeficientech konverguje řada (43) stejnoměrně v celém intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

SEZNAM LITERATURY

[1] *W. Birnbaum:* Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie; Z. angew. Math. Mech. sv. 3 (1923), str. 390.

[2] *H. Glauert:* Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie; Berlin: Springer 1929.

[3] *Theodore von Kármán* and *Hsue-Shen Tsien:* Lifting-Line Theory for a Wing in non-uniform Flow; Quarterly of Applied Mathematics, sv. 3 (1945), str. 1—11.

[4] *K. Bausch:* Auftriebsverteilung und daraus abgeleitete Grössen für Tragflügel in schwach inhomogenen Strömung; Luftfahrtforschung, sv. 16 (1939), str. 129—134.

[5] *F. Vandrey:* Beitrag zur Theorie des Tragflügels in schwach inhomogener Parallelströmung; Zeitschrift füt angew. Math. und Mech., sv. 20 (1940), str. 148—152.

[6] *E. Souczek:* Der Tragflügel in der nicht homogenen Strömung; Oest. Ing.-Archiv, sv. 3 (1949), str. 396—404.

[7] *R. P. Isaacs:* Airfoil theory for flows of variable velocity; abstract in Bulletin of the American Mathematical Society, sv. 50 (1949), str. 186.

[8] *J. Polášek:* Theorie tenkého profilu v nehomogenním, silně zakřiveném proudění. Výzkumná zpráva VÚTS: VT-Z 5325, neuveřejněno.

[9] *J. Polášek:* Vstup odstředivého ventilátoru s anulární vodící lopatkou. Výzkumná zpráva VÚTS: VT-Z 5327, neuveřejněno.

[10] *L. V. Kantorovič* i *V. I. Krylov:* Približennyje metody vysšego analiza; Moskva (1952), str. 30—40.

[11] *L. Špaček, M. Růžička:* Požadované rozložení povrchové rychlosti. Výzkumná zpráva VÚTT: VT-Z 5430, neuveřejněno.

Резюме

ТОНКИЙ ПРОФИЛЬ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

ЯН ПОЛАШЕК (Jan Polášek)

(Поступило в редакцию 13/X 1955 г.)

Путем обобщения теории несущей вихревой поверхности Бирнбаума-Глауерта была в этой работе разработана теория тонкого профиля в двухмерном неоднородном потенциальном потоке несжимаемой жидкости. Профиль задан в полярных координатах r, φ уравнением (1,1) и тригонометрическим рядом (2,6), в котором используется вспомагательная координата ϑ или χ [см. ур-ие (1,15)]. Распределение вихрей вдоль профиля дано тригонометрическим рядом (1,18), а радиальная и азимутальная составляющие (относительно полярных координат r, φ) первичной скорости даны соответственно рядами (2,4) и (2,5). Показано, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют уравнениям (2,11) (в которых отбрасываем члены высшего порядка по сравнению с произведением двух коэффициентов). Этими уравнениями можно воспользоваться как для расчета обтекания (распределения вихрей) вдоль данного профиля (прямая проблема), так и для определения кривой профиля (и угла его поворота) в случае, если предписано распределение вихрей (обратная проблема). Для практических расчетов выведены уравнения (6,4)—(6,10), содержащие лишь конечное число членов.

Summary

THEORY OF THIN AIRFOIL SECTIONS IN NON-UNIFORM FLOW

JAN POLÁŠEK

(Received October 13, 1955.)

Modifying Birnbaum-Glauert's lifting-surface-theory, the theory of thin airfoil section in two-dimensional non-uniform flow is developed. Using the polar coordinates r, φ and the auxiliary coordinate ϑ or χ (see Eq. 1,15) the shape of the section is expressed by Eq. 1,1 and the trigonometric series 2,6. The vortex-distribution along the section is expressed by the trigonometric series 1,18 and the normal and tangential components of the primary velocity are expressed by the series 2,4 and 2,5 respectively. It is shown that the coefficients of these series are connected by the Eqs. 2,11 (in which the terms of as high order as the product of two coefficients are considered). These equations can be used both for calculating the flow (vortex-distribution) along a given airfoil (direct problem) and for calculating the shape of the airfoil (and its angle of attack) if the vortex-distribution is given (inverse problem). For practical calculation the Eqs. 6,4—6,10 containing only a finite number of terms are worked out.