Aleš Tondl

Vliv odklonu os čepů od osy ložisek na pohyb a stabilitu rotorů

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 2, 85–102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102520

ČLÁNKY

VLIV ODKLONU OS ČEPŮ OD OSY LOŽISEK NA POHYB A STABILITU ROTORŮ

ALEŠ TONDL

(Došlo dne 17. října 1955.) DT : 621.313.04:621.822

Prvá část této práce podává kvalitativní řešení pohybu rotoru s uvažováním vlivu zakřivení (prohnutí) hřídele. Druhá část se zabývá vlivem odklonu čepů způsobeného průhybem hřídele nevyváženého rotoru na pohyb tohoto rotoru.

Seznam nejdůležitějších značek

Označení:	Veličina:	Rozměr:
L	šířka ložiska	cm
r	poloměr čepu	cm
R	poloměr ložiska	cm
p	tlak v nosné mazací vrstvě v určitém místě	kg cm^{-2}
P	výsledná reakce nosné mazací vrstvy	kg
α_x, α_y	úhly odklonu osy čepu od osy ložiska v horizontální a vertikální rovině	
$\varkappa$	axiální posuv působiště reakce nosné mazací vrstvy	cm
e_0	výstřednost čepu od středu ložiska ve střední rovině k ose ložiska	cm
ω	úhlová rychlost otáčení hřídele	sec^{-1}
m	hmota kotouče	kg cm^{-1} sec^2
l_0	délka hřídele mezi dvěma středy ložisek	cm
I	moment setrvačnosti průřezu hřídele	cm^4
E	modul pružnosti hřídele v ohybu	kg cm^{-2}
x, y	souřadnice těžiště kotouče (kap. 1.) resp. souřadnice středu kotouče (kap. 2.)	cm
ε	výstřednost hmoty kotouče od osy hřídele	cm
t	čas	sec
δ	koeficient poměrného vnějšího tlumení	sec^{-1}
g	zemské zrychlení	cm sec^{-2}

Úvod

Snaha o větší využití a zvýšení účinnosti rotačních strojů, zejména turbokompresorů, vede konstruktéry ke zvyšování rychloběžnosti těchto strojů. Toto však je příčinou některých poruch, vzniklých nadměrným kmitáním celého soustrojí, zejména v nadkritickém běhu. Příčiny těchto poruch mají svůj původ v celé řadě vlivů.

Jedním z nich je vliv nosné mazací vrstvy v kluzných ložiskách rotoru. Zkoumání jeho nejdůležitějšího působení a vysvětlení vzniku samobuzených kmitů jsou věnovány práce autora tohoto článku [1] a [2].

Předložená práce zabývá se vyšetřováním vlivu nerovnoběžnosti osy ložisek a os čepů na pohyb rotoru. Případ nebyl dosud ve světové literatuře řešen.

Poněvadž se jedná o velmi složitý případ, bude podáno pouze kvalitativní řešení, které však postačí jak k zhodnocení uvedeného vlivu, tak k získání potřebného výsledku.

Budou řešeny v zásadě dva případy. V prvé části bude vyšetřován vliv zakřivení hřídele rotoru dodatečně vyváženého. Druhá část bude věnována řešení vlivu odklonu čepu osy ložisek, způsobeného průhybem hřídele nevyváženého rotoru.

1. Vliv kluzných ložisek při geometrickém zakřivení hřídele rotoru

Budeme se zabývat případem rotoru, jehož hřídel, ať už vlivem vadné výroby nebo z jiného důvodu, byl při provozu deformován, takže osa tohoto hřídele je prohnuta. Předpokládejme však, že nevyváženost vzniklá zakřivením byla kompensována dokonalým vyvážením rotoru.

Provedeme nejprve kvalitativní analysu na jednom ložisku, kterou potom budeme aplikovati na celý rotor.

Nechť je α úhel, který svírá osa čepu a osa ložiska vlivem zakřivení hřídele a α_g je úhel odklonu osy čepu a osy ložiska ve vertikální rovině, způsobený průhybem hřídele vlivem vlastní váhy rotoru.

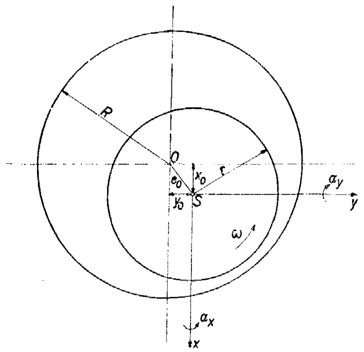
Otáčí-li se hřídel konstantní úhlovou rychlostí ω, pak úhly odklonu čepu od osy ložiska ve vertikální a horizontální rovině vlivem zakřivení hřídele jsou periodickými funkcemi času o periodě $\frac{2\pi}{\omega}$. Proložme si středem čepu souřadný systém a to osu x dolů ve vertikální rovině a osu y v horizontální rovině. Pak α_y bude označovat úhel odklonu čepu ve vertikální rovině kol osy y a α_x v horizontální rovině kol osy x (viz obr. 1). Úhly α_y a α_x budou potom, uvážíme-li, že hodnota α je velmi malá, dány rovnicemi:

$$\alpha_y = \alpha_g + \alpha \cos \omega t \,, \qquad (1,1)$$

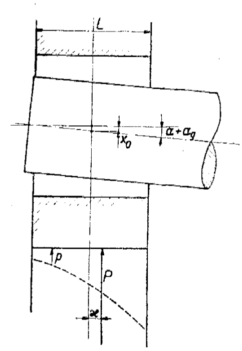
$$\alpha_x = \alpha \sin \omega t \,.$$

Polohy čepu v ložisku pro obě krajní výchylky α_y (t. j. pro $t = 0$ a $t = \pi/\omega$) jsou schematicky naznačeny na obr. 2a, 2b.

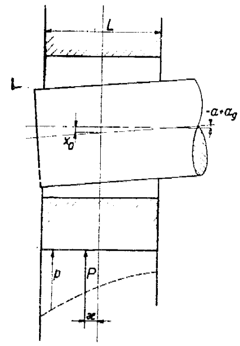
Na obrázcích 2a, 2b jsou také naznačeny průběhy tlaků v nosné mazací vrstvě p za předpokladu, že nenastane axiální průtok oleje. Průběh funkce p není po šířce ložiska lineární jako průběh tloušťky mazací vrstvy h nebo excentricity e, poněvadž, jak známo, není p lineární funkcí těchto hodnot.



Obr. 1.



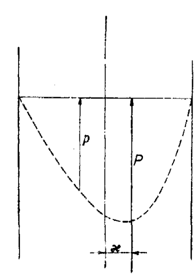
Obr. 2a.



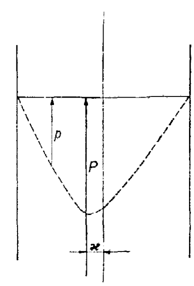
Obr. 2b.

Výsledná vztlaková síla P je potom posunuta od roviny kolmé k ose ložiska jdoucí jeho středem o hodnotu $\varkappa$, která závisí na úhlu odklonu osy čepu α_y a je tedy funkcí ωt.

Předpoklad, že nenastane axiální průtok oleje, je idealisací. Ve skutečnosti budou průběhy tlaků v mazací vrstvě k okrajům ložiska klesati (viz na př.



Obr. 3a.



Obr. 3b.

[3]). Průběh skutečných tlaků pro obě okrajové výchylky (jako na obr. 2) je naznačen na obr. 3a, 3b.

Posunutí výsledné vztlakové síly P ve směru osy ložiska pak lze vyjádřiti funkcí:

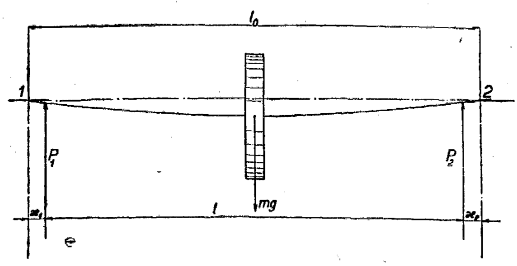
$$\varkappa(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos(n\omega t - \psi_n) . \tag{1,2}$$

Hodnoty K_n a ψ_n budou funkcemi střední výstřednosti e_0 a úhlu α. Hodnota K_0 bude především vyjadřovati posunutí reakce vlivem konstantního průhybu hřídele od vlastní váhy rotoru.

Zanedbáme-li vyšší harmonické složky, lze zhruba funkci vyjádřit rovnicí:

$$\varkappa(t) = K_0(\alpha_g, \alpha, e_0) + K_1(\alpha, e_0) \cos \omega t\,. \qquad (1,2a)$$

Předpokládejme nyní pro jednoduchost, že rotor, který budeme uvažovati, má jediný kotouč o hmotě m, který je umístěn uprostřed hřídele o délce l_0 (vzdálenost mezi středy ložisek). Hmota hřídele nechť je oproti hmotě kotouče zanedbatelná.



Obr. 4.

Zakřivení hřídele se potom projevuje tak, jakoby ložiskové reakce ve vertikálním a horizontálním směru byly pohyblivé (viz obr. 4).

Můžeme potom psát:

$$l = l_0 - \varkappa(t)\,, \qquad (1,3)$$

kde:

$$\varkappa(t) = \varkappa_1(t) + \varkappa_2(t) \qquad (1,3a)$$

a funkce $\varkappa_1(t)$ a $\varkappa_2(t)$ vyjadřují axiální posunutí reakce pravého a levého ložiska.

Budeme předpokládati, že střední výstřednost ložiska e_0 je konstantní, t. j. že čepy se budou otáčeti kol těchto bodů, což je přibližně splněno.[1]) Působiště reakcí budou se pohybovati nejen v axiálním směru, ale také vertikálně v kladném smyslu osy x.

Je-li úhel natočení konce hřídele vlivem působení jednotkové síly $\alpha_p = \dfrac{l^2}{16EI}$, pak posunutí působiště reakce ve vertikálním směru je: $\varkappa\alpha_p$. Statický průhyb hřídele působením jednotkové síly bude potom:

$$a = \frac{l^3}{48EI} + \frac{l^2}{16EI}\,\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}\,.$$

[1]) Podrobněji bude ohodnocen tento předpoklad v dodatku.

Dosadíme-li za l z rovnice (1,3) a zanedbáme-li členy s $\varkappa^2$, dostaneme po úpravě, uvážíme-li, že $l_0 \gg \varkappa$:

$$a \doteq \frac{l_0^3}{48EI}\left(1 - \frac{3}{2l_0}\varkappa\right). \tag{1,4}$$

Tuhost hřídele v místě kotouče bude potom:

$$c \doteq 48EI\,\frac{1}{l_0^3}\left(1 + \frac{3}{2l_0}\varkappa\right). \tag{1,5}$$

Označíme-li tedy x, y souřadnice těžiště kotouče ve vertikálním a horizontálním směru, dostaneme po úpravě tyto diferenciální rovnice pohybu těžiště kotouče:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2[1 + \varphi_x(\omega t)]\,x &= g\,, \\ \ddot{y} + \omega_0^2[1 + \varphi_y(\omega t)]\,y &= 0\,, \end{aligned} \tag{1,6}$$

kde φ_x, φ_y jsou příslušné funkce $\frac{3}{2l_0}\varkappa$ ve směru os x, y a $\omega_0^2 = 48\,\frac{EI}{ml_0^3}$.

Vzhledem k tomu, že obě rovnice jsou na sobě nezávislé, můžeme obě rovnice vyšetřovati zvláště. Poněvadž obě rovnice jsou lineární, můžeme pro řešení stability zabývati se pouze homogenními částmi, t. j. pouze levými stranami rovnice (1,6):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2[1 + \varphi_x(\omega t)]\,x &= 0\,, \\ \ddot{y} + \omega_0^2[1 + \varphi_y(\omega t)]\,y &= 0\,. \end{aligned} \tag{1,6a}$$

Obě tyto rovnice jsou diferenciální rovnice s periodicky proměnnými koeficienty blízké typu Hillova. (Hillovými rovnicemi by byly rovnice (1,6a), kdyby obě periodické funkce $\varphi_x(\omega t)$ a $\varphi_y(\omega t)$ byly sudými funkcemi.)

Zavedeme-li substituci:

$$\omega t = \tau\,,$$

dostanou rovnice (1,6a) tvar:

$$\begin{aligned} x'' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}[1 + \varphi_x(\tau)]\,x &= 0\,, \\ y'' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}[1 + \varphi_y(\tau)]\,y &= 0\,, \end{aligned} \tag{1,6b}$$

kde funkce $\varphi_x(\tau)$, $\varphi_y(\tau)$ mají periodu 2π.

Na základě Floquetovy věty (viz na př. [4], str. 197) mají diferenciální rovnice s periodicky proměnnými koeficienty alespoň jedno řešení tvaru:

$$x(\tau) = e^{\mu_1\tau}f(\tau)\,, \quad y(\tau) = e^{\mu_2\tau}F(\tau)\,, \tag{1,7}$$

kde $f(\tau)$ a $F(\tau)$ jsou periodické funkce τ s periodou 2π a μ_1, μ_2 jsou charakteristické exponenty, které jsou obecně komplexní čísla.

Pro $\varphi_x(\tau) = 0$, $\varphi_y(\tau) = 0$ přejdou funkce $f(\tau)$ a $F(\tau)$ v konstanty a rovnice (1,7) dostanou známý tvar pro rovnice a konstantními koeficienty:

$$x(\tau) = C_1 e^{\mu_1 \tau}, \quad y(\tau) = C_2 e^{\mu_2 \tau}, \tag{1,7a}$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty.

V důsledku Hauptových vět (viz na př. [5]) budou partikulární řešení rovnic (1,6b) s periodou 2π a 4π hraničními mezi řešeními stabilními a labilními.

Poněvadž charakteristické exponenty těchto řešení budou $\mu = \frac{1}{2} in$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (viz [5]), budou hraniční partikulární řešení míti tvar:

$$x(\tau) = e^{\frac{1}{2} in\tau} f(\tau), \quad y(\tau) = e^{\frac{1}{2} in\tau} F(\tau). \tag{1,7b}$$

Pro $\varphi_x(\tau) = 0$, $\varphi_y(\tau) = 0$ dostanou tato řešení ťvar:

$$x(\tau) = C_1 e^{\frac{1}{2} in\tau}, \quad y(\tau) = C_2 e^{\frac{1}{2} in\tau}. \tag{1,7c}$$

Budou tedy hranice labilních oblastí vycházeti z bodů

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{4} n^2.$$

Lze tedy očekávati poruchy stability v okolí hodnot ω

$$\omega = \frac{2}{n} \omega_0. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1,8}$$

Rozveďme si funkce $\varphi_x(\tau)$ a $\varphi_y(\tau)$ ve Fourierovy řady:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\tau - \chi_n), \\ \varphi_y &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\tau - \psi_n). \end{aligned} \tag{1,9}$$

Použijeme-li již odvozených přibližných vzorců pro hranice labilních oblastí (viz [5], kap. VIII, bod 6), dostaneme tyto rovnice pro hranice n-té oblasti:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} &= \frac{1}{4} n^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (A_0 \pm \tfrac{1}{2} A_n), \\ \frac{\omega_0^2}{\omega^2} &= \frac{1}{4} n^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (B_0 \pm \tfrac{1}{2} B_n). \end{aligned} \tag{1,10}$$

Odtud pro mezní ω dostaneme:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{*} &= \frac{2}{n} \omega_0 \sqrt{1 + A_0 \mp \tfrac{1}{2} A_n}, \\ \omega_{1,2}^{**} &= \frac{2}{n} \omega_0 \sqrt{1 + B_0 \mp \tfrac{1}{2} B_n}. \end{aligned} \tag{1,10a}$$

V případě, že bychom uvažovali vnější tlumení působící na kotouč, které budeme považovati za přímo úměrné rychlosti, dostaneme tyto pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2[1 + \varphi_x(\omega t)]\, x = 0\,, \\ \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2[1 + \varphi_y(\omega t)]\, y = 0\,, \end{aligned} \qquad (1,11)$$

resp. substitucí $\omega t = \tau$:

$$\begin{aligned} x'' + \frac{2\delta}{\omega}\, x' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,[1 + \varphi_x(\tau)]\, x = 0\,, \\ y'' + \frac{2\delta}{\omega}\, y' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,[1 + \varphi_y(\tau)]\, y = 0\,. \end{aligned} \qquad (1,11a)$$

Použijeme-li obdobné přibližné vzorce pro hranice labilních oblastí tlumené soustavy (viz [5], kap. VIII, 8), dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \tfrac{1}{4}n^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(A_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{A_n^2 - \frac{4n^2\delta^2\omega^2}{\omega_0^4}}\right), \\ \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \tfrac{1}{4}n^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(B_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - \frac{4n^2\delta^2\omega^2}{\omega_0^4}}\right). \end{aligned} \qquad (1,12)$$

Dosadíme-li ve výraze pod odmocninou

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \doteq \tfrac{1}{4}n^2\,,$$

dostaneme po úpravě pro mezní ω přibližné vztahy:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{*} \doteq \frac{2}{n}\,\omega_0 \sqrt{1 + A_0 \mp \frac{1}{2}\sqrt{A_n^2 - 16\,\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}\,, \\ \omega_{1,2}^{**} \doteq \frac{2}{n}\,\omega_0 \sqrt{1 + B_0 \mp \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 16\,\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}\,. \end{aligned} \qquad (1,12a)$$

Z těchto rovnic pak dostaneme tyto postačující podmínky stability:

$$\frac{4\delta}{\omega_0} > |A_n|\,, \quad \frac{4\delta}{\omega_0} > |B_n|\,. \qquad (1,13)$$

Vzhledem k tomu, že hodnota $\varkappa$ nepřevýší prakticky hodnotu šířky ložiska L ($\varkappa_1 < \frac{1}{2}L$, $\varkappa_2 < \frac{1}{2}L$) můžeme na základě rozvojů (1,9) učiniti hrubý odhad:

$$\frac{3L}{2l_0} > |A_n|\,, \quad \frac{3L}{2l_0} > |B_n|\,. \qquad (1,14)$$

Použijeme-li nerovností (1,14), můžeme postačující podmínku stability též psát ve tvaru:

$$\frac{\delta}{\omega_0} > \frac{3}{8}\,\frac{L}{l_0}\,. \qquad (1,15)$$

Z podmínky (1,15) plyne, že pro malé tlumení, krátký hřídel a široká ložiska může vzniknouti porucha stability chodu rotoru. Amplituda vzniklých kmitů nemusí ovšem s časem trvale narůstat, ale vlivem malých nelineárních členů, které nebyly uvažovány, může po určité době a při určité amplitudě kmitů nastat stacionární stav. Přesto však kmitání, které bývá zpravidla o značné amplitudě, může znamenat vážnou poruchu při trvalém provozu soustrojí.

Dalším výsledkem této části je určení poloh těchto nestabilních oblastí. První a nejširší oblast je (viz rovnice (1,12a) pro $n = 1$), je-li $\omega \doteq 2\omega_0$, t. j. při otáčkách přibližně dvojnásobných než jsou otáčky kritické.

Průměrná frekvence kmitů na hranici těchto labilních oblastí bude ω_0. Tento fakt je podrobně vysvětlen v knize [5]. Mezní řešení mají sice periodu $\frac{2\pi}{\omega}$ a $\frac{4\pi}{\omega}$, pseudoperioda, t. j. doba mezi dvěma výkmity na stejnou stranu od rovnovážné polohy je však přibližně $\frac{4\pi}{n\omega}$.

2. Vliv kluzných ložisek a průhybu hřídele na pohyb rotoru

Uvažujme opět týž rotor jako v předešlé části, t. j. rotor s jedním kotoučem uprostřed hřídele. Budeme předpokládat, že těžiště kotouče nesouhlasí se středem hřídele, t. j. těžiště je vzdáleno o hodnotu ε od osy hřídele, kterou v této části nebudeme již předpokládat za geometricky zakřivenou.

Jak jsme již vyložili v prvé části, je hodnota posunutí reakce $\varkappa$ úměrná úhlu odklonu osy čepu α. Úhly odklonu čepu ve vertikální a horizontální rovině jsou přímo úměrné výchylkám středu kotouče x a y:

$$\alpha_y = \frac{3}{l}(x + x_0)\,, \quad \alpha_x = \frac{3}{l}\,y\,, \tag{2,1}$$

kde x_0 je statický průhyb hřídele $\left(x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}\right)$.

Budeme-li předpokládat, že hodnota $\varkappa$ je lineární funkcí úhlu odklonu čepu α, můžeme potom pro tuhost c odvoditi obdobný vztah jako v části prvé [viz rovnice (1,5)]:

$$c \doteq 48EI\,\frac{1}{l_0^3}\left(1 + \frac{3}{2l_0}\,\varkappa_0\alpha\right). \tag{2,2}$$

Pak příslušné tuhosti ve směru osy x a y budou:

$$\begin{aligned} c_x &\doteq 48\,\frac{EI}{l_0^3}\left(1 + \frac{3}{2l_0}\,\varkappa_{0x}\alpha_y\right) = 48EI\,\frac{1}{l_0^3}\left[1 + \frac{9\varkappa_{0x}}{2l_0^2}\,(x_0 + x)\right], \\ c_y &\doteq 48\,\frac{EI}{l_0^3}\left(1 + \frac{3}{2l_0}\,\varkappa_{0y}\alpha_x\right) = 48EI\,\frac{1}{l_0^3}\left[1 + \frac{9\varkappa_{0y}}{2l_0^2}\,y\right]. \end{aligned} \tag{2,2a}$$

Za předpokladu, že úhlová frekvence otáčení hřídele ω je konstantní, dostaneme po úpravě pro pohyb středu kotouče tyto diferenciální rovnice pohybu, budeme-li uvažovati ještě lineární tlumení:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(1 + q_0 + q_1 x)\, x &= \varepsilon\omega^2 \cos \omega t + g\,, \\ \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2(1 + q_2 y)\, y &= \varepsilon\omega^2 \sin \omega t\,, \end{aligned} \tag{2,3}$$

kde konstanty ω_0^2, δ jsou tytéž jako v prvé části a konstanty q_0, q_1, q_2 jsou dány rovnicemi:

$$q_0 = \frac{9\varkappa_{0x} x_0}{2l_0^2}\,, \quad q_1 = \frac{9\varkappa_{0x}}{2l_0^2}\,, \quad q_2 = \frac{9\varkappa_{0y}}{2l_0^2}\,. \tag{2,3a}$$

Poněvadž obě diferenciální rovnice (2,3) jsou na sobě nezávislé, můžeme každou z rovnic řešiti samostatně. Provedeme si řešení prvé rovnice; řešení druhé rovnice bude obdobné. Nejprve budeme hledati periodické řešení s periodou $\dfrac{2\pi}{\omega}$, t. j. řešení s frekvencí budicí síly, která vzniká vlivem nedokonalého vyvážení rotoru.

K řešení použijeme Poincarého metodu rozvoje podle malého parametru. Jako malý parametr zvolme si q_1.

Řešení prvé rovnice (2,3) budeme potom hledati ve tvaru:

$$x(t) = x^{(0)}(t) + q_1 x^{(1)}(t) + q_1^2 x^{(2)}(t) + \ldots\,, \tag{2,4}$$

které pro malé q_1 konverguje.

Dosadíme-li (2,4) do prvé rovnice (2,3) a porovnáme-li členy u stejných mocnin q_1, dostaneme diferenciální rovnice pro postupné určení funkcí $x^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Prvá diferenciální rovnice je:

$$\ddot{x}^{(0)} + 2\delta\dot{x}^{(0)} + \omega_0^2(1 + q_0)\, x^{(0)} = \varepsilon\omega^2 \cos \omega t + g\,. \tag{2,5}$$

Řešení této diferenciální rovnice obdržíme ve tvaru:

$$x^{(0)}(t) = e^{-\delta t}(M_0 \cos \Omega t + N_0 \sin \Omega t) + {}^{(0)}A_1 \cos \omega t + {}^{(0)}B_1 \sin \omega t + \\ + \frac{g}{\Omega_0^2}\,, \tag{2,6}$$

kde:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2(1 + q_0) - \delta^2}\,, \quad \Omega_0 = \omega_0\sqrt{1 + q_0}\,,$$

$${}^{(0)}A_1 = \frac{1}{\Delta_1}\, \varepsilon\omega^2(\Omega_0^2 - \omega^2)\,, \quad {}^{(0)}B_1 = \frac{1}{\Delta_1}\, 2\varepsilon\delta\omega^3\,,$$

$$\Delta_1 = (\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\,.$$

M_0, N_0 jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Vzhledem k tomu, že hledáme periodické řešení, musí platit:

$$M_0 = N_0 = 0\,.$$

Za druhé diferenciální rovnice:

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\delta\dot{x}^{(1)} + \Omega_0^2 x^{(1)} = -(x^{(0)})^2 = -\frac{g^2}{\Omega_0^4} - \frac{2g}{\Omega_0^2}({}^{(0)}A_1 \cos \omega t + {}^{(0)}B_1 \sin \omega t) -$$
$$- \tfrac{1}{2}[{}^{(0)}A_1^2 + {}^{(0)}B_1^2 + 2{}^{(0)}A_1{}^{(0)}B_1 \sin 2\omega t + ({}^{(0)}A_1^2 - {}^{(0)}B_1^2) \cos 2\omega t] \,, \quad (2,7)$$

můžeme určit funkci $x^{(1)}(t)$.

Řešení rovnice (2,7) je:

$$x^{(1)}(t) = e^{-\delta t}(M_1 \cos \Omega t + N_1 \sin \Omega t) - {}^{(1)}A_0 - {}^{(1)}A_1 \cos \omega t -$$
$$- {}^{(1)}B_1 \sin \omega t - {}^{(1)}A_2 \cos 2\omega t - {}^{(1)}B_2 \sin 2\omega t \,. \quad (2,8)$$

Z podmínky periodicity řešení plyne, že $M_1 = N_1 = 0$. Koeficienty ${}^{(1)}A_k$, ${}^{(1)}B_k$ $(k = 0, 1, 2)$ jsou tvaru:

$${}^{(1)}A_0 = \frac{g^2}{\Omega_0^6} + \frac{1}{2\Omega_0^2}({}^{(0)}A_1^2 + {}^{(0)}B_1^2) = \frac{1}{\Omega_0^2}\left(\frac{g^2}{\Omega_0^4} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2\omega^4}{\Delta_1}\right),$$

$${}^{(1)}A_1 = \frac{2g}{\Omega_0^2}\frac{{}^{(0)}A_1(\Omega_0^2 - \omega^2) - 2\,{}^{(0)}B_1\delta\omega}{\Delta_1} = \frac{2g\varepsilon\omega^2}{\Omega_0^2\Delta_1^2}[(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\delta^2\omega^2] \,,$$

$${}^{(1)}B_1 = \frac{2g}{\Omega_0^2}\frac{{}^{(0)}B_1(\Omega_0^2 - \omega^2) + 2\,{}^{(0)}A_1\delta\omega}{\Delta_1} = \frac{8g\varepsilon\omega^2}{\Omega_0^2\Delta_1^2}\delta\omega(\Omega_0^2 - \omega^2) \,,$$

$${}^{(1)}A_2 = \frac{1}{2\Delta_2}[({}^{(0)}A_1^2 - {}^{(0)}B_1^2)(\Omega_0^2 - 4\omega^2) - 8\delta\omega\,{}^{(0)}A_1{}^{(0)}B_1] =$$
$$= \frac{\varepsilon^2\omega^4}{2\Delta_1^2\Delta_2}\{[(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\delta^2\omega^2](\Omega_0^2 - \omega^2) - 16\delta^2\omega^2(\Omega_0^2 - \omega^2)\} \,,$$

$${}^{(1)}B_2 = \frac{1}{\Delta_2}[{}^{(0)}A_1{}^{(0)}B_1(\Omega_0^2 - 4\omega^2) + 2\delta\omega({}^{(0)}A_1^2 - {}^{(0)}B_1^2)] =$$
$$= \frac{2\delta\varepsilon^2\omega^5}{\Delta_1^2\Delta_2}\{(\Omega_0^2 - \omega^2)(\Omega_0^2 - 4\omega^2) + (\Omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\delta^2\omega^2\} \,,$$

kde $\Delta_2 = (\Omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\delta^2\omega^2$.

Dalším postupem můžeme pak vypočítati další funkce. Zcela obdobným postupem můžeme vypočítat libovolný počet funkcí $y^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Periodické řešení rovnic (2,3) můžeme potom psát ve tvaru:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\omega t - \beta_n) \,,$$
$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos(n\omega t - \gamma_n) \,, \quad (2,9)$$

kde koeficienty X_n, Y_n a fázové úhly β_n, γ_n jsou funkcemi ω, ω_0, q_0, q_1, a q_2.

Zabývejme se stabilitou tohoto periodického řešení. Použijeme-li definice stability podle Ljapunova a dosadíme-li za x a y:

$$x = x(t) + \xi = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\omega t - \beta_n) + \xi \,,$$
$$y = y(t) + \eta = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos(n\omega t - \gamma_n) + \eta \,, \quad (2,10)$$

dostaneme diferenciální rovnice rušivého pohybu, kde ξ a η jsou souřadnicemi poruch:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2[(1 + q_0)\,\xi + q_1(2x(t)\,\xi + \xi^2)] &= 0\,, \\ \ddot{\eta} + 2\delta\dot{\eta} + \omega_0^2[\eta + q_2(2y(t)\,\eta + \eta^2)] &= 0\,. \end{aligned} \tag{2,11}$$

Vzhledem k tomu, že funkce $x(t)$, $y(t)$ jsou periodické funkce času s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$, jsou rovnice (2,11) nelineární diferenciální rovnice s periodicky proměnnými koeficienty. Obě rovnice jsou na sobě nezávislé, takže je můžeme řešiti zvlášť.

Na základě Ljapunovovy věty (viz na př. [4], str. 263) o řešení stability pomocí prvého přiblížení, dostaneme správné řešení stability pomocí prvého přiblížení, pokud se nejedná o tak zv. „kritický případ", t. j. pokud moduly všech kořenů charakteristické rovnice jsou menší než jedna, resp. pokud charakteristické exponenty příslušné kořenům charakteristické rovnice mají reálné části záporné.

Můžeme tedy postupovati obdobně jako v prvé části. Zavedeme-li substituci $\omega t = \tau$, dostaneme linearisací rovnic (2,11) tyto diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} \xi'' + \frac{2\delta}{\omega}\xi' + \frac{\omega_0^2}{\omega}[1 + q_0 + 2q_1 x(\tau)]\,\xi &= 0\,, \\ \eta'' + \frac{2\delta}{\omega}\eta' + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}[1 + 2q_2\, y(\tau)]\,\eta &= 0\,. \end{aligned} \tag{2,11a}$$

Obdobně jako v prvé části dostaneme pro hranice labilních oblastí rovnice

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{*} &\doteq \frac{2}{n}\,\omega_0\sqrt{1 + q_0 + \tfrac{1}{2}(X_0)_{\omega=\frac{2}{n}\omega_0} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(X_n)_{\omega=\frac{2}{n}\omega_0} - 16\,\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}\,, \\ \omega_{1,2}^{**} &\doteq \frac{2}{n}\,\omega_0\sqrt{1 + \tfrac{1}{2}(Y_0)_{\omega=\frac{2}{n}\omega_0} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Y_n)^2_{\omega=\frac{2}{n}\omega_0} - 16\,\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}\,, \end{aligned} \tag{2,12}$$

Odtud pak pro postačující podmínky stability:

$$\frac{8\delta}{\omega_0} > \left|(X_n)_{\omega=\frac{2}{n}\omega_0}\right|\,, \quad \frac{8\delta}{\omega_0} > \left|(Y_n)_{\omega=\frac{2}{n}\omega_0}\right|\,, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{2,12a}$$

Z výše uvedeného rozboru plyne, že periodický pohyb s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$ nemusí být stabilní, zejména pro malé hodnoty δ. Dokážeme v dalším, že je možný periodický pohyb s jinou periodou než $\frac{2\pi}{\omega}$. Z theorie nelineárních kmitů je známo, že pro malé hodnoty tlumení mohou vzniknouti kmity s periodou $\frac{2\pi n}{\omega}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ (viz na př. [5]).

Přepišme si nyní rovnice (2,3) tak, že spojíme členy obsahující δ, q_1, q_2 a vytkněme malý parametr ϑ.

Dostaneme pak po úpravě:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2(1 + q_0)\, x &= -\,\vartheta(2\delta_0\dot{x} + Q_1x^2) + \varepsilon\omega^2\cos\omega t + g\,, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -\,\vartheta(2\delta_0\dot{y} + Q_2y^2) + \varepsilon\omega^2\sin\omega t\,, \end{aligned} \tag{2,13}$$

kde $\vartheta\delta_0 = \delta$, $\vartheta Q_1 = q_1\omega_0^2$, $\vartheta Q_2 = q_2\omega_0^2$.

Poněvadž obě rovnice (2,13) jsou na sobě nezávislé a obdobné, budeme se zabývati pouze řešením prvé rovnice.

Dosaďme za

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2(1 + q_0) = \frac{\omega^2}{n^2} + \vartheta Q\,, \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{2,14}$$

do prvé rovnice (2,13).

Dostaneme tak rovnici:

$$\ddot{x} + \frac{\omega^2}{n^2}\, x = -\,\vartheta(2\delta_0\dot{x} + Qx + Q_1x^2) + \varepsilon\omega^2\cos\omega t + g\,. \tag{2,13a}$$

Předpokládejme řešení ve tvaru:

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \vartheta x^{(1)}(t) + \vartheta^2 x^{(2)}(t) + \ldots\,, \tag{2,15}$$

které pro malé ϑ konverguje.

Dosadíme-li (2,15) do (2,13a) a porovnáme-li koeficienty u stejných mocnin ϑ, dostaneme tyto diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \frac{\omega^2}{n^2}\, x^{(0)} &= \varepsilon\omega^2\cos\omega t + g\,, \\ \ddot{x}^{(1)} + \frac{\omega^2}{n^2}\, x^{(1)} &= -\,[2\delta_0\dot{x}^{(0)} + Qx^{(0)} + Q_1(x^{(0)})^2]\,, \\ \ddot{x}^{(2)} + \frac{\omega^2}{n^2}\, x^{(2)} &= -\,(2\delta_0\dot{x}^{(1)} + Qx^{(1)} + 2Q_1x^{(0)}x^{(1)})\,, \\ &\;\vdots \end{aligned} \tag{2,16}$$

Z těchto rovnic pak můžeme postupně určit libovolný počet funkcí $x^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Řešení prvé rovnice (2,16) je:

$$x^{(0)}(t) = M_0\cos\frac{\omega}{n}\,t + N_0\sin\frac{\omega}{n}\,t + \frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\cos\omega t + \frac{gn^2}{\omega^2}\,. \tag{2,17}$$

Druhá rovnice bude potom tvaru (dosadíme-li za $x^{(0)}(t)$):

$$\ddot{x}^{(1)} + \frac{\omega^2}{n^2}\, x^{(1)} = -\left\{2\delta_0\frac{\omega}{n}\left[-\,M_0\sin\frac{\omega}{n}\,t + N_0\cos\frac{\omega}{n}\,t - \frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\sin\omega t\right] + \right.$$

$$+\,Q\left[M_0\cos\frac{\omega}{n}\,t + N_0\sin\frac{\omega}{n}\,t + \frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\cos\omega t + \frac{gn^2}{\omega^2}\right] +$$

$$+ Q_1\left[\tfrac{1}{2}(M_0^2 + N_0^2) + M_0N_0 \sin\frac{2\omega}{n} t + \tfrac{1}{2}(M_0^2 - N_0^2)\cos\frac{2\omega}{n} t + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\right)^2 (1 + \cos 2\omega t) + M_0 \frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\left(\cos\left(\frac{\omega}{n} + \omega\right) t + \right.$$

$$\left.+ \cos\left(\frac{\omega}{n} - \omega\right) t\right) + N_0 \frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\left(\sin\left(\frac{\omega}{n} + \omega\right) t + \sin\left(\frac{\omega}{n} - \omega\right) t\right) +$$

$$\left.\left.+ \frac{g^2n^4}{\omega^4} + 2\frac{gn^2}{\omega^2}\left(M_0 \cos\frac{\omega}{n} t + N_0 \sin\frac{\omega}{n} t + \frac{\varepsilon\omega^2}{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - \omega^2}\cos\omega t\right)\right]\right\}.$$

Poněvadž hledáme periodické řešení, musí býti koeficienty na pravé straně rovnice u členů $\cos\frac{\omega}{n} t$ a $\sin\frac{\omega}{n} t$ rovny nule.

Pro $n \neq 2$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$ budou tedy platit rovnice:

$$\begin{aligned} \left(Q + 2Q_1\frac{gn^2}{\omega^2}\right) M_0 + 2\delta_0\frac{\omega}{n} N_0 &= 0\,, \\ -2\delta_0\frac{\omega}{n} M_0 + \left(Q + 2Q_1\frac{gn^2}{\omega^2}\right) N_0 &= 0\,. \end{aligned} \tag{2,18}$$

Poněvadž determinant této soustavy homogenních rovnic je od nuly různý, musí platit $M_0 = N_0 = 0$.

Pro $n = 2$ budou platit rovnice:

$$\begin{aligned} \left[Q + 4Q_1\left(\frac{2g}{\omega^2} - \tfrac{1}{3}\varepsilon\right)\right] M_0 + \delta_0\omega N_0 &= 0\,, \\ -\delta_0\omega M_0 + \left[Q + 4Q_1\left(\frac{2g}{\omega^2} + \tfrac{1}{3}\varepsilon\right)\right] N_0 &= 0\,. \end{aligned} \tag{2,19}$$

Pro netriviální řešení $(M_0 \neq N_0 \neq 0)$ musí se determinant soustavy rovnat nule:

$$\left(Q + 8Q_1\frac{g}{\omega^2}\right)^2 - \frac{16}{9} Q_1\varepsilon^2 + \delta_0\omega^2 = 0\,. \tag{2,20}$$

Dosadíme-li za Q z rovnice (2,14) a vydělíme-li rovnici ω_0^4, budou všechny členy rovnice (2,20) bezrozměrné.

Zavedeme-li označení:

$$\frac{\delta_0}{\omega_0} = D\,, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \eta\,, \quad y_0 = \frac{g}{\omega_0^2}\,, \tag{2,21}$$

dostaneme:

$$\left(1 + q_0 - \tfrac{1}{4}\eta^2 + 8\frac{q_1}{\eta^2} y_0\right)^2 - \frac{16}{8} q_1^2\varepsilon^2 + D^2\eta^2 = 0\,. \tag{2,22}$$

Poněvadž platí:

$$q_1 \ll 1\,, \quad y_0 \ll 1\,, \quad D^2 \ll 1\,, \quad \varepsilon \ll 1\,, \quad q_0 \ll 1\,,$$

bude rovnice (2,22) přibližně:

$$1 - \tfrac{1}{4}\eta^2 \doteq 0\,, \quad \text{t. j.} \quad \eta \doteq 2 \quad \text{nebo} \quad \omega \doteq 2\omega_0\,. \tag{2,22a}$$

Lze tedy říci, že přibližně při dvojnásobných otáčkách než jsou otáčky kritické mohou vzniknouti kmity s poloviční frekvencí, než která by odpovídala frekvenci otáčení hřídele.

Kdybychom vzali v úvahu další rovnice (2,16), dokázali bychom možnost vzniku kmitů s periodou $\frac{2n}{\omega}\pi$ ($n = 3, 4, \ldots$). Tyto však mají mnohem menší význam vzhledem k tomu, že se projeví ve funkcích $x^{(2)}(t)$ a vyšších členů, které jsou násobeny kvadrátem malého parametru ϑ a jeho vyššími mocninami.

3. Dodatek

V prvé části jsme předpokládali, že hodnota výstřednosti středu čepu e uprostřed ložiska je konstantní. Proveďme nyní zhodnocení tohoto předpokladu.

Nechť e_0 je výstřednost středu čepu v případě, že osa čepu je rovnoběžná s osou ložiska. Budeme-li pro jednoduchost předpokládat, že nenastane axiální průtok oleje ložiskem, bude pro zatížení čepu silou P platit:

$$P = KF\left(\frac{e_0}{R - r}\right) L\,, \tag{3,1}$$

kde $K = 6\eta \frac{r^3}{(R - r)^2}$ (η — součinitel dynamické vazkosti). Funkce $F\left(\frac{e_0}{R - r}\right)$ je monotonně rostoucí funkcí (viz [1], [2]).

Vlivem ohnutí hřídele a vlastního průhybu hřídele pak v místě vzdáleném o hodnotu s (viz obr. 5) od středu ložiska bude výstřednost:

$$e = e_s + [\alpha(\cos \omega t - \varphi_s) + \alpha_g \cos \varphi_s]\, s = e_s + \bar{\alpha}(t)\, s\,, \tag{3,2}$$

kde e_s je výstřednost ve středu ložiska, φ_s je úhel, který svírá vektor e_s s vertikální rovinou, jdoucí osou ložiska.

Rovnice pro sílu P bude míti tvar:

$$P = K \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} F\left(\frac{e}{R - r}\right) \mathrm{d}s\,. \tag{3,3}$$

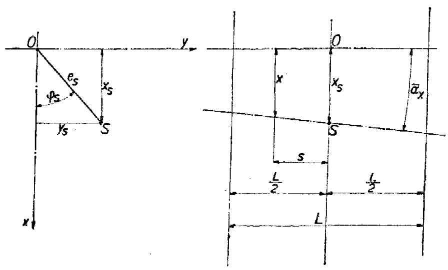
Porovnáním rovnic (3,1) a (3,3) obdržíme:

$$F\left(\frac{e_0}{R - r}\right) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} F\left(\frac{e}{R - r}\right) \mathrm{d}s\,. \tag{3,4}$$

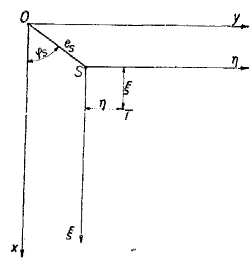
Rozvineme-li funkci $F\left(\frac{e}{R-r}\right)$ v Taylorovu řadu v okolí hodnoty $\frac{e_s}{R-r}$, dostaneme:

$$F\left(\frac{e}{R-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)} \left(\frac{e_s}{R-r}\right)\left[\frac{\bar{\alpha}(t)\, s}{R-r}\right]^n , \tag{3,5}$$

kde $F^{(n)}$ označuje n-tou derivaci podle $\frac{e_s}{R-r}$.



Obr. 5.



Obr. 6.

Dosadíme-li rozvoj (3,5) do rovnice (3,4), dostaneme:

$$F\left(\frac{e_0}{R-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{(2n)!}\, \frac{1}{(2n+1)} \left[\frac{\bar{\alpha}(t)\, L}{2(R-r)}\right]^{2n} F^{(2n)}\left(\frac{e_s}{R-r}\right)\right\}. \tag{3,5a}$$

Z této rovnice plyne jednak, že pro větší hodnoty $\frac{e_s}{R-r}$ bude:

$$e_0 > e_s$$

a jednak, že hodnota e_s bude periodickou funkcí času s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$. Rovněž bychom mohli odvoditi, že i hodnota φ_s je periodickou funkcí času.

Obě funkce e_s, φ_s můžeme si vyjádřiti ve formě trigonometrických řad. Vedle absolutních členů budou ještě výrazné prvé dvě harmonické složky s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$ a $\frac{\pi}{\omega}$.

Předpokládejme pro jednoduchost, že rotor je úplně symetrický k půlící rovině kolmé na osu hřídele, t. j., že je i symetrická deformace hřídele. Můžeme tak celý případ vyšetřovati jako rovinný. Zvolme si pevný souřadný systém x, y s počátkem na ose ložisek O (viz obr. 6). Počátkem S v průmětu spojnice středů čepu v půlících rovinách obou ložisek položme si souřadný systém ξ, η s osami rovnoběžnými se systémem x, y.

V prvé části jsme si pohyb těžiště rotoru T vyjádřili v souřadném systému s počátkem ve středu čepu uprostřed ložiska (na obr. 6 S), tedy podle nového označení v souřadnicích ξ a η. V prvé části však souřadný systém ξ, η vzhledem k předpokladu $e_s =$ konst byl systémem pevným.

Poněvadž, jak jsme dokázali, jsou hodnoty e_s, φ_s periodickými funkcemi času, koná systém ξ, η vůči pevnému souřadnému systému relativní pohyb, vyjádřený souřadnicemi x_s, y_s.

Pohybové rovnice (1,6) dostanou tak tvar:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2[1 + \varphi_x(\omega t)]\, x &= g + \omega_0^2[1 + \varphi_x(\omega t)]\, x_s\,, \\ \ddot{y} + \omega_0^2[1 + \varphi_y(\omega t)]\, y &= \omega_0^2[1 + \varphi_y(\omega t)]\, y_s\,. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Kdybychom považovali x_s a y_s za pevně dané (nesmíme zapomenout, že hodnota e_s v rovnici (3,2) byla určena pouze ze statické úvahy), liší se rovnice (3,6) od rovnice (1,6) o další rušivé funkce na pravých stranách rovnice (3,6). Správný postup by však byl, abychom řešili rovnice:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2[1 + \varphi_x(\omega t)]\,(x - x_s) &= g\,, \\ \ddot{y} + \omega_0^2[1 + \varphi_y(\omega t)]\,(y - y_s) &= 0\,, \\ c(x - x_s) &= P_e \cos \varphi_s + P_\varphi \sin \varphi_s\,, \\ c(y - y_s) &= P_e \sin \varphi_s - P_\varphi \cos \varphi_s\,, \end{aligned} \tag{3,7}$$

kde c je tuhost hřídele a P_e, P_φ jsou radiální a tangenciální složka reakce nosné mazací vrstvy obou ložisek (viz [1], [2]).

Poznámka: Funkce

$$P_e = P_0(e_s, \dot{e}_s, \dot{\varphi}_s)\,, \quad P_\varphi = P_\varphi(e_s, \dot{e}_s, \dot{\varphi}_s)\,,$$

bychom museli určovati rovněž integrací podél šířky ložiska (od $-\frac{1}{2}L$ do $+\frac{1}{2}L$) z funkcí P_e, P_φ:

$$P_e(e_s, \dot{e}_s, \dot{\varphi}_s) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} P_e(e, \dot{e}, \dot{\varphi})\, \mathrm{d}s\,, \quad P_\varphi(e_s, \dot{e}_s, \dot{\varphi}_s) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} P_\varphi(e, \dot{e}, \dot{\varphi})\, \mathrm{d}s\,.$$

Dosadíme-li za x_s a y_s z rovnic

$$x_s = e_s \cos \varphi_s\,, \quad y_s = e_s \sin \varphi_s$$

do rovnic (3,6), budou rušivé funkce na pravé straně míti vedle absolutních členů především dvě výraznější harmonické složky s periodou $\dfrac{2\pi}{\omega}$ a $\dfrac{\pi}{\omega}$. Z toho můžeme již učiniti závěr, že vliv nekonstantních x_s, y_s vyvolá vynucené kmity s vrcholy amplitud jednak pro $\omega \doteq \omega_0$ a jednak pro $\omega \doteq \frac{1}{2}\omega_0$.

Kdybychom použili rovnic (3,7), mohli bychom přesněji vyjádřiti vliv deformovaného hřídele i pro případ nestabilní rovnováhy čepu v ložisku. Výpočet však, i když by se mohl provésti pouze přibližně, by byl značně pracný. Rovnice (3,7) jsou podobné pohybovým rovnicím, které byly řešeny v pracích [1], [2] a liší se pouze o funkce $\varphi_x(\omega t)$, $\varphi_y(\omega t)$.

Závěr

Výsledky obou částí můžeme shrnouti do tohoto závěru: Je-li hřídel rotoru zakřiven (ohnut), pak může především při otáčkách přibližně dvojnásobných než jsou otáčky kritické vzniknouti porucha, projevující se buď přímo nestabilitou nebo nadměrným vzrůstem amplitud kmitání rotoru. Theoreticky může vzniknouti porucha při $\frac{2}{n}$ násobku kritických otáček ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Avšak pro $n = 3, 5, 6, \ldots$ budou poruchy již méně významné. Pro $n = 2$ projeví se vliv ohnutí hřídele zesílením resonance vlivem nevyváženosti rotoru. Pro $n = 4$ mohou vzniknouti kmity především v důsledku pohybu středu čepu, jak bylo vysvětleno v dodatku. Porucha při dvojnásobných kritických otáčkách projeví se kmity rotoru o frekvenci přibližně rovné kritické frekvenci rotoru.

V případě nevyváženého rotoru s rovným hřídelem budou míti vynucené kmity rotoru s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$ resonanční vrcholy amplitud přibližně při $\frac{1}{n}$ násobku kritických otáček ($n = 1, 2, \ldots$). S rostoucím n však výška těchto vrcholů bude rychle klesati. Vzhledem k nelineárnímu vlivu prohnutí hřídele mohou vzniknouti kmity při n násobných ($n = 2, 3, 4, \ldots$) otáčkách vzhledem k otáčkám kritickým s frekvencí vlastních kmitů rotoru. Praktický význam však budou míti kmity při dvojnásobku kritických otáček.

Z těchto uzávěrů plynou především tyto požadavky na konstrukci:

a) Posunouti rozsah provozních otáček mimo oblast dvojnásobných kritických otáček, a to pokud možno pod dvojnásobek těchto otáček. (Nad dvojnásobnými kritickými otáčkami mohly by vzniknouti samobuzené kmity rotoru, pokud bychom neučinili preventivní opatření; viz [1] a [2].)

b) Zkrátit pokud možno šířky ložiskových pánví.

Charakteristickým rysem poruchy tohoto druhu je, že se vyskytuje především při dvojnásobných kritických otáčkách a frekvence kmitů rotoru na rozdíl od poruchy vlivem samobuzených kmitů rotoru (viz [1] a [2]) je soudělná s frekvencí otáček hřídele.

LITERATURA

[1] *Tondl A.:* Výzkum vlivu nosné mazací vrstvy na stabilitu rotorů. (Zpráva VÚTT Z — 147, 1954.)

[2] *Tondl A.:* Vliv nosné mazací vrstvy na stabilitu pohybu čepu v ložisku a vznik samobuzených kmitů rotorů. (Rozpravy ČSAV, řada TV, čís. 2, 1956.)

[3] *Коровчинский М. В.:* Прикладная теория подшипников жидкостного трения. (Машгиз, 1954.)

[4] *Малкин И. Г.:* Теория устойчивости движения. (Гостехиздат, 1952.)

[5] *Půst L., Tondl A.:* Úvod do theorie nelineárních a quasiharmonických kmitů mechanických soustav. (Nakladatelství ČSAV, 1956.)

Резюме

ВЛИЯНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОСЕЙ ШИПОВ ОТ ОСИ ПОДШИПНИКОВ НА ДВИЖЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РОТОРОВ

АЛЕШ ТОНДЛ (Aleš Tondl)

(Поступило в редакцию 17/X 1955 г.)

Данная работа касается исследования влияния отклонения осей шипов в подшипниках масленного скольжения на движение ротора.

Первая часть посвящена качественному исследованию данного влияния в тех случаях, когда вал ротора деформирован, изогнут, хотя и сам по себе является в совершенстве сбалансированным.

Во второй части рассматривается это влияние, осуществляющееся когда отклонение осей шипов бывает вызвано изгибными колебаниями несбалансированного ротора.

В результате этих влияний имеется возможность нарушений устойчивости в $\frac{2}{n}$ (n — 1, 2, 3) раза больших оборотах, чем обороты критические. Во втором случае еще существует возможность возникновения субгармонического резонанса, причем прежде всего при оборотах двухкратных в сравнении с критическими.

Summary

THE INFLUENCE OF THE SLOPE OF JOURNAL AXES FROM BEARING AXIS ON THE MOTION AND STABILITY OF ROTORS

ALEŠ TONDL

(Received October 17, 1955.)

This paper deals with the investigation of the influence of the slope of journal axes in journal bearings on the motion of the rotor.

The first part is devoted to the qualitative evaluation of this effect for the case, when the journals of the rotor have certain initial deformations, even though the rotor itself is well balanced.

In the second part the same effect is studied, the slope of journal axes being produced as a consequence of whirling vibration of an unbalanced rotor.

It is stated, that these effects can give rise to stability disturbances when the shaft rotates at $2/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) multiple of critical whirling speed. In the second case subharmonical resonance can occur, first of all at 2-multiple of critical speed.