Czechoslovak Mathematical Journal, 39 (114) 1989, Praha

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ СТЕПЕННЫМ МЕТОДОМ

ФАМ ВАН АТ, Ханой

(Поступило в редакцию 5ого августа 1986)

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть A — примитивная неотрицательная $(n \times n)$-матрица, $u^{(0)}$ — неотрицательный n-мерный вектор, $u^{(0)} \neq 0$. Исходя из A и $u^{(0)}$ строятся векторная последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ и числовая последовательность $\{\varrho_k\}_{k=0}^{\infty}$ по формулам:

$$v^{(k)} = Au^{(k)}, \quad u^{(k)} = (u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)})^T, \quad v^{(k)} = (v_1^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)})^T, \tag{1.1}$$

$$\varrho_k = \frac{v_1^{(k)} + \ldots + v_n^{(k)}}{u_1^{(k)} + \ldots + u_n^{(k)}}, \tag{1.2}$$

$$u^{(k+1)} = \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|}, \quad \|v^{(k)}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i^{(k)}|. \tag{1.3}$$

Тогда, как известно (см., например, [2], стр. 174), последовательность $\{\varrho_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к наибольшему собственному значению $\varrho(A)$ и последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к соответствующему собственному вектору u. Иначе говоря,

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_k = \varrho(A), \tag{1.4}$$

$$\lim_{k \to \infty} u^{(k)} = u, \quad \|u\| = 1, \tag{1.5}$$

$$Au = \varrho(A)\, u. \tag{1.6}$$

В этой статье доказывается подобный результат для неотрицательных матриц.

2. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть A — неотрицательная $(n \times n)$-матрица со всеми положительными диагональными элементами, $u^{(0)}$ — положительный n-мерный вектор.*

Тогда последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *и* $\{\varrho_k\}_{k=0}^{\infty}$, *построенные по* (1.1)–(1.3), *сходятся и имеют место соотношения* (1.4)–(1.6).

Значение теоремы 1. Эта теорема утверждает, что если в качестве начального приближения взять любой положительный вектор, то степенной метод всегда приводистя к наибольшему собственному значению и соответствующему собственному вектору матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^n \geqq 0$ со всеми $a_{ii} > 0$. Все эти результаты переносятся на случай любых неотрицательных матриц с учетом, что последняя преобразуется в нетроицательную матрицу со всеми положительными диагональными элементами, если к ней прибавить произвольную положительную скалярную матрицу.

Теорема 1 доказана в § 4.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Исходя из A строится векторная последовательность $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad a_{ij}^{(k+1)} = \frac{a_{ij}^{(k)} s_j^{(k)}}{s_i^{(k)}}, \tag{3.1}$$

$$s_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}, \tag{3.2}$$

$$q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \ldots, q_n^{(k)})^T, \quad q_i^{(k)} = \Big(\prod_{t=0}^{k-1} s_i^{(t)}\Big) \Big[\max_{1 \leqq j \leqq n} \Big(\prod_{t=0}^{k-1} s_j^{(t)}\Big)\Big]^{-1}. \tag{3.3}$$

В [3] было доказано, что

$$\|q^{(k)}\| = 1, \quad \lim_{k \to \infty} \|Aq^{(k)} - \varrho(A)\, q^{(k)}\| = 0. \tag{3.4}$$

Через e обозначим n-мерный вектор, у которого все координаты равны единице:

$$e = (1, \ldots, 1)^T.$$

Исходя из A и e строится векторная последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ по формулам:

$$x^{(k)} = \frac{A^k e}{\|A^k e\|}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Лемма 1. *При любом* $k = 1, 2, \ldots$, *имеет место равенства:*

$$x^{(k)} = q^{(k)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из (1.1)–(1.3) следует, что

$$q_i^{(k+1)} = \frac{q_i^{(k)} s_i^{(k)}}{\max\limits_{1 \leqq j \leqq n} \{q_j^{(k)} s_j^{(k)}\}}, \tag{3.7}$$

$$(3.8)\qquad s_i^{(k)}q_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^{(k)}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

По (3.5) имеем

$$(3.9)\qquad x_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{\max\limits_{1\leqq t\leqq n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j^{(k)}\right\}}\,.$$

Пусть для некоторого $k \geqq 1$ имеют место равенства

$$x_i^{(k)} = q_i^{(k)}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Тогда из (3.7)–(3.9) следует, что

$$x_i^{(k+1)} = q_i^{(k+1)}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

С другой стороны нетрудно проверить, что $x_i^{(1)} = q_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому по индукции получим (3.6). Лемма доказана.

Из (3.4) и леммы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и ее любая сходящаяся подпоследовательность сходится к собственному вектору матрицы A, соответствующему $\varrho(A)$.*

Лемма 2. *Последовательност $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к собственному вектору матрицы A, соответствующему $\varrho(A)$, т.е.*

$$(3.10)\qquad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x\,, \quad \|x\| = 1\,, \quad Ax = \varrho(A)\,x\,.$$

Доказательство. Пусть A имеет m разных собственных значений, занумерованных в порядке убывания модулей: $|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \ldots \geqq |\lambda_m|$. Из того, что $A \geqq 0$ и $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$ нетрудно заметить, что

$$(3.11)\qquad \lambda_1 = \varrho(A) > |\lambda_2| \geqq \ldots \geqq |\lambda_m|\,.$$

Обозначим через E_i конервое подпространство матриц A, соответствующее λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Тогда вектор l представится единственным образом в виде:

$$(3.12)\qquad l = l^{(1)} + l^{(2)}\,,$$

где

$$l^{(1)} \in E_1\,, \quad l^{(2)} \in H_2 \equiv E_2 \oplus E_3 \oplus \ldots \oplus E_m\,.$$

Докажем, что

$$(3.13)\qquad l^{(1)} \neq 0\,.$$

Действительно, если $l^{(1)} = 0$, то $l \in H_2$. Следовательно из (3.5) следует, что $x^{(k)} \in H_2$ для $\forall k \geqq 1$. Однако это противоречит следствию 1. Наконец, как известно (см. [1], стр. 504), из (3.5), (3.11)–(3.13) можно получить (3.10). Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I

Положим

$$
\begin{aligned}
U &= \operatorname{diag}(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) > 0\,, \\
B &= U^{-1}AU\,, \\
y^{(k)} &= \frac{B^k e}{\|B^k e\|}\,, \\
\alpha_k &= \frac{\|B^k e\|}{\|UB^k e\|} > 0\,.
\end{aligned}
$$

Тогда из (1.1) и (1.3) следует, что

(4.1) $$u^{(k)} = \alpha_k \cup y^{(k)}\,, \quad \|y^{(k)}\| = \|u^{(k)}\| = 1\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Согласно лемме 2 имеем

$$
\begin{gathered}
\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y\,, \quad \|y\| = 1\,, \\
By = \varrho(B)\, y = \varrho(A)\, y\,.
\end{gathered}
$$

Отсюда и из (4.1) получим, что

$$
\begin{gathered}
\lim_{k\to\infty} u^{(k)} = u = \frac{Uy}{\|Uy\|}\,, \\
Au = \varrho(A)\, u\,.
\end{gathered}
$$

Итак получили соотношения (1.5) и (1.6). Наконец из (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6) следует (1.4). Теорема доказана.

Литература

[1] *Уилкинсон Дж. Х.:* Алгебраическая проблема собственных значений, перевод с англ. — „Наука", М., 1970.

[3] *Маркус М., Минк Х.:* Обзор по теории матриц и матричных неравенств, перевод с англ. — „Наука", М., 1972.

[3] *Фам Ван Ат.:* Определение наибольшего характеристического числа и соответствующего ему собственного вектора неотрицательной матрицы. — ЖВМ и МФ, 1981, т. *21*, № 4, с. 819—834.