Bruno Bosbach

Hyperarchimedische Teilbarkeitshalbgruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 39 (1989), No. 3, 528–543

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102325`

Czechoslovak Mathematical Journal, 39 (114) 1989, Praha

HYPERARCHIMEDISCHE TEILBARKEITSHALBGRUPPEN

BRUNO BOSBACH, Kassel

(Eingegangen am 21. Juni 1988)

Unter einer Teilbarkeitshalbgruppe verstehen wir jede Algebra $(S, \cdot, 1, \wedge)$, die den Gesetzen genügt:

(A1) $(S, \cdot)$ is Halbgruppe

(A2) $(S, \wedge)$ is Halbverband

(A3) $x(a \wedge b) y = xay \wedge xby$

(A4) $a \leqq b \Rightarrow \exists x, y\colon ax = b = ya$.

Demzufolge ist die Teilbarkeitshalbgruppe eine gemeinsame Verallgemeinerung der Verbandsgruppe, in die sie übergeht, wenn $(S, \cdot)$ sogar Gruppe ist, und des distributiven Verbands, in den si übergeht, wenn $(S, \cdot)$ sogar Halbverband ist.

Ziel der vorligenden Note ist eine Studie der hyperarchimedischen Teilbarkeitshalbgruppen. Eine Verbandsgruppe heißt hyperarchimedisch, wenn alle ihre homomorphen Bilder archimedisch sind. Das ist gleichbedeutend damit, daß sich alle ihre subdirekt irreduziblen homomorphen Bilder einbetten lassen in die klassische Verbandsgruppe $(\mathbb{R}, +, \max, \min)$, [15].

Hyperarchimedische Verbandsgruppen wurden wiederholt untersucht, vgl. hierzu etwa [6] oder den Beitrag von P. F. Conrad in dieser Zeitschrift [14] sowei die dort zitierte Literatur: [1], [2], [3], [4], [16], [17], [18], [19]. Dabei wurden im wesentlichen vier (äquivalente) Kriterien in den Vordergrund gestellt, nämlich:

(a) Jede prime Untergruppe is maximal.

(b) Jede 1-erzeugte solide Untergruppe ist ein direkter Faktor.

(c) G ist isomorph zu einer Gruppe reeller Funktionen mit:

$$0 \leqq f, g \Rightarrow \exists n\colon f(x)^n \geqq g(x) \quad (\forall f(x) \neq 0)\,.$$

(d) Sind a und t positiv, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$a \wedge t^n = a \wedge t^{n+1}\,.$$

Schaut man jedoch auf die Strukture der Teilbarkeitshalbgruppe, so erkennt man leicht, daß $\mathbb{R}$, erweitert um $+\infty$, bezüglich der kanonischen Erweiterungen von $+$, max, min nicht eine dieser Bedingungen erfüllt, wenn man Gruppe modifiziert zu Halbgruppe, obwohl alle homomorphen Bilder archimedisch im Sinne der Teilbarkeitshalbgruppen sind, d.h. $t^n \leqq a \; (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow ta \leqq a \geqq at$ erfüllen. Dies gibt

Anlaß zu einer doppelten Fragestellung. So ist zum einen zu klären, was die Implikationen der Bedingungen (a), ..., (d) sind, und zum anderen, welches Kriterium für Teilbarkeitshalbgruppen leistet, was (a), ..., (d) für Verbandsgruppen leisten.

Gehen wir andererseits von den zuzulassenden total geordneten homomorphen Bildern aus, so bietet sich die Unterscheidung nach stark archimedischen total geordneten Bildern ($1 \leqq t$ & $a \in S \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$: $t^n \geqq a$) und (schwach) archimedischen total geordneten Bildern ($1 \leqq t$ & $t^n \leqq a$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow ta = a = at$) an, und es liegt nahe, zu trennen nach Teilbarkeitshalbgruppen mit lauter atomaren und solchen mit (auch) dichten subdirekt irreduziblen homomorphen Bildern.

Somit stellen sich u.a. als natürliche Aufgaben:

(1) Eine Charakterisierung archimedischer Teilbarkeitshalbgruppen mit ausnahmslos archimedischen total geordneten homomorphen Bildern.

(2) Eine Charakterisierung archimedischer Teilbarkeitshalbgruppen mit ausnahmslos stark archimedischen total geordneten Bildern.

(3) Eine Charakterisierung archimedischer Teilbarkeitshalbgruppen mit ausnahmslos stark archimedischen atomaren total geordneten Bildern.

Ihnen soll im folgenden nachgegangen werden. Dabei gelangen wir zu teilweise überraschenden Resultaten, von denen als die beiden auffallendsten schon hier erwähnt seien:

(1) Eine Teilbarkeitshalbgruppe ist hyperarchimedisch (alle homomorphen Bilder sind archimedisch), gdw. ihre Idealhalbgruppe archimedisch ist.

(2) Eine Teilbarkeitshalbgruppe ist faktoriell (nach [7] also komplementär mit spezieller Kettenbedingung), gdw. ihre Idealhalbgruppe wenigstens komplementär bzw. gleichwertig hiermit $\wedge$-distributiv ist.

0. VORBEMERKUNGEN

Die Arithmetik der Teilbarkeitshalbgruppen sei als bekannt vorausgestzt, wir verweisen diesbezüglich auf [8], [9], [10], [11]. Hingegen wollen wir ausführlich eingehen auf die Rolle von Idealen in Teilbarkeitshalbgruppen.

0.1. Definition. Sei S eine beliebige Teilbarkeitshalbgruppe. Dann verstehen wir unter einem *Ideal* aus S jedes Verbandsideal I mit $I \cap S^+ \neq \emptyset$ und unter einem *Filter* aus S jeden Verbandsfilter.

Weiter verstehen wir unter einem *m-Ideal* jedes Verbandsideal I mit $I \,.\, I \subseteqq I$ und unter einem m-Filter jeden Filter F mit $F.S \subseteqq F \supseteqq S.F$.

Hinsichtlich $(S, \cdot)$ ist ein m-Filter also nichts anderes als ein Rees-Ideal im Sinne der Halbgruppentheorie.

0.2. Definition. Sei S eine Teilbarkeitshalbgruppe. Dann nennen wir ein Ideal I bzw. einen Filter F *irreduzibel*, wenn gilt:

$$a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I \wedge b \in I \quad \text{bzw.} \quad a \vee b \in F \Rightarrow a \in F \vee b \in F\,.$$

0.3. Proposition. *Sei I ein m-Ideal aus S. Dann liefert $a \equiv b(I) :\Leftrightarrow \exists e, f \in I$: $a \leqq be \;\&\; b \leqq af$ eine Linkskongruenz, und es ist diese Linkskongruenz sogar eine Kongruenz, wenn $s.I = I.s$ erfüllt ist.*

Sei hiernach F ein m-Filter aus S. Dann liefert $a \equiv b(F) :\Leftrightarrow x \in F \Leftrightarrow a \wedge x = b \wedge x$ eine Kongruenz auf S.

0.4. Proposition. *Ist S eine Teilbarkeitshalbgruppe, so bilden die Ideale bezüglich der abgeleiteten Komplexoperationen eine volldistributive Verbandshalbgruppe, und es gilt gleiches für die Filter aus S.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß das Komplexprodukt $A.B := \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$ ein Ideal bildet. Seien hierzu $p \in A$ und $q \in B$ positive Elemente aus A bzw. B.

Zunächst ist $A.B$ ein Anfang in $(S, \leqq)$. Denn sei $x \leqq ab$. Dann liegt x auch unterhalb von $(a \vee p)(b \vee q)$, so daß wir schon a und b als positiv annehmen dürfen. Das führt dann aber im Falle $(a \wedge x)x' = x$ zu der Abschätzung $x = xx' \wedge xb \wedge ax' \wedge ab = (x \wedge a)(x' \wedge b)$.

Es ist $A.B$ aber nicht nur ein Anfang, sondern sogar ein Ideal. Denn mit p und q ist auch pq positiv und sind a_1b_1, a_2b_2 aus $A.B$, so folgt $a_1b_1 \vee a_2b_2 \leqq (a_1 \vee a_2) . (b_1 \vee b_2) \in A.B$.

Weiter erhalten wir, daß das Komplexsupremum $A \vee B := \{a \vee b \mid a \in A, b \in B\}$ ein Ideal bildet – und zwar das von der Vereinigungsmenge $A \cup B$ erzeugte Ideal – und ganz analog, daß das Komplexinfimum $A \wedge B := \{a \wedge b \mid a \in A, b \in B\}$ ein Ideal bildet.

Schließlich erhalten wir unmittelbar

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

sowie

$$A.(B \vee C) = A.B \vee A.C$$

und mittelbar

$$A.(B \wedge C) = A.B \wedge A.C\,,$$

wegen

$$a_1b_1 \wedge a_2b_2 \leqq (a_1 \wedge a_2)(b_1 \wedge b_2) \in A.(B \wedge C)\,.$$

Somit gilt unsere Behauptung für Ideale, und man bestätigt leicht, daß sie analog für Filter hergeleitet werden kann. □

0.5. Korollar. *Ist S ein Teilbarkeitsmonoid, so bilden die Ideale aus S eine algebraische Teilbarkeitshalbgruppe, in der die Operationen $\cdot$, $\wedge$, $\vee$ distributiv bezüglich des Erzeugnisses operieren, und es gilt dasselbe für Filter aus S.*

Denn, das eine wurde soeben bewiesen, dass andere macht der Leser sich leicht klar. □

Wie wir sehen werden, sind u.a. Struktureigenschaften der Idealhalbgruppe für den Grad der Archimedizität verantwortlich. Das hat wesentlich damit zu tun, daß die irreduziblen Ideale eine ganz entscheidende Rolle bei der Erzeugung von Kongruenzen spielen. Genauer gilt nach [12]:

0.6. Lemma. *Ist P ein irreduzibles Ideal, so stiftet die Festsetzung*

$$a \equiv b(P) :\Leftrightarrow \forall x, y\colon xay \in P \Leftrightarrow xby \in P$$

eine Kongruenz, und is S kommutativ, so ist diese Kongruenz sogar linear.

Offenbar läßt sich dual eine Kongruenz für Filter erklären, wobei die Kongruenzen mod P und mod $(S - P)$ übereinstimmen.

Es gibt keinen Mangel an irreduziblen Idealen. Genauer gilt:

0.7. Lemma. *Ist F ein Filter aus S, so ist jedes Ideal* (m-Ideal) *irreduzible, das maximal ist in der Menge aller zu F disjunkten Ideale.*

Insbesondere exisiert demnach zu jedem $\{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein irreduzibles m-Ideal M mit $t^n \not\equiv t^{n+1}(M)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Denn Menge aller x mit $x \geqq y$ & $t^n y = t^{n+1}$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ bildet offenbar einen Filter.

0.8. Definition. Sei P ein Primideal. Dann verstehen wir unter dem *Kern von P*, i.Z. Ker(P), die Menge aller $k \in P$ mit $s.t \in P \Rightarrow s.k.t \in P$ und unter dem *Radikal von P*, i.Z. Rad(P), die Menge aller r aus P mit $r^n \notin P$ $(\exists n \in \mathbb{N})$.

0.9. Definition. Sei I ein beliebiges Ideal aus S. Dann nennen wir I *archimedisch*, wenn gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon t^n \in I \Rightarrow t.I\,,\quad I.t \subseteqq I\,.$$

Sei F ein Filter aus S. Dann nennen wir F *primär*, wenn er der Bedingung genügt:

$$ab \in F \;\&\; a, b \notin F \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\colon a^n, b^n \in F\,.$$

Wie man leicht sieht, ist ein irreduzibles Ideal genau dann *archimedisch*, wenn der korrespondierende irreduzible Filter primär ist.

Ist S eine beliebige Teilbarkeitshalbgruppe, so sei $S^{\bullet}$ die um ein maximales Zusatzelement erweiterte Teilbarkeitshalbgruppe. Dann gilt mit dieser Bezeichnung:

0.10. Proposition. *Ist S eine subdirekt irreduzible archimedische Teilbarkeitshalbgruppe, so ist S einbettbar in* $\mathbb{R}^{\bullet}$ *oder* $\mathbb{E}^0 := (\mathbb{R}'^0, t, \min)/\{x \mid x > 1\}$.

Beweis. Wir bezeichnen hier wie im folgenden als kritische Paar $a < b$ eines subdirekt irreduziblen Bildes $\bar{S}$ jedes Paar $a < b$, das bei jeder echten Kongruenz kollabiert. Sei hiernach $a < b$ kritisch. Dann unterscheiden wir den positiven und den nicht positiven Fall.

Gilt etwa $\bar{c} < \bar{1}$, so enthält $\bar{S}$ eine Gruppe, und es muß $\bar{a}$ in dieser Gruppe liegen, da wir $\bar{S}$ andernfalls nach ihr zerlegen könnten. Folglich handelt es sich bei $\bar{S}$ um eine archimedische Verbandsgruppe mit 0, weshalb Hölder [15] greift.

Ist S aber positiv, so muß isomorph zu $\bar{S}/\{\bar{x} \mid \bar{x} > \bar{a}\}$ sein, weshalb Clifford [13] greift. □

Zum Abschluß unserer Vorbemerkungen sollen noch zwei Begriffe erläutert werden, die in Rolle bei der Charakterisierung superarchimedischer Teilbarkeitshalbgruppen spielen werden, ansonsten aber ohne Belang für diese Arbeit sind.

0.11. Definition. Sei $t \in S^+$. Dann verstehen wir unter $C(t)$ die Menge aller a aus S, für die in der kanonischen 1-Erweiterung Σ gilt: $(1 \vee a)(1 \wedge a)^{-1} \leqq t^n$ $(\exists n \in \mathbb{N})$.

0.12. Definition. Wir sagen $C(t)$ $(t \in S^+)$ sei ein *subdirekter Faktor* von S, wenn es einen Homomorphismus Φ gibt mit $\Phi(S) = \Phi(C(t)) = C(t)$ und S zudem subdirekt zerfällt in $\Phi(S) \times S/C(t)$.

Endlich sei angemerkt, daß jede abelsche subdirekt irreduzible Teilbarkeitshalbgruppe eine 1 besitzt und 0-kürzbar ist.

1. HYPERARCHIMEDISCHE TEILBARKEITSHALBGRUPPEN

1.1. Definition. Eine Teilbarkeitshalbgruppe heiße *hyperarchimedisch*, wenn sie der Bedingung genügt:

$$\forall a, t \in S^+ \ \exists n \in \mathbb{N}: t.a.t \leqq a \vee t^n .$$

Offenbar ist jede hyperarchimedische Teilbarkeitshalbgruppe auch archimedisch. Somit ist die kanonische 1-Erweiterung einer hyperarchimedischen Teilbarkeitshalbgruppe zumindest archimedisch. Es gilt jedoch mehr.

1.4. Proposition. *Ist S eine hyperarchimedische Teilbarkeitshalbgruppe, so ist auch ihre kanonische 1-Erweiterung Σ hyperarchimedisch.*

Beweis. Seien α und β aus Σ^+ gegeben. Ist dann $\alpha \vee \beta$ aus S^+ und e Einheit zu $a \vee \beta$, so folgt nach Voraussetzung

$$\alpha.\beta = e\alpha.e\beta \leqq e\alpha \vee (e\beta)^n = e(\alpha \vee \beta^n) = \alpha \vee \beta^n \quad (\exists n \in \mathbb{N}) .$$

Ist aber β nicht aus S^+, so hat β die Form $(1 \wedge a)(1 \wedge b)^{-1}$ und ist daher fremd zu – etwa – $f := 1 \vee b \in S^+$. Somit gilt nach dem ersten Teil

$$\alpha.\beta \leqq f\alpha.\beta \leqq f\alpha \vee \beta^m \quad (\exists m \in \mathbb{N}) .$$

Sei nun $1 \leqq g \leqq f$ mit $g \in S^+$. Dann ist auch $g \perp \beta$, und es folgt analog

$$\alpha.\beta \leqq g\alpha.\beta \leqq g\alpha \vee \beta^n \quad (\exists n \in \mathbb{N}) .$$

Wir betrachten $k := \min(m, n)$. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &\leqq (f\alpha \wedge g\alpha) \vee (f\alpha \wedge \beta^n) \vee (g\alpha \wedge \beta^m) \vee \beta^k \\ &= g\alpha \vee (\alpha \wedge \beta^n) \vee (\alpha \wedge \beta^m) \vee \beta^k \quad (\text{beachte } f, g \perp \beta) \\ &= g\alpha \vee \beta^k . \end{aligned}$$

Das bedeutet aber im Falle $x = xe \in S^+$ und $g = e$

$$x.\alpha\beta \leqq x(\alpha \vee \beta^n) ,$$

also, da wir g variieren können

$$\alpha.\beta \leqq \alpha \vee \beta^n . \qquad \square$$

Nach dieser Vorbemerkung über hyperarchimedische Teilbarkeitshalbgruppen geben wir nun ein erstes Strukturtheorem.

1.2. Theorem. *Sei S eine Teilbarkeitshalbgruppe. Dann sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist hyperarchimedisch.*

(ii) $\forall a, t \in S\ \exists n \in \mathbb{N}$: $t.a.t \leqq a \vee t^n$.

(iii) *Jedes homomorphe Bild von S ist archimedisch.*

(iv) *Jedes irreduzible Ideal ist archimedisch.*

(v) *Jeder irreduzible Filter ist primär.*

(vi) *Sind A und T Ideale aus S, so gilt die Implikation $\forall n \in \mathbb{N}$: $T^n \subseteqq A \Rightarrow \Rightarrow T.A.T \subseteqq A$.*

(vii) *Jedes irreduzible Ideal ist gleich der Vereinigung seines Kerns mit seinem Radikal.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Denn ist (i) erfüllt, so ist S archimedisch, also auch kommutativ. Sei nun in $\Sigma a \geqq 1$ und $t = xy^{-1}$ mit $x \perp y$. Dann folgt

$$ax \leqq a \vee x \;{}^{n}\!\!\Rightarrow ax \vee ay \;{}^{n-1}\!\!\leqq ay \vee x$$
$$\Rightarrow axy^{n-1} = ax \vee ay^{n-1} \leqq ay^n \vee x^n$$
$$\Rightarrow axy^{-1} \leqq a \vee (xy^{-1})^n,$$

woraus sich die gewünschte Formel für beliebiges a vermöge $a = (1 \wedge a)(1 \vee a)$ und

$$(1 \vee a)\,xy^{-1} \leqq (1 \vee a) \vee (xy^{-1})^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 \wedge a)(1 \vee a)\,xy^{-1} \leqq (1 \wedge a)(1 \vee a) \vee xy^{-1}$$

ergibt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Gilt (ii) in S, so gilt (ii) auch in jedem homomorphen Bild. Folglich ist jedes homomorphe Bild von S erst recht archimedisch.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sei P ein irreduzibles Ideal mit $t^n \in P$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann $a \in P$, so folgt in S/P entweder $\bar{a} \leqq \bar{t}^m$ für mindestens ein $m \in \mathbb{N}$ oder es gilt $\bar{a}\bar{t} \leqq \bar{a}$. Das bedeutet aber, daß $a \in P$, $a.t \notin P$ nicht eintreten kann.

(iv) $\Rightarrow$ (v) ergibt sich per definitionem.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Denn (v) ist äquivalent zu (iv) und (iv) impliziert (vi) für irreduzible Ideale. Es ist aber jedes Ideal Durchsnitt von irreduziblen Idealen.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Denn ist P ein irreduzibles und nach (vi) archimedisches Ideal, so gilt: $\forall n \in \mathbb{N}$: $t^n \in P \Rightarrow 1.x \in P \Rightarrow t.x \in P$. Daher ist t in jedem Falle aus $\mathrm{Rad}(P) \cup \mathrm{Ker}(P)$.

(vii) $\Rightarrow$ (iii). Zunächst ist S archimedisch und daher kommutativ. Denn: wäre für alle $n \in \mathbb{N}$ etwa $t^n \leqq a$ aber o.B.d.A. $a < at$ $(t \in S^+)$, so gäbe es ein irreduzibles Ideal P mit $a, t^n \in P$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, aber $at \notin P$ trotz $t \in \mathrm{Ker}(P)$, also $ae_a \in P \Rightarrow at \leqq \leqq ate_a \in P$.

Sei nun $\bar{S}$ ein subdirekt irreduzibles Bild zu S, also auch ein 0-kürzbares Teilbarkeitsmonoid mit kritischem Paar $a < b$. Dann bilden wir das irreduzible Ideal

$P := \{x \mid \bar{x} \leqq \bar{a}\}$. Wegen (vii) erfüllen die t aus P mit $\bar{1} < \bar{t}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $t^n \notin P$, also $\bar{t}^n \geqq \bar{a}$. Das bedeutet dann weiter, daß insbesondere alle $\bar{c}^{-1} < \bar{1}$ die Beziehung $\bar{c}^n \geqq \bar{a}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Daher ist $\bar{S}$ entweder positiv und dann isomorph zu $\bar{S}/\{\bar{y} \mid \bar{y} > \bar{a}\}$ oder es ist $\bar{S} = \bar{C}$ oder aber es ist $\bar{S} = \bar{C}^{\bullet}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Denn gilt (iii) und ist $at \nleqq a \vee t^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, so gäbe es ein irreduzibles Ideal P mit $a, t^n \in P$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, aber $at \notin P$. Das liefert dann in $\bar{S} := S/P$

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \bar{t}^n < \bar{a} \;\&\; \bar{a} < \bar{a}\bar{t}\,,$$

da $\bar{a} \leqq \bar{t}^m$ zu $\bar{a}\bar{t} \leqq \bar{t}^m\bar{t}$ und damit zu $at \in P$ führen würde. Folglich muß S unter Voraussetzung von (iii) hyperarchimedisch sein. □

2. SUPERACHIMEDISCHE TEILBARKEITSHALBGRUPPEN

2.1. Definition. Eine Teilbarkeitshalbgruppe S heiße *superarchimedisch*, wenn sie der Bedingung genügt:

$$\forall a, t \in S^+ \;\exists n \in \mathbb{N}\colon a \wedge t^n = a \wedge t^{n+1}\,.$$

Gilt sogar schärfer $a^n = a^{n+1}$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ für alle a, so nennen wir S *lokalendlich*.

Als einen ersten Hinweis auf den Zusammenhang zwischen Hyperarchimedizität und Superarchimedizität geben wir

2.2. Lemma. *Ist eine Teilbarkeitshalbgruppe superarchimedisch, so ist sie auch hyperarchimedisch.*

Beweis. Sei t aus S^+ und $a \wedge t^n = a \wedge t^{n+1}$ sowie $(a \wedge t^n)\, a' = a$. Dann ist nach den Regeln der Arithmetik $a \vee t^n = t^n a'$ und damit dann auch $at \leqq t^{n+1}a' = a \vee t^{n+1}$. □

Hiernach können wir zeigen:

2.3. Proposition. *Sei S eine superarchimedische Teilbarkeitshalbgruppe. Dann ist auch ihre kanonische* 1*-Erweiterung Σ superarchimedisch.*

Beweis. Sind α und β beide aus S, so ist nichts zu zeigen. Gilt aber $\alpha \notin S$, jedoch $\beta =: t \in S^+$; so ist α von der Form $(1 \wedge a)(1 \wedge b)^{-1}$ mit $a = 1 \vee a \in S$ und $b \in S$, und es gilt $(1 \wedge a)(1 \wedge b)^{-1} \leqq (1 \wedge b)^{-1}$, also auch

$$(1 \wedge b)^{-1} \wedge t^n = (1 \wedge b)^{-1} \wedge t^{n+1} \Rightarrow \alpha \wedge t^n = \alpha \wedge t^{n+1}\,.$$

Somit genügt es, $(1 \wedge b)^{-1}$ zu betrachten. Sei hierzu $e \in E(t) \cap S^+$ und $1 \leqq f \leqq e$. Dann folgt für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$

$$e(1 \wedge b)^{-1} \wedge t^n = e(1 \wedge b)^{-1} \wedge t^{n+1} \quad (\text{da } e(1 \wedge b)^{-1} \in S^+)\,,$$

also auch

$$f \wedge e \wedge t^n \wedge t^n b = f \wedge e \wedge t^{n+1} \wedge t^{n+1} b$$

und daher im Falle $xf = x$ auch

$$x((1 \wedge b)^{-1} \wedge t^n) = x((1 \wedge b)^{-1} \wedge t^{n+1}) .$$

Somit gelangen wir durch Variation von x zu

$$(1 \wedge b)^{-1} \wedge t^n = (1 \wedge b)^{-1} \wedge t^{n+1} .$$

Sei nun $\alpha =: a \in S^+$, $\beta = (1 \wedge a)(1 \wedge b)^{-1} \in \Sigma^+ - S$. Dann können wir eine Einheit u zu a wählen, die fremd is zu β, etwa $(1 \vee b) \wedge e$ mit positiver Einheit e von a, und wir dürfen wegen der Superarchimedizität von S zusätzlich annehmen, daß u idempotent sei. Das liefert $a \wedge (u\beta)^n = a \wedge (u\beta)^{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\begin{aligned} & a \wedge (u\beta)^n = a \wedge (u\beta)^{n+1} \\ \Rightarrow\ & a \wedge (u \vee \beta^n) = a \wedge (u \vee \beta^{n+1}) \\ \Rightarrow\ & (a \wedge u) \vee (a \wedge \beta^n) = (a \wedge u) \vee (a \wedge \beta^{n+1}) . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Schneiden mit $(a \wedge \beta^{n+1})$ (auf beiden Seiten)

$$a \wedge \beta^n = a \wedge \beta^{n+1} .$$

Bleibt der Fall $\alpha \notin S$ und $\beta \notin S$. Dann bewegen wir uns aber in der Unterteilbarkeitshalbgruppe der kürzbaten Elemente und können schließen: Da S superarchimedisch ist, ist S und damit auch Σ hyperarchimedisch, so daß wir wie oben erhalten:

$$\begin{aligned} & \alpha . \beta^{n+1} \leqq \alpha . \beta^n \vee \beta^{n+2} \leqq (\alpha \wedge \beta^n)(\alpha \vee \beta^{n+1}) \leqq \alpha . \beta^{n+1} \\ \Rightarrow\ & \alpha \wedge \beta^n = \alpha \wedge \beta^{n+1} . \end{aligned}$$

Damit sind alle Fälle diskutiert. □

2.4. Theorem. *Sei S eine Teilbarkeitshalbgruppe. Dann sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist superarchimedisch.*

(ii) *S ist repräsentierbar und alle total geordneten Bilder sind stark archimedisch.*

(iii) *S läßt sich derart subdirekt in angeordnete Faktoren zerlegen, daß zu allen positiven Elementen f, g aus S ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(x)^n \geqq g(x)$ $(\forall x \in \in \operatorname{supp}(f))$.*

(iv) *S^+/F^+ ist für alle Filter $F^+ \subseteqq S^+$ lokalendlich $(\forall a\ \exists n\colon a^n = a^{n+1})$.*

(v) *Für alle $t \in S^+$ zerfällt S subdirekt in $C(t)$ und $S/C(t)$.*

Beweis. (i) ⇒ (ii) ist evident.

(ii) ⇒ (i). Sei S dargestellt als subdirektes Produkt mit stark archimedischen Faktoren. Dann können wir trennen nach positiven und nach Gruppenfaktoren, die ihrerseits jeweils ein positives homomorphes Bild S_p und ein homomorphes Gruppenbild S_g von S bestimmen, so daß es genügt zu zeigen, daß (ii) in jedem dieser Bilder gilt.

Wir betrachten zunächst ein Produkt S_p von lauter stark archimedischen (total geordneten) Faktoren. Wäre hier etwa $a \wedge t^n \neq a \wedge t^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, so könnten wir zunächst übergehen zu $S_p/[a)$. Dies wäre ein Bild $\bar{S}$ mit $\bar{t}^n \neq \bar{t}^{n+1}$ & $\bar{a} = \bar{0}$.

Somit dürfen wir ausgehen von einem S_1 mit $t^n \neq t^{n+1} < 0$, das Bild ist zu S. Dann existiert aber ein bezüglich $t^n \not\equiv t^{n+1}(A)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ maximales, $E(t)$ umfassendes m-Ideal M, das nach 0.7 zudem irreduzibel ist.

Wir bilden $\bar{S} := S/M$. Hier sind wegen $(t \wedge x)\,t' = t \;\&\; (t \wedge x)\,x' = x \Rightarrow$ $\Rightarrow (t \wedge x)(t' \wedge x') = t \wedge x \Rightarrow t' \in M \vee x' \in M$ alle $\bar{x}$ mit $\bar{t}$ vergleichbar, woraus induktiv folgt, daß alle $\bar{x}$ mit allen $\bar{t}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ vergleichbar sind.

Demzufolge ist $\bar{F} := \{\bar{y} \mid \bar{y} > \bar{t}^n \; (\forall n \in \mathbb{N})\}$ wegen $\bar{a} \in \bar{F}$ nicht leer und wegen der Vergleichbarkeit aller $\bar{t}^n$ mit allen $\bar{x}$ ein Filter.

Das führt dann mit $\bar{\bar{S}} := \bar{S}/\bar{F}$ zu dem Widerspruch eines total aber nicht stark archimedisch geordneten Bildes.

Wir betrachten nun den Gruppenfall und erwähnen vorab, daß in Verbandsgruppen die Bedingungen (1.2, ii) $=: (1)$ und (2.4, ii) $=: (2)$ äquivalent sind wegen

$$(1) \Rightarrow at^{n+1} \leqq at^n \vee t^{n+2} \leqq (a \wedge t^n)(a \vee t^{n+1}) \leqq at^{n+1} \Rightarrow a \wedge t^n = a \wedge t^{n+1}$$

und

$$\begin{aligned}(2) \Rightarrow at^{n+1} &= (a \wedge t^n)(a \vee t^{n+1}) = (a^2 \vee at^{n+1}) \wedge (at^n \vee t^{2n+1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow at \leqq a \vee t^{n+1}.\end{aligned}$$

Somit gäbe es in S_g^+ ein irreduzibles Ideal P und ein Paar a, t mit $at \not\leqq a \vee t^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ & $at \notin P$. Das führte aber in $S_g/P =: \bar{S}$ zu dem Widerspruch $\bar{1} < \bar{t}$ & $\bar{t}^n \leqq \bar{a}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ & $\bar{a} < \bar{a}\bar{t}$, da im Falle $\bar{t}^m \geqq \bar{a}$ auch $at \in P$ gelten müßte.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) ist fast evident.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) ist ebenfalls fast evident. Denn wäre S^+/F^+ nicht lokalendlich, so gäbe es ein a in F^+ und ein t in $S^+ - F^+$, derart daß $a \wedge t^n \neq a \wedge t^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ erfüllt wäre, und ist jedes S^+/F^+ lokalendlich, so ist insbesondere jedes $S^+/[a)$ lokalendlich, was die Bedingung (ii) impliziert.

Somit sind wir am Ziel, falls (i) $\Leftrightarrow$ (v) erfüllt ist. Wir zeigen zunächst

(v) $\Rightarrow$ (i). Offenbar sind je zwei Elemente aus $C(t)$ kongruent modulo $C(t)$. Daher induziert Φ: $S \to C(t)$ einen Isomorphismus von $C(t)$. Dann liegt aber $\Phi(a)$ unterhalb eines $\Phi(t)^n$, und es folgt

$$\begin{aligned}\Phi(a \wedge t^n) &= \Phi(a) \wedge (\Phi(t))^n \\ &= \Phi(a) \wedge (\Phi(t))^{n+1} = \Phi(a \wedge t^{n+1}).\end{aligned}$$

Daher muß auch $a \wedge t^n = a \wedge t^{n+1}$ erfüllt sein.

Bleibt zu zeigen

(i) $\Rightarrow$ (v). Der Beweis dieser Implikation nimmt den breitesten Raum ein: Wir betrachten zunächst ein superarchimedisches positives S. Hier können wir jedem $x \in S$ das eindeutig bestimmte Element $x \wedge t^n = x \wedge t^{n+1}$ zuordnen. Auf diese Weise erhalten wir einen Homomorphismus Φ.

Denn es gilt

$$
\begin{aligned}
x \wedge t^{n+1} = x \wedge t^n &= y \wedge t^n = y \wedge t^{n+1} \\
\Rightarrow sx \wedge t^n &= s(x \wedge t^n) \wedge t^n \\
&= s(y \wedge t^n) \wedge t^n \\
&= sy \wedge t^n .
\end{aligned}
$$

Das bedeutet aber $\Phi(sx) = \Phi(sy)$, und es ergibt sich weiter a fotiori

$$\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow \Phi(s \wedge x) = \Phi(s \wedge y) .$$

Wir betrachten nun

$$x\varrho y :\Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(y)$$

und

$$x\sigma y :\Leftrightarrow x \equiv y(C(t)) .$$

Gilt dann

$$x\varrho y \quad \text{und} \quad x\sigma y ,$$

so folgt für geeignete Elemente k, p

$$x \wedge t^k = y \wedge t^k = y \wedge t^{k+1} = x \wedge t^{k+1}$$

und

$$x \leqq yt^k \;\&\; y \leqq xt^k ,$$

also

$$x \leqq y \vee t^k \;\&\; y \leqq x \vee t^k ,$$

und damit für ein geeignetes l

$$x \wedge t^l = y \wedge t^l$$

und

$$x \vee t^l = y \vee t^l ,$$

woraus $x = y$ resultiert.

Daher liefern ϱ und σ eine subdirekte Zerlegung von $S = S^+$.

Aufgrund von 2.2 wissen wir weiter, daß mit S^+ auch Σ^+ superarchimedisch ist, und man erkennt fast unmittelbar, daß sich die subdirekte Zerlegung auf Σ^+ fortsetzt. Daher sind wir am Ziel, wenn wir zeigen können, daß die Quotientenhülle $Q(\Sigma^+)$ subdirekt zerfällt im Sinne des Satzes. Sei also $Q := Q(\Sigma^+)$ und $\equiv \in \{\varrho, \sigma\}$.

Wir setzen $a \equiv b$ in Q genau dann, wenn es in Σ^+ ein kürzbares c gibt mit $ac \equiv bc$. Dies liefert, wie man unschwer erkennt, eine Fortsetzung von $\equiv$ nach Q. Weiter sieht man leicht ein, daß sich auf diese Weise auch die subdirekte Zerlegung fortsetzt – man beachte, daß mit x und y auch $x \vee y$ kürzbar ist. Bleibt also zu zeigen, daß der Fortsetzung von ϱ die behauptete inhaltliche Bedeutung zukommt. Das ergibt sich aber wie folgt:

Ist $x = (1 \vee x)(1 \wedge x) \equiv (1 \vee y)(1 \wedge y) = y$, so haben wir $1 \vee x \equiv 1 \vee y$ und $(1 \wedge x)^{-1} \equiv (1 \wedge y)^{-1}$, so daß $x\varrho y$ nichts anderes bedeutet als daß x und y in $C(t)$ den gleichen „maximalen“ Faktor besitzen. □

3.1. Definition. Eine Teilbarkeitshalbgruppe S heiße *diskret archimedisch*, wenn jedes subdirekt irreduzible Bild S vom Typ $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}^{\bullet}$ oder S_n ist.

Es folgt

3.2. Proposition. *Sei S eine Teilbarkeitshalbgruppe. Dann sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist diskret archimedisch.*

(ii) *In S gilt für alle Primideale P und alle Ideale A die Implikation:*

$$A \subseteqq P \Rightarrow A \mid P .$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $A \subseteqq P$. Es ist S/P totalgeordnet archimedisch vom Typ S_n, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}^{\bullet}$. Ferner wird jedes $x \in P$ auf ein $\bar{x} \neq \bar{0}$ abgebildet – beachte $x.e \in P \,\&\, \& \, y \notin P \Rightarrow y.e \notin P$.

Somit handelt es sich bei $\bar{P}$ im Falle $P \neq S$ um ein Hauptideal $(\bar{p}] \neq \bar{0}$ und es folgt $\bar{A} = (\bar{a}]$ mit geeignetem $a \leqq p$.

Sei q nun irgendein Element aus P. Dann ist mit geeignetem s

$$(q \wedge a)\, s = q ,$$

und es gilt für alle $a' \in A$

$$\bar{a}'\bar{s} \in \bar{P} .$$

Es ist aber $P = \{x \mid \bar{x} \leqq \bar{p}\}$. Somit erhalten wir $a's \in P$ und damit $A \mid P$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Wir zeigen zunächst, daß S hyperarchimedisch ist. Sei hierzu $t^n \leqq a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, aber $at \neq a$. Dann findet sich unter den a, at trennenden Idealen ein maximales P, was mit $T := \{x \mid x \leqq t^n \; (\exists n \in \mathbb{N})\}$ vorab den Widerspruch liefert

$$at \notin P \;\&\; P = XT = XTT = PT \ni at .$$

Somit ist S zumindest archimedisch. Sei nun weiter $\bar{S}$ ein subdirekt irreduzibles homomorphes Bild. Dann ist $\bar{S}$ total geordnet, da S kommutativ ist, und wir erhalten:

$$\bar{t}^n \leqq \bar{a} \; (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bar{t}\bar{a} = \bar{a} .$$

Denn setzen wir

$$T := \{x \mid x \leqq t^n \; (\exists n \in \mathbb{N})\} \quad \text{(wie oben)}$$

und

$$P := \{x \mid \bar{x} \leqq \bar{a}\} ,$$

so folgt $T \subseteqq P$, also $P = TX$ und damit $TP = P$, was zu $\overline{TP} = \bar{P}$ und foglich zu $\bar{t}\bar{a} = \bar{a}$ führt. Somit ist S sogar hyperarchimedisch.

Hiernach schließen wir:

Ist $\bar{S}$ ein subdirekt irreduzibles Bild bezüglich $a < b$ und $\bar{c}^{-1} < \bar{1} \; (\bar{c} \in C(\bar{S}) =: \bar{C})$, so ist $\bar{C}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$. Denn $\bar{C}$ läßt sich einbetten in $\mathbb{R}$ und gäbe es kein kleinstes streng positives Element, so könnten wir

$$A := \{a \mid \bar{a} < \bar{c}\}$$
$$P := \{p \mid \bar{p} \leqq \bar{c}\}$$

bilden. Dies lieferte $A \subseteqq P$ und damit auch $A \mid P$ bzw. $\bar{A} \mid \bar{P}$, mit Widerspruch.

Dann muß aber S vom Typ $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}^{\bullet}$ sein. Denn, ist $\bar{a}$ aus $\bar{C}$, so ist dies klar. Ist aber $\bar{a} \notin \bar{C}$, so erhielten wir für alle Elemente $\bar{c}$ aus $\bar{C}$ die Gleichung $\bar{a}\bar{c} = \bar{a}$, also $\bar{C} \subseteqq E(\bar{a})$, weshalb $\bar{S}$ kein negatives Element besäße.

Ist $\bar{S}$ aber positiv, so können wir wie oben zeigen, daß $\bar{S} - \{\bar{1}\}$ ein kleinstes Element besitzt, weshalb in diesem Falle $\bar{S} \cong S_n$ für geeignetes n erfüllt sein muß. □

Es stellt sich die Frage, ob sogar allgemein

$$A \subseteqq B \Rightarrow A \mid B$$

gefordert werden kann. Daß dies nicht zutrifft, zeigt das Produkt $\prod S_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Bilden wir hier die Ideale

$$A := \left\{ f \;\middle|\; \begin{matrix} f(j) = 0, \; j < i \\ f(j) = i, \; j \geqq i \end{matrix} \right\}$$

und

$$B := \{f \mid f(i) \leqq i\}\,,$$

so folgt

$$A \subseteqq B\,, \quad \text{aber nicht} \quad A \mid B\,.$$

4. FAKTORIELLE TEILBARKEITSHALBGRUPPEN

Als eine besondere Klasse diskret archimedischer Teilbarkeitshalbgruppen wird sich die Klasse der faktoriellen Teilbarkeitshalbgruppen erweisen.

4.1. Definition. Eine Teilbarkeitshalbgruppe S heiße *faktoriell*, wenn jedes positive a aus S in Halbprimelemente $(p = ab \Rightarrow p = a \vee p = b)$ zerfällt.

Da es sich bei der Untersuchung faktorieller Teilbarkeitshalbgruppen i.w. um die Untersuchung ihres Kegels handelt, können wir uns im folgenden o.B.d.A. auf positive Teilbarkeitsmonoide beschränken. Sei deshalb in diesem Paragraphen S stets ein positives Teilbarkeitsmonoid.

4.2. Lemma. Ist p halbprim, so ist p auch vollprim, d.h. so erfüllt p die Implikation $p^n \leqq ab \Rightarrow p^n \leqq a \vee p \leqq b$.

Beweis. Offenbar ist p halbprim gdw. $a < p \;\&\; b < p \Rightarrow ab < p$. Sei nun zunächst $p \leqq ab$. Dann folgt $p \leqq pp \wedge pb \wedge ap \wedge ab = (p \wedge a)(p \wedge b)$, weshalb $p = p \wedge a$ oder $p = p \wedge b$ sein muß, also $p \leqq a \vee p \leqq b$ erfüllt ist. Daher ist p prim.

Sei hiernach p prim und $p^n \leqq ab$. Dann folgt $p^n = p^n p \wedge p^n b \wedge ap \wedge ab = (p^n \wedge a)(p \wedge b)$, und dies fürht im Falle $p \wedge b < p$ zu $p \leqq a$ und damit zu $p^n \wedge a = p^n$. □

Als eine fast unmittelbare Folgerung aus der Primeigenschaft erhalten wir Vertauschbarkeit für je zwei Halbprimelemente p, q. Denn aus $p \nleqq q \nleqq p$ folgt $pq = qx = qpy$, also $pq \leqq qp \leqq pq$. Das bedeutet u.a., daß ein faktorielles Teilbarkeitsmonoid zwangsläufig kommutativ ist. Darüber hinaus erhalten wir

4.3. Proposition. *Ist S faktoriell und $\prod p_i^{e_i} = a = \prod q_j^{e_j}$ mit paarweise unvergleichbaren Basiselementen und unverkürzbaren Vollprimfaktorpotenzen, so stimmen die beiden Darstellungen bis auf die Reihenfolge der Potenzen überein.*
Denn, man beachte die Vollprimeigenschaft. □

Schließlich sei wiederholt [7]:

4.4. Definition. Ein Monoid heißt ein *Holoid*, wenn gilt: $a \mid_r b \Leftrightarrow a \mid_l b$ und $a \mid b \mid a \Rightarrow a = b$.

Ein Holoid heißt *komplementär*, wenn jedem Paar a, b die Komplemente $a * b$ und $b : a$ mit $ax \geqq b \Leftrightarrow x \geqq a * b$ und $ya \geqq b \Leftrightarrow y \geqq b : a$ existieren, und damit dann auch zu jedem Paar a, b das Supremum $a \vee b$.

Hiernach können wir als 4. Struktursatz beweisen:

4.5. Theorem. *Sei S ein positives Teilbarkeitsmonoid. Dann sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist faktoriell.*
(ii) *Die Idealhalbgruppe von S ist $\bigcap$-distributiv.*
(iii) *Die Idealhalbgruppe von S ist komplementär.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Zunächst ist S komplementär. Denn offenbar gilt $ax \geqq b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a \wedge b)\, x \geqq b$. Deshalb genügt es zu zeigen, daß alle $a * b$ mit $a \leqq b$ existieren. Dies gilt aber, da die unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegungen der einzelnen a aus S eindeutig sind und deshalb die unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegungen der Komplemente in b Teilprodukte der Darstellung von b sind.

Insbesondere haben die bisherigen Überlegungen mitergeben, daß es jeweils nur endlich viele Komplemente in x gibt.

Sei nun $x \in \bigcap AB_i$ $(i \in I)$. Dann findet sich zu jedem $i \in I$ ein $a_i \in A$, $b_i \in B_i$ mit $a_i b_i = x$, und wir dürfen zusätzlich $b_i = a_i * x$ annehmen. Wir bilden nun $x_m :=$ $:= \bigvee (a_i * x) \in B$.

Dann ist $x_m a_i \geqq x$ also $x = x_m(x_m * x)$ mit $x_m \in B$, $x_m * x \in A$, woraus die Bedingung (ii) resultiert.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Auch hier zeigen wir zunächst, daß S komplementär ist, wenn die Bedingung des Satzes gilt. Sei dazu $\{x_i \mid i \in I\}$ die Menge aller x mit $ax \geqq b$. Dann gilt $(a) \bigcap (x_i) = \bigcap (ax_i) = (b)$, weshalb ein $y \in \bigcap (x_i)$ existiert mit $ay = b$ und $y \leqq x_i$ $(i \in I)$, d.h. ein y mit $y = a * b$. Und wir erhalten dual die Existenz eines $z = b : a$.

Hiernach beweisen wir

$$A \subseteqq B \Rightarrow B = A.X = Y.A \quad (\exists X, Y)$$

für den Bereich der Ideale aus S.

Dazu starten wir mit $A \subseteqq (b)$. Dann folgt für jedes $a_i \in A$ mit geeignetem c_i die Gleichung $(a_i)(c_i) = (b)$ und somit $A \bigcap (c_i) = (b)$, also aus Gründen der Dualität

$$A \subseteqq (b) \Rightarrow (b) = A.X = Y.A \quad (\exists X, Y).$$

Ist B nun beliebig und gilt $A \subseteqq B$, so haben wir für jedes $b \in B$ ein X_b mit $(A \cap (b)) X_b = (b)$. Das impliziert weiter $AX_b \subseteqq B$ wegen $ax = (a : b)((a : b) * * a) x \leqq (a : b) b \in B$, so daß sich $A . \bigcap X_b \, (b \in B) = \bigcap (A . X_b) = B$ ergibt. Das liefert aus Gründen der Dualität die aufgestellte Behauptung.

Somit ist S nach [11] zusätzlich kommutativ, und es gilt wegen der Distributivität

$$A . \bigcap X_i (A . X_i \supseteqq A . B) = A . B ,$$

also (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Im Blick auf 4.9 zeigen wir auch hier zunächst, daß mit der Idealhalbgruppe von S auch S selbst komplementär ist, was sich wie folgt ergibt:

Ist $(a) * (b) = K$, so muß K ein Hauptideal sein wegen $b \leqq ak$ mit $k \in K$ und $(k) \subseteqq K$. Somit ist S abgeschlossen bezüglich $*$ und natürlich auch bezüglich.

Sei nun $K = A * \bigcap AB_i \; (i \in I)$. Dann ist $K \subseteqq B_i \; (i \in I)$, also auch $K \subseteqq \bigcap B_i$ und damit $A . K = \bigcap AB_i \subseteqq A . \bigcap B_i \; (i \in I)$, woraus sich aus Gründen der Dualität die Bedingung (b) ergibt.

Schließlich beweisen wir

(ii) $\Rightarrow$ (i). Wie wir schon zeigten, ist S unter den Bedingungen von (ii) komplementär und kommutativ, und es gilt darüber hinaus $A \subseteqq B \Rightarrow A \mid B$.

Sei nun $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ eine aufsteigende Kette von Teilern von a mit $a_i = b_i * a$, also auch $a_i = (a_i * a) * a$. Dann haben wir $a = a_i \, (a_i * a)$, und damit auch $(a) = (a_1, a_2, \ldots) \bigcap (a_i * a) \; (i \in I)$. Es ist aber $(a_i * a) * a = a_i$, weshalb es ein letztes a_n geben muß, da sonst der Widerspruch $(a_1, a_2, \ldots) \bigcap (a_i * a) (i \in I) \neq (a)$ einträte. Daher gilt die aufsteigende Teilerkettenbedingung unter den Elementen der Form $b_i * a$.

Hieraus folgt dann auch die absteigende Teilerkettenbedingung bezüglich $\succ$ mit $a \succ b := \exists c : b = c * a$. Denn wegen $d * (c * a) = dc * a$ ist $\succ$ transitiv, und der Leser macht sich leicht klar, daß jeder streng absteigenden Kette $a \succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ eine streng aufsteigende Kette von Komplementen in a entspricht. Somit ist S komplementär mit absteigender Teilerkettenbedingung bezüglich $\succ$, also faktoriell nach [7]. □

Wir variieren nun die Voraussetzungen unseres Satzes. Dies führt zu den weiteren Resultaten:

4.6. Korollar. *Ist G eine Verbandsgruppe, so sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *G ist faktoriell.*

(ii) *Jedes beschränkte Ideal von G^+ ist Hauptideal.*

(iii) *Jeder Filter von G^+ ist Hauptfilter.*

(iv) *Sind A und B Ideale von G^+, so gilt:*

$$A \subseteqq B \Rightarrow B = A.X = Y.A \quad (\exists X, Y).$$

(v) *Sind A und B Filter von G^+, so gilt:*

$$A \supseteq B \Rightarrow B = A.X = Y.A \quad (\exists X, Y).$$ [1])

Beweis. Ist G faktoriell, so erfüllen die Teilmengen eines jeden positiven a sowohl die aufsteigende als auch die absteigende Kettenbedingung, so daß wir fast unmittelbar (i) ⇒ (ii) & (iii) & (iv) & (v) erhalten.

Weiter haben wir (ii) ⇔ (iii), da sich die aufsteigende und die absteigende Kettenbedingung für Hauptideale gegenseitig bedingen.

Bleibt also zu zeigen, daß aus (iv) die Bedingung (ii) resultiert und aus (v) die Bedingung (iii), was exemplarisch mittels (iv) ⇒ (ii) gezeigt sei:

Ist $A \subseteq (b)$, so existiert ein X mit $A.X = (b)$, also auch ein Paar a, x mit $ax = b$ und $a \in A$, $x \in X$. Das bedeutet aber weiter $sax = b$ für alle $sa \in A$, so daß wegen der Kürzbarkeit $s = 1$ und damit $A = (a)$ resultiert, q.e.d. □

4.7. Korollar. *Ist V ein distributiver Verband, so sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *V ist faktoriell.*

(ii) *Der Idealverband von V ist $\bigcap$-distributiv.*

(iii) *Der Idealverband von V ist komplementär.*

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Übertragung von 4.5 auf Holoide. Hierzu geben wir zunächst eine Verallgemeinerung des Verbandsideals.

4.8. Definition. Sei H ein Holoid. Dann bezeichnen wir mit $V(a_1, \ldots, a_n)$ die Menge aller gemeinsamen Vielfachen von $a_1, \ldots, a_n$ und wir bezeichnen als *h-Ideal* (Holoid-Ideal) jedes nicht leere $A \subseteq H$ mit

$$x \leqq V(a_1, \ldots, a_n)\,(a_1, \ldots, a_n \in A) \Rightarrow x \in A\,.$$

Offenbar ist $\{1\}$ ein h-Ideal und auch H. Insbesondere ist demnach mit jeder Familie von h-Idealen auch deren Durchschnitt ein h-Ideal.

Ist H eine Teilbarkteishalbgruppe oder eine komplementäre Halbgruppe, so stimmen die h-Ideale mit den Halbverbandsidealen überein, so daß der h-Idealbereich abgeschlossen ist bezüglich der Komplexmultiplikation. Dies muß so nicht gelten in Holoiden. Daher sind wir gezwungen mit einer äußeren Operation zu arbeiten, wobei wir uns für die Festsetzung $A.B := \{x \mid x \leqq ab,\ a \in A,\ b \in B\}$ entscheiden. Dies liefert eine Möglichkeit der Übertragung von 4.1 auf Holoide.

4.9. Theorem. *Sei S ein Holoid. Dann sind die Aussagen äquivalent:*

(i) *Jedes $a \in H$ besitzt eine Vollprimfaktordarstellung, kurz: H ist faktoriell.*

(ii) *Sind A, B_i $(i \in I)$ h-Ideale aus H, so gilt das Distributivgesetz $A \bigcap B_i = \bigcap (AB_i)$ $(i \in I)$.*

(iii) *Sind A, B zwei h-Ideale, so gibt es engste h-Ideale X, Y mit $A.X \supseteq B$ and $Y.A \supseteq B$.*

Beweis. Aufgrund der Definition von $A.B$ läßt sich der Beweis zu 4.5 übernehmen. □

[1]) Daß die Bedingungen (iv) bzw. (v) i.e. nicht genügen, zeigt der distributive Verband (mit 0).

Literaturverzeichnis

[1] *Amemiya, I.:* A general spectral theory in semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokka. Uni. *12* (1953), 111—156.

[2] *Baker, K. A.:* Topological methods in the algebraic theory of vector lattices. Thesis, Harvard University 1966.

[3] *Bigard, A.:* Groupes archimédiens aet hyper-archimédiens. Seminaire Dubreil-Pisot (1967—1968), No. 2.

[4] *Bigard, A.:* Contribution à la théorie des groupes réticulés. These sc. math., Paris 1969.

[5] *Bigard, A., Conrad, P. F., Wolfenstein, S.:* Compactly generated lattice-ordered groups. Math. Z. (1968), 201—211.

[6] *Bigard, A., Keimel, K., Wolfenstein, S.:* Groupes et Anneaux Réticulés. Springer. Berlin—Heidelberg—New York 1977.

[7] *Bosbach, B.:* Komplementäre Halbgruppen, Axiomatik und Arithmetik. Fund. Math. *LXIV* (1969), 257—287.

[8] *Bosbach, B.:* Schwache Teilbarkeitshalbgruppen. Semig. For. *12* (1976), 119—135.

[9] *Bosbach, B.:* Zur Theorie der stetigen Teilbarkeitshalbgruppen. Semig. For. *20* (1980), 299—317.

[10] *Bosbach, B.:* Archimedische Teilbarkeitshalbgruppen und Quaderalgebren. Semig. For. *20* (1980), 319—334.

[11] *Bosbach, B.:* Zur Theorie der vollständigen Teilbarkeitshalbgruppen. Semig. For. *25* (1982), 111—124.

[12] *Bosbach, B.:* Lattice ordered binary systems. Act. Sc. Math. (to appear).

[13] *Clifford, A. H.:* Naturally totally ordered commutative semigroups. Amer. J. Math. *76* (1954), 631—646.

[14] *Conrad, P. F.:* Epi-archimedean groups. Czech. Math. J. *24* (1974), 1—27.

[15] *Hölder, O.:* Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Cl. *53* (1901), 1—64.

[16] *Luxemburg, W., Moore, L.:* Archimedean quotient Riesz spaces. Duke Math. J. *34* (1967), 725—739.

[17] *Pedersen, F.:* Contribution to the theory of regular subgroups and prime subgroups of lattice-ordered groups. Dissertation, Tulane University 1967.

[18] *Wolfenstein, S.:* Representations d'une classe de groupes archimédiens, J. Alg. *42* (1976), 199—207.

[19] *Zannen, A.:* MR 651. Math. Reviews *36* (1968), 142—143.

Anschrift des Verfassers: GhK - Universität des Landes Hessen, 3500 Kassel, B.R.D.