Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jůza

Mesures spéciales dans l'espace E_2

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 31 (1981), No. 1, 1–23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101719

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences
V. *31* (*106*), PRAHA 26. 3. 1981, No 1

MESURES SPÉCIALES DANS L'ESPACE E_2

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 22 Mai 1978)

1. Ayons un espace euclidien E_2 avec un système cartésien de coordonnées. Si a_1, a_2 sont des nombres réels et $\delta > 0$, alors l'ensemble

$$K = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_i \leqq x_i \leqq a_i + \delta\} \tag{1.1}$$

est appelé *carré fondamental*; le nombre δ est appelé *norme* du carré K et désigné $|K|$. Si $\mathfrak{M}$ est un système de carrés fondamentaux, alors le nombre

$$|\mathfrak{M}| = \sup_{k \in \mathfrak{M}} |K|$$

est appelé *norme du système* $\mathfrak{M}$. L'ensemble de tous les systèmes dénombrables[1]) de carrés fondamentaux sera désigné $\mathbf{K}$.

Ayant des nombres entiers c_1, c_2, k, nous appellerons l'ensemble

$$K = \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_j}{2^k} \leqq x_j \leqq \frac{c_{j+1}}{2^k}, \ j = 1, 2\right\} \tag{1.2}$$

carré dyadic. L'ensemble de tous les systèmes de carrés dyadics sera désigné par $\mathbf{D}$. Évidemment on a $\mathbf{D} \subset \mathbf{K}$.

Étant $M \subset E_2$ et $\varepsilon > 0$, désignons par $\mathbf{K}(M, \varepsilon)$ l'ensemble de tous les systèmes $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}$, par $\mathbf{D}(M, \varepsilon)$ l'ensemble de tous les systèmes $\mathfrak{M} \in \mathbf{D}$ tels que

$$|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon, \quad M \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K.$$

Si $M \subset E_2$, nous posons pour $\varepsilon > 0$:

$$h_\varepsilon(M) = \inf_{\mathfrak{M} \in \mathbf{K}(M,\varepsilon)} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|, \quad H_\varepsilon(M) = \inf_{\mathfrak{M} \in \mathbf{D}(M,\varepsilon)} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|. \tag{1.3}$$

---

[1]) Des ensembles finis sont aussi considérés dénombrables.

Pour $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 > 0$ et pour chaque ensemble $M \subset E_2$, on a évidemment

$$h_{\varepsilon_1}(M) \leqq h_{\varepsilon_2}(M), \quad H_{\varepsilon_1}(M) \leqq H_{\varepsilon_2}(M),$$

alors il existe les nombres (éventuellement égaux à $+\infty$)

$$h(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} h_\varepsilon(M), \quad H(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(M). \tag{1.4}$$

Dans le travail [1] on a prouvé que

$$h(M) \leqq H(M) \leqq 9\, h(M)$$

pour chaque ensemble $M \subset E_2$ et qu'il existe des ensembles $M \subset E_2$ tels que $h(M) \neq H(M)$. M.J. Král a posé la question de savoir quel est le plus petit nombre ζ tel que

$$H(M) \leqq \zeta \,.\, h(M).$$

La réponse est donnée par les deux théorèmes suivants:

Théorème A. *Pour chaque ensemble $M \subset E_2$ on a*

$$h(M) \leqq H(M) \leqq 4\, h(M).$$

Théorème B. *Il existe un ensemble $Q \subset E_2$ tel que*

$$H(Q) = 4\, h(Q).$$

2. Nous allons tout d'abord prouver le théorème A. Il est évident que $h(M) \leqq H(M)$ pour chaque $M \subset E_2$, parce que $\mathbf{D}(M, \varepsilon) \subset \mathbf{K}(M, \varepsilon)$ pour chaque $\varepsilon > 0$, alors $h_\varepsilon(M) \leqq H_\varepsilon(M)$ d'après (1.3), et $h(M) \leqq H(M)$ d'après (1.4). Nous avons donc à prouver seulement $H(M) \leqq 4\, h(M)$.

Définition 2.1. Etant c_1, c_2, n des nombres entiers, δ_1, δ_2 des nombres réels satisfaisant aux inégalités

$$0 < \min(\delta_1, \delta_2) < 2^{-n}, \tag{2.1}$$

alors l'ensemble

$$\left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^n} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^n} + \delta_1,\ \frac{c_2}{2^n} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^n} + \delta_2\right\}, \tag{2.2}$$

resp.

$$\left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^n} - \delta_1 \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^n},\ \frac{c_2}{2^n} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^n} + \delta_2\right\},$$

resp.

$$\left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^n} - \delta_1 \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^n},\ \frac{c_2}{2^n} - \delta_2 \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^n}\right\},$$

resp.

$$\left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^n} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^n} + \delta_1 \,, \ \frac{c_2}{2^n} - \delta_2 \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^n}\right\}$$

sera appelé rectangle canonique d'ordre n du type (A) ou (B) ou (C) ou (D) respectivement avec les côtés de grandeur δ_1, δ_2.

Théorème 2.1. *Etant n un nombre entier, η un nombre réel positif, K un rectangle canonique d'ordre n avec les côtés de grandeur δ_1, δ_2, il existe un système $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-n})$ tel que*

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_K} |L| < \delta_1 + \delta_2 + \eta \,. \tag{2.3}$$

Démonstration. Evidemment, il suffit de prouver le théorème pour les rectangles du type (A) donnés par (2.2).

I. Soit tout d'abord $\min(\delta_1, \delta_2) < \frac{1}{2}\eta$, $\delta_1 \leqq \delta_2$. Soit m le nombre entier tel que

$$2^{-(m+1)} < \min(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \leqq 2^{-m} \,, \tag{2.4}$$

de sorte que

$$2^{-m} < \eta \,; \tag{2.5}$$

compte tenu de (2.1) on a $2^{-m} \leqq 2^{-n}$, donc $m \geqq n$. Soit j le nombre entier tel que

$$(j - 1) \,.\, 2^{-m} < \delta_2 \leqq j \,.\, 2^{-m} \tag{2.6}$$

et posons $\mathfrak{M}_K = \{L_1, L_2, \ldots, L_j\}$ où

$$L_i = \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^n} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^n} + \frac{1}{2^m} \,, \ \frac{c_2}{2^n} + \frac{i-1}{2^m} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^n} + \frac{i}{2^m}\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, j \,. \tag{2.7}$$

D'après (2.2), (2.4) et (2.6) nous obtenons

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{j} L_i \,,$$

alors (puisque $m \geqq n$) on a $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-n})$. De plus, en vertu de (2.6) et (2.5) on a

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_K} |L| = j \,.\, 2^{-m} = \frac{j-1}{2^m} + \frac{1}{2^m} < \delta_2 + \eta < \delta_1 + \delta_2 + \eta \,,$$

et (2.3) a lieu.

II. Soit $\min(\delta_1, \delta_2) < \frac{1}{2}\eta$, $\delta_2 < \delta_1$, nous allons trouver les nombres entiers m, j tels que

$$2^{-(m+1)} < \min(\delta_1, \delta_2) = \delta_2 \leqq 2^{-m} \,, \tag{2.8}$$

$$(j - 1) \,.\, 2^{-m} < \delta_1 \leqq j \,.\, 2^{-m} \tag{2.9}$$

et poser $\mathfrak{M}_K = \{L_1, L_2, \ldots, L_j\}$ où

$$(2.10) \qquad L_i = \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^n} + \frac{i-1}{2^m} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^n} + \frac{i}{2^m}, \right.$$

$$\left. \frac{c_2}{2^n} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^n} + \frac{1}{2^m}\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, j.$$

Similairements au cas I., nous pouvons prouver que $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-n})$ et que (2.3) est vrai.

III. Soint n_0 le plus petit nombre entier tel que $2^{-n_0} < \frac{1}{2}\eta$. Si le rectangle K est d'ordre $n \geqq n_0$, alors d'après (2.1) on a

$$\min(\delta_1, \delta_2) < 2^{-n} \leqq 2^{-n_0} < \tfrac{1}{2}\eta,$$

et le théorème 2.1 est satisfait pour K en vertu de I. et II. Il reste donc à prouver le théorème 2.1 pour les rectangles canoniques du type (A) d'ordre $n = n_0 - i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$. Nous allons faire la démonstration par l'induction complète d'après i.

Supposons donc que le théorème 2.1 a lieu (pour η fixe) pour tous les rectangles canoniques du type (A) d'ordre $n_0 - i$ pour $i = 0, 1, \ldots, i_0 - 1$ avec $i_0 \geqq 1$; nous allons tirer de cette supposition la validité (pour le même η) aussi pour tous les rectangles canoniques du type (A) d'ordre $n_0 - i_0$.

Ayons donc un rectangle canonique

$$(2.11) \quad K = \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^{n_0 - i_0}} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^{n_0 - i_0}} + \delta_1, \ \frac{c_2}{2^{n_0 - i_0}} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^{n_0 - i_0}} + \delta_2\right)$$

d'ordre $n_0 - i_0$. Nous distinguerons deux cas:

Cas (a). Soit $\delta_1 \leqq \delta_2$. Alors selon (2.1) on a

$$(2.12) \qquad \delta_1 = \min(\delta_1, \delta_2) < 2^{-(n_0 - i_0)}.$$

Soit m le nombre entier tel que (2.4) a lieu; en vertu de (2.12) on a $m \geqq n_0 - i_0$. Soit j le nombre entier satisfaisant à (2.6). Nous distinguons de nouveau deux cas:

Cas (a_1). Soit

$$(2.13) \qquad \delta_1 \geqq j \cdot 2^{-m} - \delta_2.$$

Dans ce cas, nous posons $\mathfrak{M}_K = \{L_1, L_2, \ldots, L_j\}$ où les carrés L_ι sont donnés par (2.7). D'après (2.11), (2.4) et (2.6) nous obtenons

$$K \subset \bigcup_{L=1}^{j} L_\iota$$

de sorte que $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-(n_0 - i_0)})$, car $m \geqq n_0 - i_0$. Puis d'après (2.13) nous avons

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_K} |L| = j \cdot 2^{-m} = \delta_2 + (j \cdot 2^{-m} - \delta_2) \leqq \delta_2 + \delta_1 < \delta_1 + \delta_2 + \eta,$$

donc (2.3) a lieu.

Cas (a_2). Soit

$$\delta_1 < j \,.\, 2^{-m} - \delta_2 \; ; \tag{2.14}$$

on vertu de (2.6) on obtient

$$0 < \delta_2 - (j-1) \,.\, 2^{-m} < 2^{-m} - \delta_1 \,,$$

et d'après (2.4) on a

$$0 < \delta_2 - (j-1) \,.\, 2^{-m} < 2^{-(m+1)} < \delta_1 \,. \tag{2.15}$$

Posons maintenant $\mathfrak{M}'_K = \{L_1, L_2, \ldots, L_{j-1}\}$, où les carrés L_ι sont donnés par (2.7). Le système $\mathfrak{M}'_K$ couvre le rectangle K entier à l'exception de l'ensemble

$$K_1 = \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^{n_0 - i_0}} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^{n_0 - i_0}} + \delta_1 \,,\right.$$

$$\left.\frac{c_2}{2^{n_0 - i_0}} + \frac{j-1}{2^m} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^{n_0 - i_0}} + \delta_2\right\} =$$

$$= \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1 \,.\, 2^{m-(n_0 - i_0)+1}}{2^{m+1}} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1 \,.\, 2^{m-(n_0 - i_0)+1}}{2^{m+1}} + \delta_1 \,,\right.$$

$$\frac{c_2 \,.\, 2^{m-(n_0 - i_0)+1} + (j-1) \,.\, 2}{2^{m+1}} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2 \,.\, 2^{m-(n_0 - i_0)+1} + (j-1) \,.\, 2}{2^{m+1}} +$$

$$\left.+ \left(\delta_2 - \frac{j-1}{2^m}\right)\right\}.$$

En vertu de (2.15), K_1 est un rectangle canonique du type (A) d'ordre $m + 1$. Etant $m + 1 > n_0 - i_0$, il existe, d'après la supposition d'induction, un système $\mathfrak{M}_{K_1} \in$ $\in \mathbf{D}(K_1, 2^{-(m+1)}) \subset \mathbf{D}(K_1, 2^{-(n_0 - i_0)})$ tel que

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}_{K_1}} |L| < \delta_1 + \left(\delta_2 - \frac{j-1}{2^m}\right) + \eta \,. \tag{2.16}$$

Si nous posons $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}'_K \cup \mathfrak{M}_{K_1}$, alors $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-(n_0 - i_0)})$ et d'après (2.7) et (2.16) nous obtenons

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_K} |L| = \sum_{L \in \mathfrak{M}'_K} |L| + \sum_{L \in \mathfrak{M}_{K_1}} |L| < \frac{j-1}{2^m} + \delta_1 + \left(\delta_2 - \frac{j-1}{2^m}\right) + \eta = \delta_1 + \delta_2 + \eta \,;$$

donc de noveau (2.3) a lieu.

Cas (b). Soit $\delta_1 > \delta_2$. Alors selon (2.1) on a

$$\delta_2 = \min(\delta_1, \delta_2) < 2^{-(n_0 - i_0)} \,.$$

Soit m le nombre entier tel que (2.8) a lieu, j le nombre entier satisfaisant (2.9) et définissons des carrés L_ι par (2.10). Si

$$\delta_2 \geqq j \,.\, 2^{-m} - \delta_1 \,,$$

nous posons $\mathfrak{M}_K = \{L_1, L_2, \ldots, L_j\}$; si

$$\delta_2 < j \,.\, 2^{-m} - \delta_1 \,,$$

nous posons $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}'_K \cup \mathfrak{M}_{K_1}$, où $\mathfrak{M}'_K = \{L_1, L_2, \ldots, L_{j-1}\}$ et $\mathfrak{M}_{K_1} \in \mathbf{D}(K_1, 2^{-(n_0 - i_0)})$, où

$$K_1 = \left\{[x_1, x_2] \in E_2 : \frac{c_1}{2^{n_0 - i_0}} + \frac{j-1}{2^m} \leqq x_1 \leqq \frac{c_1}{2^{n_0 - i_0}} + \delta_1 \,, \right.$$

$$\left. \frac{c_2}{2^{n_0 - i_0}} \leqq x_2 \leqq \frac{c_2}{2^{n_0 - i_0}} + \delta_2 \right\}$$

et

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_{K_1}} |L| < \delta_2 + \left(\delta_1 - \frac{j-1}{2^m}\right) + \eta \,.$$

Tout comme dans le cas (a), nous prouverons que $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-(n_0 - i_0)})$ et que (2.3) a lieu.

Le théorème 2.1 est donc prouvé par l'induction complète pour tous les rectangles canoniques du type ($\mathbf{A}$). Pour les rectangles canoniques des autres types, la démonstration est analogue.

Théorème 2.2. *Soit η un nombre réel positif, k un nombre entier, K un carré fondamental tel que*

(2.17) $$|K| \leqq 2^{-k} \,.$$

Alors il existe un système $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-k})$ tel que

(2.18) $$\sum_{L \in \mathfrak{M}_K} |L| < 4 \,.\, |K| + \eta \,.$$

Démonstration. Le carré K soit donné par (1.1). Soit l le nombre entier tel que

(2.19) $$2^{-(l+1)} < \delta = |K| \leqq 2^{-l} \,.$$

En vertu de (2.17) on a $l \geqq k$. Soient c_1, c_2 les nombres entiers tels que

(2.20) $$(c_i - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq a_i < c_i \,.\, 2^{-l} \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

I. Soit $a_1 + \delta \leqq c_1 \,.\, 2^{-l}$. Posons $\mathfrak{M}_K = \{L_1, L_2\}$, où

$$L_1 = \{[x_1, x_2] \in E_2 : (c_1 - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^{-l} \,,$$
$$(c_2 - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^{-l}\} \,,$$

$$L_2 = \{[x_1, x_2] \in E_2 : (c_1 - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^{-l} \,,$$
$$c_2 \,.\, 2^{-l} \leqq x_2 \leqq (c_2 + 1) \,.\, 2^{-l}\} \,.$$

Evidemment, on a $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-l}) \subset \mathbf{D}(K, 2^{-k})$, $|L_1| = |L_2| = 2^{-l}$ et d'après (2.19) on a $2^{-l} < 2 \,.\, |K|$; de cela il découle

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_K} |L| = 2 \,.\, 2^{-l} < 4 \,.\, |K| < 4 \,.\, |K| + \eta \,,$$

donc (2.18) a lieu.

II. Soit $a_2 + \delta \leqq c_2 \,.\, 2^{-l}$. Posons $\mathfrak{M}_K = \{L_1, L_2\}$, où

$$L_1 = \{[x_1, x_2] \in E_2 : (c_1 - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^{-l} \,,$$
$$(c_2 - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^{-l}\} \,,$$
$$L_2 = \{[x_1, x_2] \in E_2 : (c_1 \,.\, 2^{-l} \leqq x_1 \leqq (c_1 + 1) \,.\, 2^{-l} \,,$$
$$(c_2 - 1) \,.\, 2^{-l} \leqq x_2 \leqq c_2 \;\; 2^{-l}\} \,.$$

III. Soit

(2.21) $$c_1 \,.\, 2^{-l} < a_1 + \delta \,, \quad c_2 \,.\, 2^{-l} < a_2 + \delta \,.$$

Il y a $K = A \cup B \cup C \cup D$, où

$$A = \{[x_1, x_2] \in E_2 : c_1 \,.\, 2^{-l} \leqq x_1 \leqq a_1 + \delta,\ c_2 \,.\, 2^{-l} \leqq x_2 \leqq a_2 + \delta\} \,,$$
$$B = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_1 \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^{-l},\ c_2 \,.\, 2^{-l} \leqq x_2 \leqq a_2 + \delta\} \,,$$
$$C = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_1 \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^{-l},\ a_2 \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^{-l}\} \,,$$
$$D = \{[x_1, x_2] \in E_2 : c_1 \,.\, 2^{-l} \leqq x_1 \leqq a_1 + \delta,\ a_2 \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^{-l}\} \,.$$

D'après (2.20) et (2.19) on a

$$(a_1 + \delta) - c_i \,.\, 2^{-l} < (a_i + \delta) - a_i = \delta \leqq 2^{-l} \,, \quad i = 1, 2 \,;$$

(2.21) et (2.19) impliquent

$$c_i \,.\, 2^{-l} - a_i < \delta \leqq 2^{-l} \,, \quad i = 1, 2 \,;$$

alors A ou B ou C ou D resp. sont des rectangles canoniques d'ordre l du type (A) ou (B) ou (C) ou (D) resp. D'après le théorème 2.1, il existent des systèmes $\mathfrak{M}_A \in \mathbf{D}(A, 2^{-l})$, $\mathfrak{M}_B \in \mathbf{D}(B, 2^{-l})$, $\mathfrak{M}_C \in \mathbf{D}(C, 2^{-l})$, $\mathfrak{M}_D \in \mathbf{D}(D, 2^{-l})$ tels que

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_A} |L| < ((a_1 + \delta) - c_1 \,.\, 2^{-l}) + ((a_2 + \delta) - c_2 \,.\, 2^{-l}) + \tfrac{1}{4}\eta \,,$$
$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_B} |L| < (c_1 \,.\, 2^{-l} - a_1) + ((a_2 + \delta) - c_2 \,.\, 2^{-l}) + \tfrac{1}{4}\eta \,,$$
$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_C} |L| < (c_1 \,.\, 2^{-l} - a_1) + (c_2 \,.\, 2^{-l} - a_2) + \tfrac{1}{4}\eta \,,$$
$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_D} |L| < ((a_1 + \delta) - c_1 \,.\, 2^{-l}) + (c_2 \,.\, 2^{-l} - a_2) + \tfrac{1}{4}\eta \,.$$

Si nous posons $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_A \cup \mathfrak{M}_B \cup \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_D$, on aura $\mathfrak{M}_K \in \mathbf{D}(K, 2^{-l}) \subset \mathbf{D}(K, 2^{-k})$ et (2.18) (puisque $\delta = |K|$).

Démonstration de l'inégalité $H(M) \leqq 4\, h(M)$. Ayons un nombre réel $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre naturel k tel que $2^{-k} < \varepsilon$. D'après (1.4) on a $h_{2^{-k}}(M) \leqq h(M)$. A chaque nombre $\eta > 0$, il correspond donc d'après (1.3) un système dénombrale

$$\mathfrak{N} = \{K_1, K_2, \ldots\} \in \mathbf{K}(M, 2^{-k})$$

tel que

$$\sum_i |K_i| < h(M) + \tfrac{1}{8}\eta\,. \tag{2.22}$$

Etant $|K_i| \leqq 2^{-k}$ pour $i = 1, 2, \ldots$, il existent, d'après le théorème 2.2, des systèmes $\mathfrak{M}_i \in \mathbf{D}(K_i, 2^{-k})$ tels que

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}_i} |L| < 4\,.\,|K_i| + \tfrac{1}{2}\eta\,.\,2^{-i}\,. \tag{2.3}$$

Si nous posons $\mathfrak{M} = \bigcup_i \mathfrak{M}_i$, nous avons $\mathfrak{M} \in \mathbf{D}(M, 2^{-k}) \subset \mathbf{D}(M, \varepsilon)$ et d'après (2.22) at (2.23) on a

$$\sum_{L \in \mathfrak{M}} |L| = \sum_i \sum_{L \in \mathfrak{M}_i} |L| < \sum_i (4\,.\,|K_i| + \tfrac{1}{2}\eta\,.\,2^{-i}) \leqq$$

$$\leqq 4 \sum_i |K_i| + \tfrac{1}{2}\eta < 4(h(M) + \tfrac{1}{8}\eta) + \tfrac{1}{2}\eta = 4\,h(M) + \eta\,.$$

Le nombre $\eta > 0$ étant arbitraire, il découle de cela, en vertu de (1.3), que $H_\varepsilon(M) \leqq 4\,h(M)$, alors d'après (1.4) aussi $H(M) \leqq 4\,h(M)$.

3. Nous allons prouver le théorème B. Pour ce but, nous construirons un ensemble $Q \subset E_2$ tel que $h(Q) \leqq \frac{1}{2}$, $H(Q) \geqq 2$, alors d'après le théorème A nous aurons $h(Q) = \frac{1}{2}$, $H(Q) = 2$.

Définition 3.1. Dans E_2 définissons des ensembles $A_0, A_1, A_2, \ldots$ de la façon suivante: L'ensemble A_0 contient un seul point $[0, 0]$. L'ensemble A_{n-1} étant déjà défini, l'ensemble A_n se compose de tous les points $[a_1, a_2]$ de la forme

$$a_j = b_j + \frac{k_j}{2\,.\,4^{2n^2-1}}\,, \quad j = 1, 2\,, \tag{3.1}$$

où $[b_1, b_2] \in A_{n-1}$ et (k_1, k_2) parcourt toutes les couples de nombres entiers telles que

$$-2\,.\,4^{4(n-1)} \leqq k_j \leqq 2\,.\,4^{(n-1)}\,, \quad \max_{j=1,2} k_j = 2\,.\,4^{4(n-1)}\,. \tag{3.2}$$

Si $[a_1, a_2] \in A_n$, $[b_1, b_2] \in A_{n-1}$ et (3.1) et (3.2) ont lieu, nous dirons que le point $[a_1, a_2]$ est dérivé du point $[b_1, b_2]$. Si $m < n$ et $p_m \in A_m$, $p_n \in A_n$, nous dirons que le point p_n est dérivé du point p_m s'il existe une suite de points $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{n-1}$ telle que $p_i \in A_i$ pour $i = m + 1, \ldots, n - 1$ et p_i est dérivé de p_{i-1} pour $i = m + 1, m + 2, \ldots, n$.

On prouve aisément le

Théorème 3.1. (a) *Si $p \in A_n$, alors p a des coordonnées*

$$\left[\frac{\lambda_1}{2 \,.\, 4^{2n^2-1}},\ \frac{\lambda_2}{2 \,.\, 4^{2n^2-1}}\right],$$

où λ_1, λ_2 sont des nombres entiers.

(b) *Etant $p_{n-1} \in A_{n-1}$, il y a 4^{4n-2} points $p \in A_n$ dérivés du point p_{n-1}.*

(c) *Etant $p_{n-1} \in A_{n-1}$, $q_{n-1} \in A_{n-1}$, $p_{n-1} \neq q_{n-1}$, $p_n \in A_n$, $q_n \in A_n$, p_n dérivé de p_{n-1}, q_n dérivé de q_{n-1}, alors $p_n \neq q_n$.*

(d) *Etant $m < n$, $p_m \in A_m$, il y a $4^{2(n^2-m^2)}$ points $p \in A_n$ dérivés du point p_m.*

(e) *Pour chaque $n \geqq 0$, l'ensemble A_n contient 4^{2n^2} points.*

Définition 3.2. Pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ définissons des nombres

(3.3) $$r_n = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}}\,.$$

Pour chaque point $p = [a_1, a_2] \in A_n$ définissons des ensembles:

$$P^n_{p,1} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + r_n,\ a_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + r_n\}\,,$$
$$P^n_{p,2} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + r_n,\ a_2 - r_n \leqq x_2 \leqq a_2\}\,,$$
$$P^n_{p,3} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_1 - r_n \leqq x_1 \leqq a_1,\ a_2 - r_n \leqq x_2 \leqq a_2\}\,,$$
$$P^n_{p,4} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_1 - r_n \leqq x_1 \leqq a_1,\ a_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + r_n\}\,.$$

Nous dirons que l'ensemble $P^n_{p,i}$ est dérivé du point p. Etant $m < n$, $q \in A_m$, nous dirons que l'ensemble $P^n_{p,i}$ est dérivé du point q si le point p est dérivé du point q.

Du théorème 3.1 en déduit le

Théorème 3.2. (a) *Etant $m < n$, $p_m \in A_m$, il y a $4^{2(n^2-m^2)+1}$ ensembles $P^n_{p,i}$ dérivés du point p_m.*

(b) *Pour n fixe, il y a 4^{2n^2+1} ensembles $P^n_{p,i}$.*

Théorème 3.3. *Soient $q = [b_1, b_2] \in A_{n-1}$, $p = [a_1, a_2] \in A_n$, p soit dérivé de q à l'aide de* (3.1) *et* (3.2). *Alors*:

(a) *si $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, alors $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,1}$ pour $l = 1, 2, 3, 4$;*

(b) *si $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, alors $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,2}$ pour $l = 1, 2, 3, 4$;*

(c) *si* $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, *alors* $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,3}$ *pour* $l = 1, 2, 3, 4$;

(d) *si* $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, *alors* $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,4}$ *pour* $l = 1, 2, 3, 4$;

(e) *si* $k_1 = 0$, $k_2 > 0$, *alors* $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,1}$ *pour* $l = 1, 2$,
$P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,4}$ *pour* $l = 3, 4$;

(f) *si* $k_1 = 0$, $k_2 < 0$, *alors* $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,2}$ *pour* $l = 1, 2$,
$P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,3}$ *pour* $l = 3, 4$;

(g) *si* $k_1 > 0$, $k_2 = 0$, *alors* $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,1}$ *pour* $l = 1, 4$,
$P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,2}$ *pour* $l = 2, 3$;

(h) *si* $k_1 < 0$, $k_2 = 0$, *alors* $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,3}$ *pour* $l = 2, 3$,
$P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,4}$ *pour* $l = 1, 4$.

Démonstration. Prouvons tout d'abord (a). Si $[x_1, x_2] \in P^n_{p,l}$ pour quelque l, on a d'après la définition 3.2. certainement

$$a_j - r_n \leqq x_j \leqq a_j + r_n\,, \quad j = 1, 2\,;$$

si $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, alors d'après (3.2) on a

$$1 \leqq k_j \leqq 2\,.\,4^{4(n-1)}\,, \quad j = 1, 2\,,$$

donc d'après (3.1) et (3.3) on obtient pour $j = 1, 2$:

$$x_j \leqq a_j + r_n = b_j + \frac{k_j}{2\,.\,4^{2n-1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} \leqq b_j + \frac{2\,.\,4^{4(n-1)}}{2\,.\,4^{2n^2-1}} +$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} = b_j + \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} = b_j + r_{n-1}\,;$$

on a ensuite

$$x_j \geqq a_j - r_n = b_j + \frac{k_j}{2\,.\,4^{2n^2-1}} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} \geqq b_j + \frac{1}{2\,.\,4^{2n^2-1}} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}}\,;$$

mais comme

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} < \frac{1}{4^{1+2n^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{4^{1+2n^2}} < \frac{1}{2\,.\,4^{2n^2-1}}\,,$$

on a $x_j > b_j$; alors d'après la définition 3.2 on a $[x_1, x_2] \in P^{n-1}_{q,1}$ et (a) est prouvé. D'une façon analogue, on peut prouver (b), (c) et (d).

Nous allons prouver (e). Si $[x_1, x_2] \in P^n_{p,l}$ pour $l = 1$ ou $l = 2$, on a d'après la définition 3.2:

$$a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + r_n\,, \quad a_2 - r_n \leqq x_2 \leqq a_2 + r_n\,.$$

Si $k_1 = 0$, $k_2 > 0$, selon (3.2) on a $k_2 = 2 \,.\, 4^{4(n-1)}$. Tout comme dans le cas (a), on prouve

$$b_2 < x_2 \leqq b_2 + r_{n-1} \,.$$

Dans ce cas on a $a_1 = b_1$, $r_n < r_{n-1}$, donc

$$b_1 \leqq x_1 \leqq b_1 + r_{n-1} \,,$$

d'après la definition 3.2 on a $[x_1, x_2] \in P^{n-1}_{q,1}$, donc $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,1}$ pour $l = 1, 2$. De manière semblable, on prouve $P^n_{p,l} \subset P^{n-1}_{q,4}$ pour $l = 3, 4$, et (e) a lieu. D'une façon analogue, on prouve (f), (g) et (h).

Théorème 3.4. *Soient n, l, s des nombres naturels, $1 \leqq l \leqq 4$, $1 \leqq s \leqq 4$. Etant $p \in A_n$, $q \in A_n$, $p \neq q$, on a $P^n_{p,l} \cap P^n_{q,s} = \emptyset$.*

Démonstration. Selon la définition 3.1 et le théorème 3.1(c), il existe des nombres entiers $m, t, m \geqq 0$, $t > 0$, et des points $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_{m+t}, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_{m+t}$ tels que

$$p_i \in A_i \,, \quad q_i \in A_i \,, \quad i = m,\ m + 1, \ldots, m + t \,,$$

p_i est dérivé de p_{i-1}, q_i est dérivé de q_{i-1}, $i = m + 1, \ldots, m + t$,

$$p_m = q_m \,, \quad p_{m+t} = p \,, \quad q_{m+t} = q \,,$$

$$p_i \neq q_i \,, \quad i = m + 1, \ldots, m + t \,.$$

On déduit du théorème 3.3 qu'il existe des nombres naturels λ, σ tels que

$$P^n_{p,l} \subset P^{m+1}_{p_{m+1},\lambda} \,, \quad P^n_{q,s} \subset P^{m+1}_{q_{m+1},\sigma} \,.$$

Il suffit de prouver $P^{m+1}_{p_{m+1},\lambda} \cap P^{m+1}_{q_{m+1},\sigma} = \emptyset$.

Soit $p_{m+1} = [a_1, a_2]$, $q_{m+1} = [a'_1, a'_2]$. Etant $p_{m+1} \neq q_{m+1}$, on a $a_1 \neq a'_1$ ou $a_2 \neq a'_2$. Supposons p. ex. $a_1 < a'_1$. Si $[x_1, x_2] \in P^{m+1}_{p_{m+1},\lambda}$, $[y_1, y_2] \in P^{m+1}_{q_{m+1},\sigma}$, alors d'après la définition 3.2 on a

$$x_1 \leqq a_1 + r_{m+1} \,, \quad y_1 \geqq a'_1 - r_{m+1} \,.$$

Comme $p_m = q_m$, selon (3.1) on a

$$a'_1 \geqq a_1 + \frac{1}{2 \,.\, 4^{2(m+1)^2-1}} \,.$$

De là, on obtient

$$y_1 \geqq a_1 + \frac{1}{2 \,.\, 4^{2(m+1)^2-1}} - r_{m+1} = a_1 + r_{m+1} + \left(\frac{1}{2 \,.\, 4^{2(m+1)^2-1}} - 2r_{m+1}\right) \geqq$$

$$\geqq x_1 + \left(\frac{1}{2 \,.\, 4^{2(m+1)^2-1}} - 2r_{m+1}\right) .$$

Si la différence entre les parenthèses est positive, on a $y_1 > x_1$, alors $P^{m+1}_{p_{m+1},\lambda}$ et $P^{m+1}_{q_{m+1},\sigma}$ ne peuvent avoir aucun point commun. En effet, de (3.3) on déduira

$$\frac{1}{2\,.\,4^{2(m+1)^2-1}} - 2r_{m+1} = \frac{1}{2\,.\,4^{2(m+1)^2-1}} - 2\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{4^{1+2i^2}} >$$

$$> \frac{1}{2\,.\,4^{2(m+1)^2-1}} - \frac{2}{4^{1+2(m+1)^2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i} = \frac{1}{2\,.\,4^{2(m+1)^2-1}}\left(1 - \frac{2}{16}\cdot\frac{4}{3}\right) > 0\,.$$

Théorème 3.5. *Soient m, n, l des nombres entiers, $0 \leqq m < n$, $1 \leqq l \leqq 4$, $p \in A_m$. Alors il existe précisément $4^{2(n^2-m^2)}$ ensembles $P^n_{q,s}$ tels que $P^n_{q,s} \subset P^m_{p,l}$.*

Démonstration. I. Soit tout d'abord $m = n - 1$ et $p \in A_{n-1}$. D'après les théorèmes 3.3 et 3.4, $P^n_{q,s} \subset P^{n-1}_{p,l}$ peut avoir lieu seulement si le point q est dérivé du point p; et des théorèmes 3.3 et 3.1(b) on déduit qu'il y a précisément 4^{4n-2} ensembles $P^n_{q,s}$ contenus dans un $P^{n-1}_{p,l}$ $(l = 1, 2, 3, 4)$.

II. De I. et du théorème 3.4 on déduit qu'il existe précisément

$$\prod_{i=m+1}^{n} 4^{4i-2} = 4^{\sum_{i=m+1}^{n}(4i-2)} = 4^{2(n^2-m^2)}$$

ensembles $P^n_{q,s}$ contenus dans un $P^m_{p,l}$.

Définition 3.3. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ désignons

$$Q_n = \bigcup_{p\in A_n}\bigcup_{l=1}^{4} P^n_{p,l}\,, \quad Q = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n\,.$$

Des définitions 3.2 et 3.3 et du théorème 3.3 on déduit le

Théorème 3.6. (a) *Q_n est compact pour $n = 0, 1, 2, \ldots$;*

(b) *Q est compact;*

(c) $Q_n \subset Q_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(d) $Q \subset Q_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Théorème 3.7. *On a $h(Q) \leqq \frac{1}{2}$.*

Démonstration. Etant $n \geqq 0$, $p = [a_1, a_2] \in A_n$, définissons

$$K^n_p = \{[x_1, x_2] : a_i - r_n \leqq x_i \leqq a_i + r_n\}\,.$$

Des définitions 3.2 et 3.3 et du théorème 3.6(d) on voit que

$$\bigcup_{p\in A_n} K^n_p \supset Q_n \supset Q\,.$$

On a $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, parce que d'après (3.3)

$$r_n = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} < \frac{1}{4^{1+2n^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \frac{1}{4^{2n^2}}.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe donc un n_1 tel que pour $n > n_1$, on ait $r_n < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pour $n > n_1$ on a donc

$$\{K_p^n\}_{p\in A_n} \in \mathbf{K}(Q, \varepsilon). \tag{3.4}$$

Du théorème 3.1(e) et de (3.3) on déduit que

$$\sum_{p\in A_n} |K_p^n| = 4^{2n^2} 2r_n = 2 \,.\, 4^{2n^2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} < 2 \,.\, 4^{2n^2} \left(\frac{1}{4^{1+2n^2}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2(n+1)^2+i}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4^{4n+2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{1}{4^{4n+2}}.$$

Pour chaque $\eta > 0$, il existe un nombre n_2 tel que $\frac{2}{3} \,.\, 4^{-(4n+2)} < \eta$ pour $n > n_2$. Pour $n > \max(n_1, n_2)$, on a donc (3.4) et

$$\sum_{p\in A_n} |K_p^n| < \tfrac{1}{2} + \eta.$$

Alors $h_\varepsilon(Q) < \frac{1}{2} + \eta$ selon (1.3). Le nombre η étant un nombre arbitraire positif, on a $h_\varepsilon(Q) \leqq \frac{1}{2}$. De (1.4) on obtient

$$h(Q) = \sup_{\varepsilon>0} h_\varepsilon(Q) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Définition 3.4. Ayons des nombres entiers m, n, $0 \leqq m < n$, et des points $p = [a_1, a_2] \in A_m$, $q = [b_1, b_2] \in A_n$. Soit $P_{q,s}^n \subset P_{p,l}^m$. L'ensemble $P_{q,s}^n$ sera appelé frontier à l'ensemble $P_{p,l}^m$ s'il existe un point $[x_1, x_2] \in P_{q,s}^n$ tel que $x_1 = a_1$ ou $x_2 = a_2$. Si $P_{q,s}^n$ n'est pas frontier à $P_{p,l}^m$ il sera appelé régulier par rapport à $P_{p,l}^m$.

Théorème 3.8. *Ayons des nombres entiers m, n, $0 \leqq m < n$, et des points $p \in A_m$, $q \in A_n$. Soit $P_{q,s}^n \subset P_{p,l}^m$ et $P_{q,s}^n$ soit régulier par rapport à $P_{p,l}^m$. Soit K un carré dyadic tel que $|K| \geqq 2^{-1} \,.\, 4^{-2m^2}$. Alors ou bien $P_{p,l}^m \subset K$, ou bien $K \cap P_{q,s}^n = \emptyset$.*

Démonstration. K est donné par (1.2) avec $|K| = 2^{-k}$, où $k \leqq 4m^2 + 1$. D'après le théorème 3.1(a), $p = [\lambda_1 \,.\, 2^{-4m^2+1}, \lambda_2 \,.\, 2^{-4m^2+1}]$, où λ_1, λ_2 sont des nombres entiers. Posons

$$\delta = \min\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{4m^2-1}}\right).$$

Selon (3.3) nous avons

$$r_m = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{4^{1+2i^2}} < \frac{1}{4^{1+2m^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{4}{3} \frac{1}{2^{4m^2+2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{2^{4m^2+1}} < \delta. \tag{3.5}$$

Désignons encore

$$J_1 = \{x_1 : \text{il existe } x_2 \text{ tel que } [x_1, x_2] \in P^m_{p,l}\},$$

$$J_2 = \{x_2 : \text{il existe } x_1 \text{ tel que } [x_1, x_2] \in P^m_{p,l}\}$$

et soit

$$K = K_1 \times K_2, \quad K_j = \left\langle \frac{c_j}{2^k}, \frac{c_j + 1}{2^k} \right\rangle, \quad j = 1, 2.$$

Si maintenant $\lambda_1 . 2^{-4m^2+1} < c_1 . 2^{-k}$ (resp. $\lambda_1 . 2^{-4m^2+1} > (c_1 + 1) . 2^{-k}$), alors $\lambda_1 . 2^{-4m^2+1} \leqq c_1 . 2^{-k} - \delta$ (resp. $\lambda_1 . 2^{-4m^2+1} \geqq (c_1 + 1) . 2^{-k} + \delta$) et on voit de (3.5) et de la définition 3.2 que $J_1 \cap K_1 = \emptyset$. Si $\lambda_1 . 2^{-4m^2+1} = c_1 . 2^{-k}$ ou $\lambda_1 . 2^{-4m^2+1} = (c_1 + 1) . 2^{-k}$, on a ou $J_1 \subset K_1$ ou $J_1 \cap K_1 = \{\lambda_1 . 2^{-4m^2+1}\}$. Si $c_1 . 2^{-k} < \lambda_1 . 2^{-4m^2+1} < (c_1 + 1) . 2^{-k}$, alors $c_1 . 2^{-k} + \delta \leqq \lambda_1 . 2^{-4m^2+1} \leqq$ $\leqq (c_1 + 1) . 2^{-k} - \delta$ et on déduira que $J_1 \subset K_1$. D'une façon analogue, on trouvera que $J_2 \cap K_2 = \emptyset$ ou $J_2 \cap K_2 = \{\lambda_2 . 2^{-4m^2+1}\}$ ou $J_2 \subset K_2$.

Si maintenant $J_1 \cap K_1 = \emptyset$ ou $J_2 \cap K_2 = \emptyset$, alors $P^m_{p,l} \cap K = \emptyset$, donc aussi $P^n_{q,s} \cap K = \emptyset$. Si $J_j \cap K_j = \{\lambda_j . 2^{-4m^2+1}\}$ pour $j = 1$ ou $j = 2$, alors $p^n_{q,s} \cap K = \emptyset$ selon la définition 3.4. Si enfin $J_1 \subset K_1$, $J_2 \subset K_2$, alors $P^m_{p,l} = J_1 \dot{\times} J_2 \subset K_1 \times$ $\times K_2 = K$.

Théorème 3.9. *Soient m, l des nombres entiers, $m \geqq 0$, $1 \leqq l \leqq 4$; soit $p \in A_m$. Pour $n > m$ désignons par $\alpha_{m,n}$ le nombre des ensembles $P^n_{q,s}$ tels que $q \in A_m$, $P^n_{q,s} \subset P^m_{p,l}$* et *$P^n_{q,s}$ est régulier par rapport à $P^m_{p,l}$. Alors*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{m,n}}{2 . 4^{2n^2}} = \frac{1}{2 . 4^{2m^2}}.$$

Démonstration. I. Soit tout d'abord $n = m + 1$. Si $P^{m+1}_{q,s} \subset P^m_{p,l}$ où $p =$ $= [a_1, a_2]$, $q = [b_1, b_2]$ et $P^{m+1}_{q,s}$ est frontier à $P^m_{p,l}$, il est nécessairement $a_1 = b_1$ ou $a_2 = b_2$. Mais d'après les définitions 3.1 et 3.2 il y a pour $a_1 = b_1$ precisément 2 ensemble $P^{m+1}_{q,s}$ tels que $P^{m+1}_{q,s} \subset P^m_{p,l}$ et 2 tels ensembles pour $a_2 = b_2$. Il y a donc 4 ensembles $P^{m+1}_{q,s}$ frontiers à $P^m_{p,l}$.

II. Soit $n \geqq m + 1$ et supposons que si $p = [p_1, p_3] \in A_m$, $q = [q_1, q_2] \in A_n$, $P^n_{q,s} \subset P^m_{p,l}$ et $P^n_{q,s}$ est frontier à $P^m_{p,l}$, alors ou $p_1 = q_1$, ou $p_2 = q_2$. Si maintenant $\bar{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2] \in A_{n+1}$, $P^{n+1}_{\bar{q},\bar{s}} \subset P^n_{q,s}$ et $p_1 = q_1$, on déduit des définitions 3.1 et 3.2 que $P^{n+1}_{\bar{q},\bar{s}}$ est frontier à $P^n_{p,l}$ si et seulement si $\bar{q}_1 = p_1$ et qu'il existe deux tels ensembles $P^{n+1}_{\bar{q},\bar{s}}$ dans $P^n_{q,s}$. Similairement, si $p_2 = q_2$, alors $P^{n+1}_{\bar{q},\bar{s}}$ est frontier à $P^m_{p,l}$ so $\bar{q}_2 = p_2$ et il existe deux tels ensembles $P^{n+1}_{\bar{q},\bar{s}}$ dans $P^n_{q,s}$. Enfin, si $P^n_{q,s} \subset P^m_{p,l}$ et $P^n_{q,s}$ est régulier par rapport à $P^m_{p,l}$, alors chaque ensemble $P^{n+1}_{\bar{q},\bar{s}}$ contenu dans $P^n_{q,s}$ est régulier par rapport à $P^m_{p,l}$. Alors, si l'on désigne $\beta_{m,n}$ le nombre des ensembles $P^n_{q,s}$ contenus dans un $P^m_{p,l}$ et frontiers à ce $P^m_{p,l}$, on a $\beta_{m,m+1} = 4$, $\beta_{m,n+1} = 2\beta_{m,n}$ pour $n \geqq m + 1$, d'où l'on obtient

(3.6) $$\beta_{m,n} = 2^{n-m+1}\,, \quad n = m+1,\ m+2, \ldots.$$

III. Du théorème 3.5 et de (3.6) on déduit

$$\alpha_{m,n} = 4^{2(n^2-m^2)} - \beta_{m,n} = 4^{2(n^2-m^2)} - 2^{n-m+1}\,;$$

on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{m,n}}{2\,.\,4^{2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\,.\,4^{2m^2}} - \frac{2^{n-m+1}}{2\,.\,4^{2m^2}}\right) = \frac{1}{2\,.\,4^{2m^2}}\,.$$

Théorème 3.10. *Soit n un nombre entier non-négatif, K un carré dyadic, $|K| \geqq 2^{-1}\,.\,4^{-2n^2}$. Alors il existe au plus $|K|\,.\,2\,.\,4^{2n^2}$ ensembles $P^n_{p,s}(p \in A_n)$ tels que $P^n_{p,s} \subset K$.*

Démonstration. Désignons par α_n le nombre des ensembles $P^n_{p,s}$ contenus dans K.

I. Soit $n = 0$. D'après les définitions 3.1 et 3.2, il y a au plus un ensemble $P^0_{p,s}$ contenu dans K, donc $\alpha_0 \leqq 1$. D'autre côté, $|K| \geqq \frac{1}{2}$, donc $|K|\,.\,2\,.\,4^{2n^2} = 2\,.|K| \geqq 1$, et $\alpha_0 \leqq |K|\,.\,2\,.\,4^{2n^2}$.

II. Soit $n > 0$, $|K| \geqq \frac{1}{2}$. D'après **I.**, il existe au plus un ensemble $P^0_{q,s}$ contenu dans K. D'après le théorème 3.5, il existe précisément 4^{2n^2} ensembles $P^n_{p,l}$ contenus dans un $P^0_{q,s}$. Si $P^0_{q,s} \subset K$, $P^0_{q,\bar{s}} \neq P^0_{q,s}$, $P^n_{p,l} \subset P^0_{q,\bar{s}}$, alors $P^n_{p,l} \not\subset K$. Donc

$$\alpha_n \leqq 4^{2n^2} = \tfrac{1}{2}\,.\,2\,.\,4^{2n^2} \leqq |K|\,.\,2\,.\,4^{2n^2}\,.$$

III. Soit $n > 0$, $|K| < \frac{1}{2}$. Soit m le nombre entier tel que

(3.7) $$\frac{1}{2\,.\,4^{2m^2}} \leqq |K| < \frac{1}{2\,.\,4^{2(m-1)^2}}\,.$$

On a $1 \leqq m \leqq n$. Nous démontrons tout d'abord que

(3.8) $$\alpha_m \leqq |K|\,.\,2\,.\,4^{2n^2}\,.$$

Pour $q = [b_1, b_2] \in A_m$ désignons $v(q)$ le nombre des ensembles $P^m_{q,s}$ contenus dans K. D'après le théorème 3.1(a), les b_j sont de la forme

(3.9) $$b_j = \frac{\lambda_j}{2\,.\,4^{2m^2-1}}\,, \quad \lambda_j \text{ entiers}\,.$$

De (3.3) et (3.7) on déduit

$$r_m < \frac{1}{4^{1+2m^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{2m^2}} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{4^{2m^2}} \leqq \min\left(|K|, \frac{1}{2\,.\,4^{2m^2-1}}\right).$$

D'ici et de la définition 3.2 on déduit que $v(q) = 4$ si q se trouve à l'intérieur de K, $v(q) = 2$ si q se trouve sur un côte de K et sur un seul (= pas au sommet), $v(q) = 1$ si q se trouve à un sommet de K et $v(q) = 0$ si q est à l'extérieur de K.

De (3.7) on déduit que $|K| = (2 \,.\, 4^{2m^2})^{-1} \,.\, 2^{\lambda}$, où λ est entier et $1 \leqq 2^{\lambda} < 4^{4m-2}$. Nous allons distinguer trois cas:

(a) $1/(2.4^{2m^2}) \leqq |K| \leqq 1/4^{2m^2}$. Pour $[b_1, b_2] \in A_m$, (3.9) a lieu, alors K peut contenir au plus un point $q \in A_m$ et seulement un sommet, alors

$$\sum_{q \in A_m} v(q) \leqq 1 \,.$$

On a donc

$$\alpha_m = \sum_{q \in A_m} v(q) \leqq 1 = \frac{2 \,.\, 4^{2m^2}}{2 \,.\, 4^{2m^2}} \leqq |K| \,.\, 2 \,.\, 4^{2m^2}$$

et (3.8) a lieu.

(b) $|K| = 1/(2.4^{2m^2-1})$. D'après (3.9), K peut contenir au plus 4 points $q \in A_m$, qui soient tous des sommets. On a donc

$$\alpha_m = \sum_{q \in A_m} v(q) \leqq 4 = \frac{2 \,.\, 4^{2m^2}}{2 \,.\, 4^{2m^2-1}} = |K| \,.\, 2 \,.\, 4^{2m^2} \,,$$

alors (3.8) a aussi lieu.

(c) $1/(2.4^{2m^2-1}) < |K| \leqq 1/4^{2(m-1)^2+1}$. Le carré K ne peut pas contenir deux points $q \in A_m$, $q' \in A_m$, dérivés des points différents $\bar{q} \in A_{m-1}$, $\bar{q}' \in A_{m-1}$, Cependant, soit $q = [b_1, b_2]$, $q' = [b'_1, b'_2]$, $\bar{q} = [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$, $\bar{q}' = [\bar{b}'_1, \bar{b}'_2]$ et p. ex. $\bar{b}_j < \bar{b}'_j$. Alors d'après la définition 3.1 nous obtenons

$$b_j \leqq \bar{b}_j + \frac{2 \,.\, 4^{4(m-1)}}{2 \,.\, 4^{2m^2-1}} \,, \quad b'_j \geqq \bar{b}'_j - \frac{2 \,.\, 4^{4(m-1)}}{2 \,.\, 4^{2m^2-1}}$$

et d'après le théorème 3.1(a) nous avons

$$\bar{b}'_j - \bar{b}_j \geqq \frac{1}{2 \,.\, 4^{2(m-1)^2-1}} \,;$$

de cela on obtient

$$b'_j - b_j \geqq \bar{b}'_j - \bar{b}_j - 2 \,.\, \frac{2 \,.\, 4^{4(m-1)}}{2 \,.\, 4^{2m^2-1}} \geqq \frac{1}{2 \,.\, 4^{2(m-1)^2-1}} - 2 \,.\, \frac{2 \,.\, 4^{(m-1)}}{2 \,.\, 4^{2m^2-1}} =$$

$$= \frac{3}{2 \,.\, 4^{2(m-1)^2}} > \frac{1}{4^{2(m-1)^2+1}} \geqq |K| \,,$$

alors le carré K ne peut pas contenir les deux points q et q'.

Si $q = [b_1, b_2] \in A_m$, au moins une coordonnée b_j doit être, d'après (3.2) de la forme

$$b_j = \bar{b}_j \pm \frac{2 \,.\, 4^{4(m-1)}}{2 \,.\, 4^{2m^2-1}} = \bar{b}_j \pm \frac{1}{4^{2(m-1)^2+1}} \,,$$

où $[\bar{b}_1, \bar{b}_2] \in A_{m-1}$. D'après le théorème 3.1(a), $\bar{b}_j$ est de la forme $\bar{\lambda}_j . (2.4^{2(m-1)^2-1})^{-1}$, alors b_j est de la forme $\lambda_j . 4^{-2(m-1)^2-1}$. Le carré dyadic K est donné par (1.2) avec $k \geqq 2 . (2(m-1)^2 + 1)$, alors aucun point $q \in A_m$ ne peut pas être à l'intérieur de K.

On voit aussi aisément que deux points $q \in A_m$, $q' \in A_m$ ne peuvent pas être placés sur deux côtés opposés du carré K, si aucun d'eux n'est un sommet de K. Alors les points $q \in A_m$ peuvent être à l'intérieur de deux côtés au plus du carré K. Mais si $|K| = 2^\lambda/(2.4^{2m^2-1})$, selon la définition 3.1 à l'intérieur d'un côte il peut y avoir au plus $2^\lambda - 1$ points. Pour les points q à l'intérieur d'un côte on a $v(q) = 2$, pour les points q aux sommets on a $v(q) = 1$. Alors

$$\alpha_m = \sum_{q \in A_m} v(q) \leqq 2 . (2^\lambda - 1) . 2 + 4 = 4 . 2^\lambda = 4 . 2^\lambda . |K| . \frac{2 . 4^{2m^2-1}}{2^\lambda} = |K| . 2 . 4^{2m^2},$$

et (3.8) a lieu de nouveau.

IV. Si $m = n$, le théorème 3.10 est déjà prouvé. Si $m < n$, alors d'après le théorème 3.5 et d'après (3.8) on obtient

$$\alpha_n = \alpha_m . 4^{2(n^2-m^2)} \leqq |K| . 2 . 4^{2m^2} . 4^{2(n^2-m^2)} = |K| . 2 . 4^{2n^2} .$$

Théorème 3.11. *Soit* $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{M} \in \mathbf{D}(Q, \varepsilon)$. *Alors*

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \geqq 2 . \tag{3.10}$$

Démonstration. I. Soient $n \geqq 0$, $1 \leqq l \leqq 4$, $p \in A_n$. Désignons

$$R^n_{p,l} = Q \cap \bigcup P^m_{q,s} ,$$

où $P^m_{q,s}$ parcourt tous les ensembles $P^m_{q,s} \subset P^n_{p,l}$ avec $m > n$, $q \in A_m$, $1 \leqq s \leqq 4$, réguliers par rapport à $P^n_{p,l}$. De la définition 3.3 et du théorème 3.9 on déduit qu'aucun des ensembles $R^n_{p,l}$ n'est vide.

II. Soit $n \geqq 0$, $1 \leqq l \leqq 4$, $1 \leqq s \leqq 4$, $p \in A_n$, $q \in A_n$, $(p, l) \neq (q, s)$. Soit K un carré dyadic, $|K| < 1/(2 . 4^{2n^2})$. Si $R^n_{p,l} \cap K \neq \emptyset$, alors $R^n_{q,s} \cap K = \emptyset$.

Cependant, soit tout d'abord $p = q$. D'après le théorème 3.1(a), $p = q = [\lambda_1 . (2 . 4^{2n^2-1})^{-1}, \lambda_2 . (2 . 4^{2n^2-1})^{-1}]$ avec λ_1, λ_2 entiers. Alors, d'après (1.2) et d'après la définition 3.2, le carré K ne peut contenir à la fois un point intérieur de $P^n_{p,l}$ et un point intérieur de $P^n_{q,s}$. Alors, ou $R^n_{p,l} \cap K = \emptyset$ ou $R^n_{q,s} \cap K = \emptyset$.

Si $p = [a_1, a_2] \neq q = [a'_1, a'_2]$, alors d'après le théorème 3.1(a) on a $|a_j - a'_j| \geqq (2 . 4^{2n^2-1})^{-1}$ pour $j = 1$ ou pour $j = 2$. Si $[x_1, x_2] \in P^n_{p,l}$, $[x'_1, x'_2] \in P^n_{q,s}$, alors on déduit de la définition 3.2:

$$|x_j - x'_j| \geqq |a_j - a'_j| - |x_j - a_j| - |x'_j - a'_j| \geqq \frac{1}{2 . 4^{2n^2-1}} - 2r_n >$$

$$> \frac{1}{2 . 4^{2n^2-1}} - \frac{2}{4^{2n^2+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{4}{2 . 4^{2n^2}} - \frac{4}{3} \frac{1}{2 . 4^{2n^2}} > \frac{1}{2 . 4^{2n^2}} .$$

D'ici on obtient que ou $P^n_{p,l} \cap K = \emptyset$ ou $P^n_{q,s} \cap K = \emptyset$, donc aussi ou $R^n_{p,l} \cap K = \emptyset$ ou $R^n_{q,s} \cap K = \emptyset$.

III. Supposons qu'il existe $\mathfrak{M} \in \mathbf{D}(Q, \varepsilon)$ tel que (3.10) n'ait pas lieu. Posons ensuite

$$\mathfrak{N}_l = \{K \in \mathfrak{M} : K \cap R^0_{[0,0],l} \neq \emptyset\}\,, \quad l = 1, 2, 3, 4\,.$$

Nous avons $\mathfrak{N}_l \cap \mathfrak{N}_s = \emptyset$ pour $l \neq s$, et de la négation de (3.10) nous déduisons qu'il existe $l (1 \leqq l \leqq 4)$ tel que

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_l} |K| < \tfrac{1}{2}\,.$$

Désignons cet l par $l(0)$ et par $\mathfrak{M}_0$ le système $\mathfrak{N}_{l(0)}$.

IV. Supposons qu'il existe pour $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ des nombres entiers non-négatifs $n(i)$, $l(i)$, des points $p(i) \in A_{n(i)}$ et des systèmes $\mathfrak{M}_i$ de carrés dyadics avec les propriétés suivantes;

(a) $0 = n(0) < n(1) < n(2) < \ldots < n(m)$;

(b) $1 \leqq l(i) \leqq 4$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, m$;

(c) $p(0) = [0, 0]$;

(d) $P^{n(0)}_{p(0),l(0)} \supset P^{n(1)}_{p(1),l(1)} \supset \ldots \supset P^{n(m)}_{p(m),l(m)}$;

(e) chaque $P^{n(i)}_{p(i),l(i)}$ est régulier par rapport à $P^{n(j)}_{p(j),l(j)}$ pour $j < i$;

(f) $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_m$;

(g) $R^{n(i)}_{p(i),l(i)} \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$;

(h) $\sum_{K \in \mathfrak{M}_i} |K| < \dfrac{1}{2\,.\,4^{2n(i)^2}}$;

(i) $K \cap R^{n(i)}_{p(i),l(i)} = \emptyset$ pour $K \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_i$.

Nous allons construire des nombres entiers $n(m+1)$, $l(m+1)$, un point $p(m+1) \in$ $\in A_{n(m+1)}$ et un système $\mathfrak{M}_{m+1}$ de carrés dyadics de façon que les propriétés (a)–(i) restent valables aussi pour $m + 1$ au lieu de m.

Cependant, ayons un nombre naturel $N > n(m)$. Désignons par $\mathfrak{A}_N$ le système des ensembles $P^N_{q,s}$ (où $q \in A_N$) tels que $P^N_{q,s} \subset P^{n(m)}_{p(m),l(m)}$ et $P^N_{q,s}$ est régulier par rapport à $P^{n(m)}_{p(m),l(m)}$. Le système $\mathfrak{A}_N$ a $\alpha_{n(m),N}$ éléments (voir le théorème 3.9). Désignons

$$\mathfrak{M}^N_m = \left\{K \in \mathfrak{M}_m\colon\ |K| \geqq \frac{1}{2\,.\,4^{2N^2}}\right\},$$

$$\mathfrak{A}'_N = \{P^N_{q,s} \in \mathfrak{A}_N\colon \text{ il existe } K \in \mathfrak{M}^N_m \text{ tel que } P^N_{q,s} \subset K\}\,,$$

$$\mathfrak{A}''_N = \{P^N_{q,s} \in \mathfrak{A}_N\colon\ R^N_{q,s} \cap K = \emptyset \text{ pour chaque } K \in \mathfrak{M}^N_m\}\,.$$

De la définition des ensembles $R^N_{q,s}$ et du théorème 3.8 on déduit que $\mathfrak{A}'_N \cup \mathfrak{A}''_N = \mathfrak{A}_N$,

$\mathfrak{A}'_N \cap \mathfrak{A}_N = \emptyset$. Si nous désignons par $\alpha'_{m,N}$ resp. $\alpha''_{m,N}$ le nombre des éléments du système $\mathfrak{A}'_N$ resp. $\mathfrak{A}''_N$, nous avons

$$\alpha'_{m,N} + \alpha''_{m,N} = \alpha_{n(m),N} . \tag{3.11}$$

Du théorème 3.10 nous obtenons

$$\alpha'_{m,N} \leqq 2 \,.\, 4^{2N^2} \sum_{K \in \mathfrak{M}_m{}^N} K . \tag{3.12}$$

Désignons par $\mathbf{P}(m, N)$ l'ensemble des couples (q, s) (où $q \in A_N$, s est un nombre naturel, $1 \leqq s \leqq 4$) telles que $P^N_{q,s} \in \mathfrak{A}''_N$. Posons

$$\mathfrak{N}^{m,N}_{q,s} = \{K \in \mathfrak{M}_m : R^N_{q,s} \cap K \neq \emptyset\} , \quad (q, s) \in \mathbf{P}(m, N) .$$

On a

$$\mathfrak{N}^{m,N}_{q,s} \cap \mathfrak{M}^N_m = \emptyset \quad \text{pour chaque} \quad (q, s) \in \mathbf{P}(m, N) . \tag{3.13}$$

D'après II., on a aussi

$$\mathfrak{N}^{m,N}_{q,s} \cap \mathfrak{N}^{m,N}_{\bar{q},\bar{s}} = \emptyset \quad \text{pour} \quad (q, s) \neq (\bar{q}, \bar{s}) . \tag{3.14}$$

Nous allons prouver qu'il existe un nombre $N > n(m)$, un point $q \in A_N$ et un nombre s $(1 \leqq s \leqq 4)$ que

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}_{q,s}{}^{m,N}} |K| < \frac{1}{2 \,.\, 4^{2N^2}} . \tag{3.15}$$

Actuellement, posons $\mathfrak{N}^{m,N} = \bigcup_{(q,s) \in \mathbf{P}(m,N)} \mathfrak{N}^{m,N}_{q,s}$. En vertu de (3.14), on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}^{m,N}} |K| = \sum_{(q,s) \in \mathbf{P}(m,N)} \sum_{K \in \mathfrak{N}_{q,s}{}^{m,N}} |K| .$$

Si (3.15) n'avait lieu pour aucun N, q, s, alors pour chaque $N > n(m)$ on aurait

$$\sum_{K \in \mathfrak{N}^{m,N}} |K| \geqq \frac{\alpha''_{m,N}}{2 \,.\, 4^{2N^2}} . \tag{3.16}$$

On a $\mathfrak{M}_m \supset \mathfrak{M}^N_m \cup \mathfrak{N}^{m,N}$. Alors, d'après (3.13) on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}_m} |K| \geqq \sum_{K \in \mathfrak{M}_m{}^N} |K| + \sum_{K \in \mathfrak{N}^{m,N}} |K| . \tag{3.17}$$

De (3.11), (3.12), (3.16) et (3.17) on déduirait

$$\frac{\alpha_{n(m),N}}{2 \,.\, 4^{2N^2}} = \frac{\alpha'_{m,N}}{2 \,.\, 4^{2N^2}} + \frac{\alpha''_{m,N}}{2 \,.\, 4^{2N^2}} \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}_m{}^N} |K| + \sum_{K \in \mathfrak{N}^{m,N}} |K| \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}_m} |K| .$$

Mais ceci n'est pas possible pour chaque $N > n(m)$, car

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}_m} |K| < \frac{1}{2 \,.\, 4^{2n(m)^2}}$$

d'après (h) et

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_{n(m),N}}{2 \,.\, 4^{2N^2}} = \frac{1}{2 \,.\, 4^{2n(m)^2}}$$

d'après le théorème (3.9).

Nous choisissons un nombre $N > n(m)$, un point $q \in A_N$ et un nombre s tels que (3.15) ait lieu et posons

$$n(m+1) = N\,, \quad l(m+1) = s\,, \quad p(m+1) = q\,, \quad \mathfrak{M}_{m+1} = \mathfrak{N}^{m,N}_{q,s}\,.$$

V. D'après III. et IV., les nombres $n(i)$, $l(i)$, les points $p(i)$ et les systèmes $\mathfrak{M}_i$ peuvent être définis pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ de manière que les propriétés (a)–(i) soient vérifiées pour chaque m naturel. Les ensemble $P^{n(i)}_{p(i),l(i)}$ étant compacts, il existe selon (d) un point $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} P^{n(i)}_{p(i),l(i)}$. D'après la définition 3.3 et le théorème 3.6, on a $x \in Q$. Il existe donc un carré $\tilde{K} \in \mathfrak{M}$ tel que $x \in \tilde{K}$. Soit $|\tilde{K}| = 2^{-k}$. Choisissons un nombre naturel m tel que

$$2 \,.\, 4^{2n(m)^2} > 2^k\,.$$

Nous avons $x \in P^{n(m+1)}_{p(m+1),l(m+1)}$ et $P^{n(m+1)}_{p(m+1),l(m+1)}$ est régulier par rapport à $P^{n(m)}_{p(m),l(m)}$, alors $x \in R^{n(m)}_{p(m),l(m)}$. D'après IV(i), on a donc $\tilde{K} \in \mathfrak{M}_m$. Mais c'est une contradiction, parce que

$$|\tilde{K}| = \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2 \,.\, 4^{2n(m)^2}}$$

et de IV(h) on déduit $|K| < (2 \,.\, 4^{2n(m)^2})^{-1}$ pour chaque $K \in \mathfrak{M}_m$.

Théorème 3.12. *On a* $H(Q) \geqq 2$.

Démonstration. Du théorème 3.11 il résulte $H_\varepsilon(Q) \geqq 2$ pour chaque $\varepsilon > 0$, alors aussi $H(Q) \geqq 2$ selon (1.4).

Le théorème B du § 1 résulte des théorèmes 3.7, 3.12 et du théorème A.

4. Un carré fondamental (1.1) sera appelé carré dyadic généralisé, si $|K| = 2^k$, où k est un nombre entier. L'ensemble do tous les systèmes dénombrables de carrés dyadics généralisés sera désigné par $\boldsymbol{G}$. Etant $M \subset E_2$ et $\varepsilon > 0$, désignons par $\boldsymbol{G}(M, \varepsilon)$ l'ensemble de tous les systèmes $\mathfrak{M} \in \boldsymbol{G}$ tels que

$$|\mathfrak{M}| \leqq \varepsilon\,, \quad M \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K\,.$$

Si $M \subset E_2$, nous posons pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathscr{H}_\varepsilon(M) = \inf_{\mathfrak{M} \in \boldsymbol{G}(M,\varepsilon)} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K|\,. \tag{4.1}$$

Pour $\varepsilon_2 \geqq \varepsilon_2 > 0$ et pour chaque ensemble $M \subset E_2$, on a évidemment

$$\mathscr{H}_{\varepsilon_1}(M) \leqq \mathscr{H}_{\varepsilon_2}(M),$$

alors il existe un nombre éventuellement égal $+\infty$)

$$\mathscr{H}(M) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathscr{H}_\varepsilon(M) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathscr{H}_\varepsilon(M). \tag{4.2}$$

Théorème 4.1. *Pour chaque ensemble $M \subset E_2$ et chaque nombre $\varepsilon > 0$ on a*

$$h_\varepsilon(M) \leqq \mathscr{H}_\varepsilon(M) \leqq H_\varepsilon(M), \quad h(M) \leqq \mathscr{H}(M) \leqq H(M).$$

Démonstration. Le théorème découle des inclusions évidentes $\mathbf{D}(M, \varepsilon) \subset \subset \mathbf{G}(M, \varepsilon) \subset \mathbf{K}(M, \varepsilon)$ et de (1.3), (4.1), (1.4) et (4.2).

Théorème 4.2. *A tout carré fondamental K il existe un carré dyadic généralisé L_K tel que $K \subset L_K$, $|L_K| \leqq 2|K|$.*

Démonstration. K soit donné par (1.1). Soit k le nombre entier tel que $2^{k-1} < < \delta \leqq 2^k$; on a $2^k \leqq 2\delta$, alors il suffit de poser

$$L_K = \{[x_1, x_2] \in E_2 : a_i \leqq x_i \leqq a_i + 2^k\}.$$

Théorème 4.3. *Pour tout ensemble $M \subset E_2$ a lieu l'inégalité $\mathscr{H}(M) \leqq 2\, h(M)$.*

Démonstration. Ayons $M \subset E_2$ et un nombre $\varepsilon > 0$. D'après (1.4) nous avons

$$h_{\varepsilon/2}(M) \leqq h(M).$$

A chaque nombre $\eta > 0$, il existe selon (1.3) un système $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}(M, \frac{1}{2}\varepsilon)$ tel que

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| < h(M) + \tfrac{1}{2}\eta. \tag{4.3}$$

D'après le théorème 4.2, il existe un système $\mathfrak{N} = \{L_K\}_{K \in \mathfrak{M}} \in \mathbf{G}(M, \varepsilon)$ tel que

$$\sum_{L \in \mathfrak{N}} |L| = \sum_{K \in \mathfrak{M}} |L_K| \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}} 2 \cdot |K|.$$

Selon (4.3) on a donc

$$\sum_{L \in \mathfrak{N}} |L| < 2\, h(M) + \eta$$

et d'après (4.1) nous obtenons

$$\mathscr{H}_\varepsilon(M) \leqq \inf_{\eta > 0} (2\, h(M) + \eta) = 2\, h(M);$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, le théorème découle de cela en vertu de (4.2).

Théorème 4.4. *Pour tout carré dyadic généralisé K il existe un système $\mathfrak{N}_K \in \in \mathbf{D}(K, |K|)$ tel que*

$$\sum_{L \in \mathfrak{N}_K} |L| \leqq \tfrac{7}{2} \cdot |K|. \tag{4.4}$$

Démonstration. K soit donné par (1.1), où $\delta = 2^k$. Soient c_1, c_2 les nombres entiers tels que

$$(c_i - 1) \,.\, 2^k < a_i \leqq c_i \,.\, 2^k \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

En vertu de $\delta = 2^k$, on a

$$a_i \leqq c_i \,.\, 2^k < a_i + \delta \,.$$

Un des nombres $c_i \,.\, 2^k - a_i$, $a_i + \delta - c_i \,.\, 2^k$ n'est pas plus grand que $\frac{1}{2}|K| = 2^{k-1}$. Si $m_{i,j}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ sont les nombres entiers tels que

$$2^{m_{i,1}-1} < c_i \,.\, 2^k - a_i \leqq 2^{m_{i,1}} \,, \quad 2^{m_{i,2}-1} < a_i + \delta - c_i \,.\, 2^k \leqq 2^{m_{i,2}} \,,$$

alors aucun d'eux n'est plus grand que k, un des nombres $m_{1,1}$, $m_{1,2}$ n'est pas plus grand que $k - 1$ et aussi un des nombres $m_{2,1}$, $_{m,2}$ n'est pas plus grand que $k - 1$. Posons maintenant $\mathfrak{N}_K = \{L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\}$ où

$$L_{11} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : c_1 \,.\, 2^k - \delta_{11} \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^k,\ c_2 \,.\, 2^k - \delta_{11} \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^k\} \,,$$

$$L_{12} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : c_1 \,.\, 2^k - \delta_{12} \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^k,\ c_2 \,.\, 2^k \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^k + \delta_{12}\} \,,$$

$$L_{21} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : c_1 \,.\, 2^k \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^k + \delta_{21},\ c_2 \,.\, 2^k - \delta_{21} \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^k\} \,,$$

$$L_{22} = \{[x_1, x_2] \in E_2 : c_1 \,.\, 2^k \leqq x_1 \leqq c_1 \,.\, 2^k + \delta_{22},\ c_2 \,.\, 2^k \leqq x_2 \leqq c_2 \,.\, 2^k + \delta_{22}) \,,$$

où $\delta_{ij} = \max(2^{m_{1,i}}, 2^{m_{2,j}})$. (Si $a_1 = c_1 \,.\, 2^k$ ou $a_2 = c_2 \,.\, 2^k$, alors $m_{1,1}$ ou $m_{2,1}$ n'est pas défini; mais dans ce cas nous omettons L_{11} et L_{12} ou L_{21}). On a évidemment $\mathfrak{N}_K \in \mathbf{D}(K, |K|)$ et un au moins des carrés L_{ij} a la norme $|L_{ij}| \leqq \frac{1}{2}|K|$. D'ici on obtient (4.4).

Théorème 4.5. *Pour chaque ensemble $M \subset E_2$ a lieu $H(M) \leqq \frac{7}{2}\, \mathscr{H}(M)$.*

Démonstration. Ayons $M \subset E_2$ et un nombre $\varepsilon > 0$. D'après (4.2), nous obtenons

$$\mathscr{H}_\varepsilon(M) \leqq \mathscr{H}(M) \,.$$

Pour tout nombre $\eta > 0$, il existe selon (4.1) un système $\mathfrak{M} \in \mathbf{G}(M, \varepsilon)$ tel que

$$\sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| < \mathscr{H}(M) + \tfrac{2}{7}\eta \,. \tag{4.5}$$

D'après le théorème 4.4, il existe à chaque carré $K \in \mathfrak{M}$ un système $\mathfrak{N}_K \in \mathbf{D}(K, |K|)$ tel que

$$\sum_{L \in \mathfrak{N}_K} |L| \leqq \tfrac{7}{2}|K| \,.$$

Posons $\mathfrak{N} = \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}_K$. Puis $\mathfrak{N} \in \mathbf{D}(M, \varepsilon)$ et on a

$$\sum_{L \in \mathfrak{N}} |L| \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}} \sum_{L \in \mathfrak{N}_K} |L| \leqq \sum_{K \in \mathfrak{M}} \tfrac{7}{2}|K| \,,$$

alors d'après (4.5) on obtient

$$\sum_{L \in \mathfrak{N}} |L| < \tfrac{7}{2} \mathscr{H}(M) + \eta .$$

Selon (1.3) on a donc

$$H_\varepsilon(M) \leqq \inf_{\eta > 0} \left(\tfrac{7}{2} \mathscr{H}(M) + \eta\right) = \tfrac{7}{2} \mathscr{H}(M) ;$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, le théorème découle d'ici selon (1.4).

Des théorèmes 4.1, 4.3, 4.5 et B il découle

Théorème C. *Il existe un ensemble $Q \subset E_2$ tel que*

$$h(Q) < \mathscr{H}(Q) < H(Q) .$$

Littérature

[1] *M. Jůza:* Deux mesures spéciales dans l'espace E_2. Časopis pro pěstování matematiky, *103* 1978, 213—235.

Adresse de l'auteur: 106 00 Praha 10, Sasanková 2655, ČSSR.