

Otto Mutzbauer

Zerlegbarkeitskriterien für Invarianten torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 29 (1979), No. 3, 337–339

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101615>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1979

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ZERLEGBARKEITSKRITERIEN FÜR INVARIANTEN TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN DES RANGES 2

OTTO MUTZBAUER, Würzburg

(Eingegangen am 17. Dezember 1975)

1. EINLEITUNG

Für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2, gegeben durch spezielle Invarianten [3; 5], wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für vollständige Zerlegbarkeit angegeben. Die Frage der praktisch-rechnerischen Nachprüfbarkeit der vollständigen Zerlegbarkeit mit Hilfe dieses Kriteriums wird in [4] behandelt.

Die Notationen von Fuchs [2] werden verwendet.

2. CHARAKTERISTIKEN

Für p -adische Zahlen r wird die Ordnung $\mathcal{O}_p(r)$, definiert durch $p^{-\mathcal{O}_p(r)}r \in \mathcal{Q}_p^*$ Einheit, verwendet. Sei weiter für eine p -adische Zahl r , sofern $\mathcal{O}_p(r) \geq 0$ ist, $r^{(n)}$ die $(n - 1)$ -te Partialsumme der p -adischen Standardentwicklung; für $\mathcal{O}_p(r) < 0$ sei $r^{(n)}$ genau diejenige Partialsumme \bar{r} von r , für die gilt: $(\bar{r}^{-1})^{(n)} = (r^{-1})^{(n)}$ bzw. $\bar{r} := \infty$. Speziell soll gelten: $r^{(0)} := 0$, $r^{(\infty)} := r$ und $\infty^{(n)} := \infty$ für natürliches $n > 0$.

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe G des Ranges 2 mit den unabhängigen Elementen u, v gilt bei Verwendung der Bezeichnungen und Sätze von [2; § 93] für den \mathcal{Q}_p^* -Modul $J_p \otimes G$:

$$J_p \otimes G / \mathcal{Q}_p^*u \oplus \mathcal{Q}_p^*v \cong Z(p^{m_p}) \oplus Z(p^{n_p}) \quad \text{mit } 0 \leq m_p \leq n_p \leq \infty,$$

und mit der abkürzenden Bezeichnung $R_p(m) := p^{-m}\mathcal{Q}_p^*$ bzw. $R_p(\infty) := \mathcal{K}_p^*$ gilt:

$$J_p \otimes G = R_p(m_p)(\alpha_p u + \beta_p v) \oplus R_p(n_p)(\gamma_p u + \delta_p v),$$

wobei $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p \in \mathcal{Q}_p^*$ p -adische ganze Zahlen sind mit $\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p$ Einheit. Die Gruppe G wird dann bzgl. der Basis u, v durch genau eine „Charakteristik“ $M := \{m_p, n_p, \pi_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ beschrieben mit $\pi_p := (\gamma_p \delta_p^{-1})^{(n_p - m_p)} \in \mathcal{K}_p^* \cup \{\infty\}$, und man schreibt $G = \langle u, v \mid M \rangle$.

3. ZERLEGBARKEIT

An der Charakteristik \mathcal{M} , die eine Gruppe $G = \langle u, v \mid \mathcal{M} \rangle$ beschreibt läßt sich die vollständige Zerlegbarkeit der Gruppe G ablesen.

Satz. Die Charakteristik $\mathcal{M} = \{m_p, n_p; \pi_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ beschreibt genau dann eine vollständig zerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2, wenn es rationale Zahlen $r = a/b$ und $s = c/d$ gibt, evtl. ∞ , mit ganzen Zahlen a, b, c, d und a prim zu b, c prim zu $d, ad - bc \neq 0$, so daß:

$$\mathcal{O}_p(ad - bc) \leq n_p - m_p \quad \text{für } m_p < \infty$$

und entweder $\pi_p = r^{(n_p - m_p)}$ oder $\pi_p = s^{(n_p - m_p)}$.

Es gilt dann mit den reinen Hüllen

$$G = \langle au + bv \rangle_* \oplus \langle cu + dv \rangle_* ;$$

für $\{h_p \mid p \text{ Primzahl}\} \in t(au + bv)$ und $\{k_p \mid p \text{ Primzahl}\} \in t(cu + dv)$ weiter:

$$\begin{aligned} h_p = m_p, \quad k_p = n_p \quad \text{für } \pi_p = r^{(n_p - m_p)} \quad \text{bzw.} \quad h_p = n_p, \quad k_p = m_p \\ \text{für } \pi_p = s^{(n_p - m_p)}. \end{aligned}$$

Zum Beweis nimmt man $G = \langle u', v' \mid \mathcal{M}' \rangle$ mit $\mathcal{M}' = \{m'_p, n'_p; \pi'_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ in zerlegter Form an, d. h. $\pi'_p = 0$ oder $\pi'_p = \infty$ für alle Primzahlen p , und beschreibt G bzgl. der neuen Basis

$$u := \frac{1}{ad - bc} \left(\frac{d}{x} u' - \frac{b}{z} v' \right), \quad v := \frac{1}{ad - bc} \left(-\frac{c}{x} u' + \frac{a}{z} v' \right)$$

mit rationalen Zahlen x und z ungleich 0 und ganzen Zahlen a, b, c, d wie im Satz; wobei u und v genau dann wieder in G liegen, wenn für alle Primzahlen p gilt [3; Lemma 2]:

$$m_p - \mathcal{O}_p(x), \quad n_p - \mathcal{O}_p(z) \geq \mathcal{O}_p(ad - bc).$$

Durch Variation der Parameter x, z, a, b, c, d erhält man alle Paare u, v unabhängiger Elemente von G .

Bezüglich der neuen Basen u, v von G wird G nach [3; Lemma 3] durch die im Satz angegebenen Charakteristiken \mathcal{M} beschrieben wie man rechnerisch bestätigt.

Ist $G = \langle u, v \mid \mathcal{M} \rangle$ vollständig zerlegbar, dann ist \mathcal{M} aus der zerlegten Charakteristik \mathcal{M}' bzgl. der Basis u', v' von G durch den Übergang auf die Basis u, v entstanden, eine neue Basis von G ist:

$$u'' := au' + bv' = xu, \quad v'' := cu' + dv' = zv.$$

Offensichtlich ist $G = \langle xu \rangle_* \oplus \langle zv \rangle_* = \langle u \rangle_* \oplus \langle v \rangle_*$. Also ist G bzgl. der neuen

Basis u'' , v'' direkt zerlegt. Die rechnerische Durchführung der Rücktransformation nach [3; Lemma 3] liefert die behaupteten Typen der rationalen Summanden.

Korollar. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 mit Charakteristik $\mathcal{M} = \{m_p, n_p; \pi_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ ist direkt unzerlegbar, wenn

(1) für eine Primzahl p die p -adische Zahl π_p irrational ist, insbesondere ist dann $m_p \neq n_p = \infty$;

oder

(2) $|\{\pi_p \mid p \text{ Primzahl}, \pi_p \text{ rational}, m_p \neq n_p = \infty\}| > 2$.

Wie dieses bekannte Ergebnis [2; § 88] läßt sich auch [2; 88.3] leicht aus dem Satz folgern. Die Gruppen des Korollars enthalten darüberhinaus auch keine vollständig zerlegbaren Untergruppen von endlichem Index, sind also stark unzerlegbar, vgl. [5; 10.3].

Literatur

- [1] R. A. Beaumont - R. S. Pierce: Torsion free groups of rank two, Mem. Amer. Math. Soc., no 38 (1961).
- [2] L. Fuchs: Infinite abelian groups, Academic Press, New York (1970, 1973).
- [3] O. Mutzbauer: Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 55 (1976), pp. 195–208.
- [4] O. Mutzbauer: Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 (2. Teil), Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 58 (1978).
- [5] O. Mutzbauer: Torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2, Habilitationsschrift, Würzburg (1977).
- [6] F. Richman: A class of rank-2 torsion free groups, Studies on Abelian Groups (Paris, 1968), pp. 327–333.

Anschrift des Verfassers: Mathematisches Institut der Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg, BRD.