Hans Stegbuchner

Zur metrischen Entropie der Lipschitzfunktionen mit vorgegebenen Nullstellen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 28 (1978), No. 2, 286–293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101531

Czechoslovak Mathematical Journal, 28 (103) 1978, Praha

ZUR METRISCHEN ENTROPIE DER LIPSCHITZFUNKTIONEN MIT VORGEGEBENEN NULLSTELLEN

HANS STEGBUCHNER, Salzburg

(Eingegangen am 23. April 1976)

1. EINLEITUNG

In Fragen der Approximation einer Funktionenklasse X durch ein System A von Funktionen spielt die „Weite" $d_n(A)$ der Menge A in X eine wichtige Rolle. Ist A eine kompakte Menge im Banachraum X, so gilt $\lim_{n \to \infty} d_n(A) = 0$. Die Konvergenzgeschwindigkeit von $d_n(A)$ charakterisiert die „Größe" oder „Massivität" der Menge A. Eine andere Invariante der Menge A ist die metrische Entropie (ε-Entropie); sie beschreibt ebenfalls die Massivität der Menge A, hängt jedoch viel weniger als $d_n(A)$ von der „Gestalt" der Menge A ab.

Man versteht unter der ε-Entropie $H_\varepsilon(A)$ der totalbeschränkten Teilmenge A des metrischen Raumes X den binären Logarithmus ($\operatorname{ld} x$) der Minimalzahl von Mengen mit Durchmesser nicht größer als 2ε, die A überdecken. Die ε-Kapazität $C_\varepsilon(A)$ ist definiert als der binäre Logarithmus der maximalen Anzahl von Punkten in einer ε-separierten Teilmenge von A. Zur genaueren Definition der Begriffe und den engen Zusammenhang mit der Informationstheorie sei auf [1] und [3] verwiesen.

H_ε und C_ε vieler Funktionenklassen sind bereits eingehend untersucht worden (eine umfangreiche Literaturangabe ist in [1] und [3] zu finden). Wir wollen hier eine Beschreibung der metrischen Entropie des Ideals $I(x_1, \ldots, x_N)$ im Ring $R(a, b)$ der Lipschitzfunktionen auf $[a, b]$ geben, die in den Punkten x_1 bis x_N aus $[a, b]$ Nullstellen besitzen. Zunächst wird eine Integraldarstellung von $H_\varepsilon(A)$ hergeleitet. Anschließend wird noch kurz auf die Problematik der Darstellung von $H_\varepsilon(A)$ mit Hilfe der Diskrepanz D_N^* der Punkte $x_1, \ldots, x_N$ eingegangen.

2. EINE INTEGRALDARSTELLUNG VON $H_\varepsilon(A)$

Sei $A = A_L^\Delta(x_1, \ldots, x_N)$ die Menge der Lipschitzfunktionen auf $\Delta = [a, b]$ mit Lipschitzkonstanter L, die in den Punkten $x_1, \ldots, x_N$ aus Δ Nullstellen besitzen. Wir betrachten A_L^Δ im metrischen Raum D^Δ der auf Δ stetigen Funktionen mit der uniformen Metrik.

Lemma. *Für die Menge* $A = A_L^\Delta(x_1, \ldots, x_N)$ *im metrischen Raum* D^Δ *gelten die Gleichungen*

$$H_\varepsilon(A) = \frac{L(b-a)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{ld}^+ \frac{x_{i+1}-x_i}{2\varepsilon} + O(N)\,,$$

$$C_\varepsilon(A) = \frac{2L(b-a)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{ld}^+ \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} + O(N)\,.$$

Dabei sei $\operatorname{ld}^+ x = \operatorname{ld} x$ *für* $x \geqq 1$ *und* 0 *sonst.*

Beweis. Vorerst können wir uns darauf beschränken, das Intervall $[0, c]$ mit $c = L(b-a)$ und die Konstante $L = 1$ zu Grunde zu legen (siehe [1]). Weiters wollen wir annehmen, daß die Punkte $x_1, \ldots, x_N$ der Größe nach durchnummeriert sind: $0 \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqq c$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ bel. sowie $x_0 = 0$ und $x_{N+1} = c$. Wir betrachten die Intervalle

$$\Delta^i = [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, 1, \ldots, N\,.$$

(das erste und letzte Intervall kann dabei nur aus einem Punkt bestehen). Jedes der $N-1$ Teilintervalle Δ^i $(i = 1, \ldots, N-1)$ wird nun in weitere Teilintervalle zerlegt. Sei dazu

$$\delta_i^* = \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} \quad (1 \leqq i \leqq N-1)\,.$$

Damit definieren wir die Größen δ_i wie folgt:

$$\underset{1 \leqq i \leqq N-1}{\delta_i} = \begin{cases} [\delta_i^*] + 1 & \text{wenn} \quad [\delta_i^*] \equiv 1(2)\,, \\ [\delta_i^*] + 2 & \text{wenn} \quad [\delta_i^*] \neq \delta_i^* \quad \text{und} \quad [\delta_i^*] \equiv O(2)\,, \\ \delta_i^* & \text{wenn} \quad [\delta_i^*] = \delta_i^* \quad \text{und} \quad \delta_i^* \equiv O(2)\,, \end{cases}$$

und $n_i = \delta_i/2 - 1$. Ist dann Δ^i $(1 \leqq i \leqq N-1)$ ein bel. Intervall, so teilen wir Δ^i in δ_i gleiche Teile der Länge $\eta_i = (x_{i+1} - x_i)/\delta_i$:

(1) $$\Delta_k^i = [x_i + (k-1)\,.\,\eta_i,\ x_i + k\,.\,\eta_i] \quad k = 1, 2, \ldots, \delta_i\,.$$

Auf Grund der Konstruktion von δ_i gilt $\eta_i \leqq \varepsilon$.

Ist ferner $x_{i+1} - x_i > 2\varepsilon$, so definieren wir auf dem Intervall $[x_i + \eta_i, (x_{i+1} + x_i)/2]$ Funktionen $\Phi_{i,j}^*$ und auf dem Intervall $[(x_{i+1} + x_i)/2, x_{i+1} - \eta_i]$ Funktionen $\Phi_{i,k}^{**}$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ wie folgt: Es sei $\Phi_{i,j}^*(x_i + \eta_i) = \Phi_{i,k}^{**}(x_{i+1} - \eta_i) = \eta_i$ für $i = 1, 2, \ldots, N-1$ und alle j und k (über die Anzahl j und k der Funktionen $\Phi_{i,j}^*$ bzw. $\Phi_{i,k}^{**}$ wird anschließend eine Einschränkung vorgenommen). Auf jedem der Teilintervalle Δ_k^i $(k = 2, 3, \ldots, n_i)$ sei $\Phi_{i,j}^*(t)$ linear mit Anstieg $+1$ oder -1. Wie man sofort sieht, gibt es 2^{n_i} Möglichkeiten, d. h. 2^{n_i} Funktionen $\Phi_{i,j}^*$ $(1 \leqq j \leqq 2^{n_i})$.

Die Funktionen $\Phi_{i,k}^{**}(t)$ definieren wir durch

$$\Phi_{i,k}^{**}(t) = \Phi_{i,k}^{*}(x_i + x_{i+1} - t) \quad (1 \leqq k \leqq 2^{n_i}).$$

Die Funktionen $\Phi_{i,k}^{*}(t)$ und $\Phi_{i,k}^{**}(t)$ sind somit in Bezug auf die Gerade $t = (x_{i+1} + x_i)/2$ symmetrisch.

Wir bilden nun aus den Funktionen $\Phi_{i,k}^{*}(t)$ und $\Phi_{i,r}^{**}(t)$ neue Funktionen $\Phi_{i,j}(t)$, die auf dem ganzen Intervall $[x_i + \eta_i, x_{i+1} - \eta_i]$ definiert sind, indem wir jedes $\Phi_{i,k}^{*}(t)$ so fortsetzen, daß es auf $[(x_{i+1} + x_i)/2, x_{i+1} - \eta_i]$ mit einer der Funktionen $\Phi_{i,r}^{**}(t)$ übereinstimmt und die Fortsetzung $\Phi_{i,j}(t)$ eine auf dem ganzen Intervall $[x_i + \eta_i, x_{i+1} - \eta_i]$ stetige Funktion wird:

$$\Phi_{i,j}(t) = \begin{cases} \Phi_{i,k}^{*}(t) & \text{für} \quad x_i + \eta_i \leqq t \leqq (x_{i+1} + x_i)/2\,, \\ \Phi_{i,r}^{**}(t) & \text{für} \quad (x_{i+1} + x_i)/2 \leqq t \leqq x_{i+1} - \eta_i\,, \end{cases}$$

wenn $\Phi_{i,k}^{*}(\zeta) = \Phi_{i,r}^{**}(\zeta)$ für $\zeta = (x_{i+1} + x_i)/2$.

Man überlegt sich nun sehr einfach, daß man auf diese Weise genau $\binom{2n_i}{n_i}$ verschiedene Funktionen $\Phi_{i,j}(t)$ erhält. Am einfachsten sieht man dies so ein: Auf der Geraden $t = (x_{i+1} + x_i)/2$ liegen die Endpunkte der Graphen der 2^{n_i} Funktionen $\Phi_{i,k}^{*}(t)$. Auf Grund der Konstruktion der Funktionen $\Phi_{i,k}^{*}(t)$ kommen als Endpunkte nur die Punkte $P_{i,s} = ((x_{i+1} + x_i)/2, (\delta_i/2 - 2s) \,.\, \eta_i)$, $s = 0, 1, \ldots, n_i$ in Frage. Durch Induktion kann man nun sofort nachweisen, daß im Punkt $P_{i,s}$ die Graphen von $\binom{n_i}{s}$ Funktionen $\Phi_{i,k}^{*}(t)$ enden.

Da nun die Graphen der Funktionen $\Phi_{i,k}^{**}(t)$ bezüglich der Geraden $t = (x_{i+1} + x_i)/2$ symmetrisch zu den Graphen der Funktionen $\Phi_{i,k}^{*}(t)$ liegen, sind die Punkte $P_{i,s}$ $(s = 0, 1, \ldots, n_i)$ auch gleichzeitig Anfangsunkte der Graphen von $\Phi_{i,k}^{**}(t)$ und es beginnen bei jedem Punkt $P_{i,s}$ genau $\binom{n_i}{s}$ solche Graphen. Betrachtet man nun alle möglichen stetigen Fortsetzungen $\Phi_{i,j}$ von $\Phi_{i,k}^{*}$, so gibt es von diesen

$$\sum_{s=0}^{n_i} \binom{n_i}{s}^2 = \binom{2n_i}{n_i}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Schließlich definieren wir noch Funktionen $\Phi_{0,j}(t)$ und $\Phi_{N,j}(t)$. Dazu teilen wir die Intervalle Δ^0 und Δ^N in δ_0 bzw. δ_N gleiche Teile Δ_k^0 bzw. Δ_k^N mit

$$\underset{j=0,N}{\delta_j} = \begin{cases} [\delta_j^*] + 1 & \text{wenn} \quad \delta_j^* \neq [\delta_j^*]\,, \\ \delta_j^* & \text{wenn} \quad \delta_j^* = [\delta_j^*] \end{cases}$$

und $\delta_0^* = x_1/\varepsilon$ sowie $\delta_N^* = (c - x_N)/\varepsilon$.

Ist wieder $\eta_0 = x_1/\delta_0$ und $\eta_N = (c - x_N)/\delta_N$, so können wir diese Teilintervalle ebenfalls in der Gestalt (1) darstellen. Ist nun $x_1 > \varepsilon$, so definieren wir die Funktionen

$\Phi_{0,j}(t)$ wie folgt: Es sei $\Phi_{0,j}^{*}((1 - \delta_0) \cdot \eta_0) = \eta_0$ für alle in Frage kommenden j. Auf den Intervallen $\Delta_{-k}^{0} = [-\alpha, -\beta]$ für $\Delta_k^0 = [\alpha, \beta]$ $(k = 1, 2, \ldots, \delta_0 - 1)$ sei $\Phi_{0,j}^{*}(t)$ linear mit Anstieg $+1$ oder -1. Es sei dann $\Phi_{0,j}(t) = \Phi_{0,j}^{*}(-t)$. Wie man sofort sieht, gibt es $2^{(\delta_0 - 1)}$ verschiedene Funktionen $\Phi_{0,j}(t)$.

Ist schließlich $c - x_N > \varepsilon$, so definieren wir noch die Funktionen $\Phi_{N,j}(t)$: Es sei $\Phi_{N,j}(x_N + \eta_N) = \eta_N$; auf den Intervallen Δ_k^N $(k = 2, 3, \ldots, \delta_N)$ sei $\Phi_{N,j}(t)$ linear mit Anstieg $+1$ oder -1. Wir erhalten damit $2^{(\delta_N - 1)}$ verschiedene Funktionen $\Phi_{N,j}(t)$.

Im nächsten Schritt definieren wir über den einzelnen Intervallen sogenannte Korridore als nachstehende Menge von Punkten $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ mit:

$$\begin{aligned} x_i - t \leqq u &\leqq t - x_i && \text{für} \quad t \in \Delta_1^i, \\ t - x_{i+1} \leqq u &\leqq x_{i+1} - t && \text{für} \quad t \in \Delta_{\delta_i}^i, \\ \Phi_{i,j}(t) - 2\eta_i \leqq u &\leqq \Phi_{i,j}(t) && \text{für} \quad t \in [x_i + \eta_i, x_{i+1} - \eta_i] \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, \ldots, N - 1$. Diese Punktmengen wollen wir mit K_j^i bezeichnen. Sollte $x_{i+1} - x_i \leqq 2\varepsilon$ ausfallen, so existiert über dem Intervall Δ^i nur ein Korridor K_1^i.

Insgesamt erhalten wir somit über jedem Intervall Δ^i $(1 \leqq i \leqq N - 1)$ $\binom{2n_i}{n_i}$ verschiedene Korridore.

Ist das Intervall Δ^0 nicht entartet, so sei K_j^0 die Menge aller Punkte $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} t - x_1 \leqq u &\leqq x_1 - t && \text{für} \quad t \in \Delta_{\delta_0}^0, \\ \Phi_{0,j}(t) - 2\eta_0 \leqq u &\leqq \Phi_{0,j}(t) && \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq x_1 - \eta_0. \end{aligned}$$

Besteht schließlich das Intervall Δ^N aus mehr als einem Punkt, so definieren wir K_j^N als Menge alle $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x_N - t \leqq u &\leqq t - x_N && \text{für} \quad t \in \Delta_1^N, \\ \Phi_{N,j}(t) - 2\eta_N \leqq u &\leqq \Phi_{N,j}(t) && \text{für} \quad t \in [x_N + \eta_N, c]. \end{aligned}$$

Für nicht entartete Intervalle Δ^j gibt es somit $2^{\delta_j - 1}$ $(j = 0, N)$ verschiedene Korridore.

Wir denken uns nun die einzelnen Korridore K_j^i $(0 \leqq i \leqq N)$ in den Punkten $x_1, \ldots, x_N$ in allen möglichen Kombinationen verheftet; d. h. die $2^{\delta_0 - 1}$ Korridore über Δ^0 werden mit den $\binom{2n_1}{n_1}$ Korridoren über Δ^1 verheftet. Diese werden mit den Korridoren über Δ^2 verheftet usf. Insgesamt erhalten wir damit

$$T = 2^{\delta_0 + \delta_N - 2} \prod_{j=1}^{N-1} \binom{2n_j}{n_j} \tag{2}$$

verschiedene Korridore, welche wir mit K_j $(j = 1, 2, \ldots, T)$ bezeichnen wollen. Dabei denken wir uns $\delta_k = 1$ gesetzt, wenn das Intervall Δ^k $(k = 0, N)$ aus nur einem Punkt besteht.

Wir sagen nun, daß die Funktion $f(t)$ aus A zum Korridor K_j gehört, wenn der Graph $G(f)$ von f ganz in K_j enthalten ist: $G(f) \subseteq K_j$. Die oben konstruierten T Korridore bilden dann eine ε-Überdeckung von A. Gehören nämlich die Funktionen f und g zum Korridor K_j, so gilt nach Konstruktion von K_j:

$$d(f, g) = \sup_{0 \leqq t \leqq c} |f(t) - g(t)| \leqq \max_{0 \leqq j \leqq N} 2\eta_j \leqq 2\varepsilon .$$

Es verbleibt also nur noch zu zeigen, daß jedes $f \in A$ zu mindestens einem Korridor gehört. Wie in [1] zeigt man, daß jedes $f \in A$ zu mindestens einem Korridor K_s^i über einem beliebigen Intervall Δ^i gehört. Der gesuchte Korridor wird dann durch Zusammenfügen der einzelnen Korridore K_s^i gewonnen.

Durch eine ähnliche Konstruktion kann man nun auch eine 2ε-separierte Teilmenge von A angeben, die ebenfalls aus genau T Elementen besteht (dies soll aus Platzgründen hier nicht vorgeführt werden). Ist dann $N_\varepsilon(A)$ die Minimalzahl von Elementen in einer ε-Überdeckung von A und $M_\varepsilon(A)$ die maximale Anzahl von Punkten in einer ε-separierten Teilmenge von A, so gelten die Ungleichungen

$$N_\varepsilon(A) \leqq T \leqq M_{2\varepsilon}(A) \leqq N_\varepsilon(A) \leqq M_\varepsilon(A) ,$$

woraus wir $N_\varepsilon(A) = M_{2\varepsilon}(A) = T$ bzw. $H_\varepsilon(A) = C_{2\varepsilon}(A) = \operatorname{ld} T$ erhalten.

Zur weiteren Abschätzung von (2) verwenden wir die Ungleichung 3.1.35 von [4] und erhalten

$$2n_j - \frac{1}{2} \operatorname{ld} \pi - \frac{1}{2} \operatorname{ld} n_j - \frac{72n_j + 1}{6n_j(96n_j + 1)} \operatorname{ld} e < \operatorname{ld} \binom{2n_j}{n_j},$$

bzw.

$$2n_j - \frac{1}{2} \operatorname{ld} \pi - \frac{1}{2} \operatorname{ld} n_j - \frac{144n_j - 1}{24n_j(48n_j + 1)} \operatorname{ld} e > \operatorname{ld} \binom{2n_j}{n_j}. \tag{3}$$

Setzen wir nun o.B.d.A. $n_j \geqq 2$ voraus, so erhält man auf Grund der Definition der Größen n_j und aus dem Monotonieverhalten der Funktion $2x - \frac{1}{2} \operatorname{ld} x$ aus (3) die Gleichung

$$\operatorname{ld} \binom{2n_j}{n_j} = \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \operatorname{ld} \frac{x_{j+1} - x_j}{2\varepsilon} - C_j \tag{4}$$

mit $0{,}8 < C_j < 3$ $(1 \leqq j \leqq N - 1)$. Summiert man nun (4) auf, so erhält man wegen $H_\varepsilon(A) = C_{2\varepsilon}(A)$ die Behauptung des Hilfssatzes.

Wir wollen nun zur weiteren Betrachtung der Einfachheit halber die Menge der auf [0, 1] periodischen Lipschitzfunktionen betrachten. Auf Grund der Periodizität kann man dann o.B.d.A. $x_1 = 0$ wählen.

Satz 1. *Sei A die Menge der Lipschitzfunktionen auf $[0, 1)$ mit Periode 1, die in den Punkten $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < 1 = x_{N+1}$ verschwinden. Dann gibt es* *zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $h_\varepsilon(x)$ aus A, sodaß gilt:*

$$H_\varepsilon(A) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{ld} h_\varepsilon(t)\, dt + O(N).$$

Für die „Groß-O“ Konstante M gilt dabei: $|M| \leqq 3$.

Beweis: Wir definieren die Funktion $h_\varepsilon(x)$ wie folgt:

$$\text{Sei} \quad g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - x_i}{\varepsilon}\right)^{1/s_i} & \text{für} \quad x_i \leqq x \leqq \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2} \\ \left(\dfrac{x_{i+1} - x}{\varepsilon}\right)^{1/s_i} & \text{für} \quad \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2} \leqq x \leqq x_{i+1} \end{cases}$$

mit $s_i = x_{i+1} - x_i$ und $1 \leqq i \leqq N$, sowie $h_\varepsilon(x)$ die Funktion

$$h_\varepsilon(x) = 4^{-1/\varepsilon} g_\varepsilon(x).$$

Die Funktion $h_\varepsilon(x)$ besitzt laut Definition genau in den Punkten $x_1, \ldots, x_N$ Nullstellen. Ferner gilt für $x_i \leqq x \leqq (x_{i+1} + x_i)/2$

$$|h'_\varepsilon(x)| \leqq \frac{1}{s_i}(x - x_i)^{1/s_i - 1}\left(\exp\left(\frac{1}{s_i}\log\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\log 4\right)\right)^{-1} \leqq$$
$$\leqq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/s_i - 1}\left(s_i^2 \,.\, \exp(1/s_i) \,.\, (\log 4)^{1/s_i}\right)^{-1} < 1\,.$$

Dabei haben wir o.B.d.A. $N \geqq 2$ (d. h. $1/s_i > 1$) vorausgesetzt. Auf Grund der Symmetrie der Funktion $h_\varepsilon(x)$ folgt aus letzter Abschätzung, daß $h_\varepsilon(x)$ eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstanter $L \leqq 1$ erfüllt und somit eine Funktion aus A ist. Ferner gilt

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{ld} h_\varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{2}\frac{2}{\varepsilon}\int_0^1 dt - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} 2\,.\,(\log 2)^{-1}\int_{x_i}^{r_i}\log\left(\frac{t - x_i}{\varepsilon}\right)^{1/s_i} dt =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{ld}\frac{x_{i+1} - x_i}{2\varepsilon} + \frac{N}{2}(\log 2)^{-1}$$

mit $r_i = (x_{i+1} + x_i)/2$. Eine Anwendung des oben bewiesenen Hilfssatzes liefert nun die Behauptung des Satzes.

3. DISKREPANZ UND ENTROPIE

Wie im letzten Satz zum Ausdruck kommt, hängt die metrische Entropie der Menge $A(x_1, \ldots, x_N)$ von der Lage der Nullstellen ab. Es wäre daher wünschenswert, die Entropie $H_\varepsilon(A)$ in Abhängigkeit von der Diskrepanz D_N^* der Punkte $x_1, \ldots, x_N$

zum Ausdruck zu bringen, ohne dabei das Fehlerglied wesentlich zu vergrößern. Dies dürfte jedoch mit größeren Schwierigkeiten verbunden sein, wie nachstehendes Beispiel vermuten läßt.

Sei dazu $N = 2n$ und

$$x_{2j-1} = \frac{j-1}{n}, \quad x_{2j} = \frac{j-1}{n} + \frac{1}{n^2} \quad 1 \leqq j \leqq n, \quad \text{sowie}$$

$$y_j = \frac{j-1}{n^2} \quad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq n+1 \quad \text{und} \quad y_{n+j} = \frac{j}{n} - \frac{j-1}{n^2} \quad \text{für} \quad 1 < j \leqq n.$$

Nach der Formel

$$D_N^*(x_1, \ldots, x_N) = \max_{1 \leqq j \leqq N} \max\left(\left|x_j - \frac{j}{N}\right|, \left|x_j - \frac{j-1}{N}\right|\right)$$

für die Diskrepanz der Punkte $x_1, \ldots, x_N$ (siehe [2]), erhält man nach kurzer Rechnung

$$D_N^*(x_1, \ldots, x_N) = \frac{N-1}{N^2} \quad \text{bzw.} \quad D_N^*(y_1, \ldots, y_N) = \frac{N-1}{2N}.$$

Während die Folge $\{x_n\}$ gleichverteilt ist, d. h. $\lim\limits_{N \to \infty} D_N^* = 0$ gilt, strebt die Diskrepanz der Folge $\{y_n\}$ gegen $\frac{1}{2}$. Dennoch besitzen die Mengen $A(x_1, \ldots, x_N)$ und $A(y_1, \ldots, y_N)$ im wesentlichen die gleiche metrische Entropie, da die Produkte $\Pi(x_{i+1} - x_i)$ und $\Pi(y_{i+1} - y_i)$ übereinstimmen, was man sofort nachrechnet.

Es kann nur eine Abschätzung in der einen Richtung angegeben werden, die durch die Definition von D_N^* nahegelegt wird, die jedoch nicht zufriedenstellend ist:

Satz 2. *Für die metrische Entropie der Menge $A(x_1, \ldots, x_N)$ gilt*

$$H_\varepsilon(A) \geqq \frac{1}{\varepsilon} - \frac{N}{2} \operatorname{ld} \frac{D_N^*}{\varepsilon} + O(N).$$

Gleichheit gilt dabei genau für die Folge $x_j = (2j-1)/2N$ $(1 \leqq j \leqq N)$.

Beweis.

$$|x_{j+1} - x_j| \leqq \left|x_{j+1} - \frac{j}{N}\right| + \left|x_j - \frac{j}{N}\right| \leqq$$

$$\leqq \max\left(\left|x_{j+1} - \frac{j}{N}\right|, \left|x_{j+1} - \frac{j+1}{N}\right|\right) + \max\left(\left|x_j - \frac{j}{N}\right|, \left|x_j - \frac{j-1}{N}\right|\right) \leqq$$

$$\leqq 2D_N^*(x_1, \ldots, x_N).$$

Die Diskrepanz der Folge $x_j = (2j-1)/2N$ beträgt $1/2N$ und $D_N^* > 1/2N$ für jede davon verschiedene Folge ([2]), d. h. es gilt die Ungleichung

$$\frac{N}{2} \operatorname{ld} \frac{D_N^*}{\varepsilon} \geqq \frac{N}{2} \operatorname{ld} \frac{1}{2N\varepsilon} .$$

Die geometrisch-arithmetische Ungleichung liefert auf der anderen Seite die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{ld} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2\varepsilon} \right) \leqq \frac{N}{2} \operatorname{ld} \frac{1}{2N\varepsilon} ,$$

wobei Gleichheit nur für $x_{j+1} - x_j = 1/N$ $(1 \leqq j \leqq N)$ angenommen wird. Eine Anwendung des Hilfssatzes aus Abschnitt 2 liefert die Behauptung.

In einem Spezialfall kann die metrische Entropie mit Hilfe der Diskrepanzen D_N^* ausgedrückt werden:

Satz 3. *Sei* $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < 1$ *mit* $x_{j+1} - x_j \geqq x_j - x_{j-1}$ *für* $2 \leqq \leqq j \leqq N$. *Wird mit* D_k^* *die Diskrepanz der Punkte* $x_1, \ldots, x_k$ $(1 \leqq k \leqq N)$ *bezeichnet und* $D_{N+1}^* = 0$ *gesetzt, so gilt*:

$$H_\varepsilon(A) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{ld} \frac{D_j^* - D_{j+1}^*}{2\varepsilon} + O(N) .$$

Beweis. Wie man sich sofort überlegt, gilt in diesem Fall stets $D_N^* = 1 - x_N$. Da jede Teilfolge $x_1, \ldots, x_k$ ebenfalls die geforderten Eigenschaften besitzt, gilt $D_k^* = 1 - x_k$. Das Lemma aus Abschnitt 2 liefert daher wieder die Behauptung.

Literatur

[1] *Kolmogorov, A. N.*, and *V. M. Tihomirov:* ε-Entropy and ε-Capacity of sets in functional spaces. Transl. A.M.S. II *17*, 227—364 (1961).

[2] *Kuipers, L.*, and *H. Niederreiter:* Uniform Distribution of Sequences. Wiley, New York. 1974.

[3] *Lorentz, G. G.:* Approximation of Functions. Holt, Rinehart and Winston, New York. 1966.

[4] *Mitrinović, D. S.:* Analytic Inequalities. Grundl. Math. Wiss. 165, Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1970.

Anschrift des Verfassers: Mathematisches Institut der Universität, Petersbrunnstraße 19, A-5020 Salzburg, Austria.