Jaroslav Bayer

Die Projektivabwicklung zweiter und dritter Ordnung von Ebenenkongruenzen im achtdimensionalen projektiven Raum

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 3, 434–451

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101480`

Czechoslovak Mathematical Journal, 27 (102) 1977, Praha

DIE PROJEKTIVABWICKLUNG ZWEITER UND DRITTER ORDNUNG VON EBENENKONGRUENZEN IM ACHTDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

JAROSLAV BAYER, Brno
(Eingegangen am 16. Juni 1975)

In der Arbeit [5] haben wir im Rahmen der Untersuchungen der Projektivabwicklung zweiter Ordnung von Ebenenkongruenzen im P_n bewiesen, dass bereits für jedes $n \geqq 8$ eine stetsgleichartige Situation auftritt. Aus diesem Grund werden wir in der vorliegenden Arbeit die Projektivabwicklung zweiter und dritter Ordnung von Ebenenkongruenzen nur im P_8 betrachten.

Das begleitende Bezugssystem werden wir in eine für unsere Zwecke geeignete Gestalt bringen um die Abhängigkeitsstufen für die Existenz der Ebenenkongruenzen im P_8 herzuleiten.

Nach der Definition der abwickelbaren Korrespondenz zwischen Ebenenkongruenzen L und $\hat{L}$ führen wir zum gegebenen projektiven Raum P_8 den dualen projektiven Raum P_8^* ein und der Ebenenkongruenz L ordnen wir die duale Ebenenkongruenz L^* – genannt Dualisation von L zu. Wir werden die Schemata gebrauchen, nach welchen die Ergebnisse auf die dualen Fälle schon nur routinerweise gebracht werden können.

In Anlehnung an die Arbeiten [1], [3], [4] benützen wir den Kalkül der äusseren Differentialformen nach E. CARTAN, was sich für rasche Gewinnung der Resultate als besonders günstig erweist.

§ 1. Unter dem begleitenden Bezugssystem R_8 des achtdimensionalen projektiven Raumes verstehen wir jedes 9-Tupel $(A_1A_2A_3 \ldots A_9)$, wo $A_1, A_2, \ldots, A_9$ unabhängige Punkte sind.

Infinitesimale Bewegung des Bezugssystems sei durch

$$(1,1) \qquad \mathrm{d}A_u = \sum_v \omega_u^v A_v \,, \quad \mathrm{d}\omega_u^v = \sum_m \omega_u^m \wedge \omega_m^v$$

gegeben mit $[A_1A_2 \ldots A_9] = 1$ und $\sum_u \omega_u^u = 0$, wobei in diesen sowie auch in folgenden Formeln die nachstehende Kennzeichnung der Indizes verwendet wird: $m, u, v = 1, 2, \ldots, 9$; $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $M, N, P = 4, 5, \ldots, 9$.

Bei der Untersuchung der Projektivabwicklung von Ebenenkongruenzen L, $\hat{L}$ (die erzeugenden Ebenen seien mit $\sigma(u, v)$, $\hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{v})$ bezeichnet werden) in P_8, $\hat{P}_8$ beschränken wir uns nur auf solche, deren Tangentialräume längst jeder beliebigen erzeugenden Ebene 5-dimensional sind. Wir werden voraussetzen, dass jede der betrachteten Ebenenkongruenzen L, $\hat{L}$ drei nichtausgeartete Brennflächen besitzt. Zu jeder erzeugenden Ebene σ von L ordnen wir das begleitende Bezugssystem so zu, dass $\sigma \equiv \equiv [A_1A_2A_3]$.

Nach (1,1) ist

$$(1,2) \qquad d[A_1A_2A_3] = \sum_i \omega_i^i [A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_1^M [A_M A_2 A_3] + \sum_M \omega_2^M [A_1 A_M A_3] + \\ + \sum_M \omega_3^M [A_1 A_2 A_M] .$$

Der Kürze halber werden die *Grassmann-Produkte* $[A_1A_2A_3]$ nur als $[\mathbf{A}]$ bezeichnet; falls wir in $[\mathbf{A}]$ nur einen einziegen Punkt A_i mit dem Punkte A_M ersetzen, dann verwenden wir die Bezeichnung $[\mathbf{A}_M^i]$; wenn wir in $[\mathbf{A}]$ die Punkte A_i, A_j, durch A_M, A_N, bzw. die Punkte A_i, A_j, A_k bzw. durch die Punkte A_M, A_N, A_P ersetzen, dann verwenden wir die Bezeichnung $[\mathbf{A}_{M,N}^{i,j}]$, bzw. $[\mathbf{A}_{M,N,P}^{i,j,k}]$ für $i \neq j \neq k \neq i$; $M \neq N \neq \neq P \neq M$. Dies wird beständig im folgenden benützt so dass die Formel (1,2) folgende Gestalt annimmt:

$$d[\mathbf{A}] = \sum_i \omega_i^i [\mathbf{A}] + \sum_i \omega_i^M [\mathbf{A}_M^i] .$$

Hieraus folgt $\delta[\mathbf{A}] = \sum_i e_i^i [\mathbf{A}]$, (wo δ üblicherweise die Differentation bezeichnet, welche nur auf die sekundären Parameter bezogen ist) und $e_u^v = \omega_u^v(\delta)$.

Die Formen ω_i^{j+3} ω_i^{j+6} sind also die Hauptformen von L.

Im weiteren werden wir voraussetzen, dass die beiden nichtverschwindenden Formen $\omega_1^4 \equiv \omega_1$, $\omega_2^5 \equiv \omega_2$ linear unabhängig sind und der Vereinfachung halber setzen wir

$$(1,3) \qquad \omega_3 = \omega_1 + r\omega_2 \quad (r \neq 0, \infty) .$$

Nun wählen wir das bewegliche Bezugssystem in solcher Weise, dass die Punkte A_1, A_2, A_3 mit den Brennpunkten zusammenfallen, welche durch die Brennrichtung $\omega_i = 0$ bestimmt sind.

Diese Wahl ist durch

$$(1,4) \qquad [A_1A_2A_3 \, dA_i]_{\omega_i = 0} = 0 ,$$

gekennzeichnet, woraus nach (1,1)

$$(1,5) \qquad \omega_i \wedge \omega_i^{j+3} = 0 \ (i \neq j) , \quad \omega_i \wedge \omega_i^{k+6} = 0$$

folgt.

Die Anwendung des Cartanschen Lemmas ergibt

$$\omega_i^{j+3} = c_i^{j+3}\omega_i \ (i \neq j) , \quad \omega_i^{k+6} = c_i^{k+6}\omega_i . \tag{1,6}$$

Indem wir (1,6) in (1,1) einsetzen, so folgt aus den ersten drei Gleichungen, das die Tangentialebene der Brennfläche (A_i) im Berührungspunkt A_i, im Raume

$$\left(A_1, A_2, A_3, \sum_{I=1}^{6} c_i^{I+3} A_{I+3}\right) \quad (c_1^4 = c_2^5 = 1) \tag{1,7}$$

liegt.

Das bewegliche Bezugssystem wählen wir weiter so, dass der oben eingeführte Tangentialraum die Punkte A_1, A_2, A_3, A_{i+3} enthält.

Dann ist $c_i^{j+3} = 0 \ (i \neq j)$, $c_i^{k+6} = 0$ und daraus folgt wegen (1,6)

$$\omega_i^{j+3} = 0 \ (i \neq j) , \tag{1,8}$$

$$\omega_i^{k+6} = 0 . \tag{1,9}$$

Gemäss (1,6) ist insbesondere

$$\omega_3^6 = c_3^6\omega_3 \equiv c_3^6(\omega_1 + r\omega_2) .$$

Wir bilden die äusseren Ableitungen und erhalten

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}c_3^6 + c_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}(c_3^6 r) + c_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0$$

und ohne Begrenzung der Allgemeinheit wählen wir $c_3^6 = 1$.

Dann ist $\omega_3^6 = \omega_1 + r\omega_2$ und r ist eine relative Invariante der Ebenenkongruenz L. Als Folgerung aus den vorstehenden Beziehungen erhalten wir

$$\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4 = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 ,$$
$$\mathrm{d}r + r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5) = h_2\omega_1 + h_3\omega_2 .$$

Jede zwei von den drei Hauptformen ω_i sind linear unabhängig und ihre äussere Differentiale sind

$$\mathrm{d}\omega_i = \omega_i \wedge (\omega_{i+3}^{i+3} - \omega_i^i) . \tag{1,10}$$

Erneute äussere Differentiation (1,9) und das Cartansche Lemma ergibt

$$\omega_{i+3}^{k+6} = \gamma_i^{k+3}\omega_i , \tag{1,11}$$

mit den Integrabilitätsbedingungen

$$\omega_i \wedge \{\mathrm{d}\gamma_i^{k+3} + \gamma_i^{k+3}(\omega_i^i - 2\omega_{i+3}^{i+3} + \omega_{k+6}^{k+6}) + \sum_j \gamma_i^{j+3}\omega_{j+6}^{i+6}\} -$$
$$- \sum_j \omega_j \wedge \gamma_j^{k+3}\omega_{i+3}^{j+3} = 0 \quad (i \neq j) . \tag{1,12}$$

Aus (1,12) sehen wir, dass man durch eine geeignete Wahl des Bezugssystems erreichen kann, dass

(1,13) $$\gamma_i^{k+3} = 0 \quad (i \neq k)\,.$$

Dann sind γ_i^{i+3} relative Invarianten, welche mit Rücksicht zu den angegebenen Annahmen sämtlich von Null verschieden sind. Also kann man wählen

(1,14) $$\gamma_i^{i+3} = 1\,,$$

woraus folgt

(1,15) $$2\omega_{i+3}^{i+3} - \omega_i^i - \omega_{i+6}^{i+3} = g_i\omega_i\,.$$

Setzt man (1,13), (1,14) in (1,11) ein, so bekommt man

(1,16) $$\omega_{i+6}^{i+6} = \omega_i\,,$$

(1,17) $$\omega_{i+3}^{j+6} = 0 \quad (i \neq j)\,.$$

Durch Differentiation von (1,8) und (1,17), erhalten wir

$$\omega_i \wedge \omega_{i+3}^{j+3} - \omega_j \wedge \omega_i^j = 0 \qquad (i \neq j)\,,$$

$$\omega_i \wedge \omega_{i+6}^{j+6} - \omega_j \wedge \omega_{i+3}^{j+3} = 0 \quad (i \neq j)$$

und die Anwendung des Lemmas von Cartan ergibt

(1,18) $$\begin{aligned} \omega_i^j &= a_i^j\omega_i + \alpha_i^j\omega_j \quad (i \neq j)\,,\\ \omega_{i+3}^{j+3} &= b_i^j\omega_i - a_i^j\omega_j \quad (i \neq j)\,,\\ \omega_{i+6}^{j+6} &= \beta_i^j\omega_i - b_i^j\omega_j \quad (i \neq j)\,, \end{aligned}$$

wobei die Integrabilitätsbedingungen wegen (1,15)

(1,19) $$\begin{gathered} \omega_i \wedge \{\mathrm{d}a_i^j + a_i^j(\omega_j^j - \omega_{j+3}^{j+3}) + \omega_{i+3}^j + a_i^k a_k^j\omega_k\} + \\ + \omega_j \wedge \{\mathrm{d}\alpha_i^j + \alpha_i^j(2\omega_j^j - \omega_{j+3}^{j+3} - \omega_i^i) - \alpha_i^k\alpha_k^j\omega_k + \alpha_k^j a_i^k\omega_i\} = 0 \\ (i \neq j;\ k \neq i, j)\,, \\ \omega_i \wedge \{\mathrm{d}b_i^j + b_i^j(\omega_{j+3}^{j+3} - \omega_{i+6}^{i+6}) + \omega_{i+6}^{j+3} + b_i^k b_k^j\omega_k\} - \\ - \omega_j \wedge \{\mathrm{d}a_i^j + a_i^j(\omega_j^j - \omega_{i+3}^{i+3}) + \omega_{i+3}^j + a_i^k a_k^j\omega_k\} - \omega_i \wedge a_k^j b_i^k\omega_j = 0 \\ (i \neq j;\ k \neq i, j)\,, \\ \omega_i \wedge \{\mathrm{d}\beta_i^j + \beta_i^j(\omega_i^i - \omega_{i+3}^{i+3} - \omega_{i+6}^{i+6} + \omega_{j+6}^{j+6}) + \beta_i^k\beta_k^j\omega - \beta_i^k b_k^j\omega_j\} - \\ - \omega_j \wedge \{\mathrm{d}b_i^j + b_i^j(\omega_{j+3}^{j+3} - \omega_{i+6}^{i+6}) + \omega_{i+6}^{j+3} + b_i^k b_k^j\omega_k\} = 0 \\ (i \neq j;\ k \neq i, j) \end{gathered}$$

sind.

Aus diesem Gleichungssystem geht hervor, dass die Wahl

$$a_i^j = b_i^j = 0 \quad (i \neq j), \tag{1,20}$$

möglich ist, so dass α_i^j, β_i^j $(i \neq j)$ relative Invarianten von L sind.

Setzt man (1,20) in (1,18) ein und bildet man die äusseren Ableitungen der Gleichungen $(1,18_2)$, so erhält man

$$\omega_i \wedge \omega_{i+6}^{j+3} - \omega_j \wedge \omega_{i+3}^j = 0 \quad (i \neq j). \tag{1,21}$$

Das Lemma von Cartan ergibt

$$\begin{aligned} \omega_{i+3}^j &= -v_i^j\omega_i + a_i^j\omega_j \quad (i \neq j), \\ \omega_{i+6}^{j+3} &= b_i^j\omega_i + v_i^j\omega_j \quad (i \neq j). \end{aligned} \tag{1,22}$$

Erneute äussere Differentiation von (1,22) führt wegen (1,15) zu

$$\begin{gathered} \omega_j \wedge \{\mathrm{d}a_i^j + a_i^j(2\omega_j^j - \omega_{j+3}^{j+3} - \omega_{i+3}^{i+3}) - \alpha_i^j\omega_{i+3}^i + \alpha_i^j a_i^k\omega_k + \alpha_k^j v_i^k\omega_i\} - \\ - \omega_i \wedge \{\mathrm{d}v_i^j + v_i^j(\omega_j^j - \omega_{i+6}^{i+6}) - \omega_{i+6}^j\} = 0 \\ (i \neq j;\ k \neq i, j), \end{gathered} \tag{1,23}$$

$$\begin{gathered} \omega_i \wedge \{\mathrm{d}b_i^j + b_i^j(\omega_i^i - \omega_{i+3}^{i+3} + \omega_{j+3}^{j+3} - \omega_{i+6}^{i+6}) + \beta_i^j\omega_{j+6}^{j+3} + \beta_i^k b_k^j\omega_k + \beta_i^k v_k^j\omega_j\} + \\ + \omega_j \wedge \{\mathrm{d}v_i^j + v_i^j(\omega_j^j - \omega_{i+6}^{i+6}) - \omega_{i+6}^j\} = 0 \quad (i \neq j;\ k \neq i, j). \end{gathered}$$

Im weiteren werden wir für $l, i \in \{1, 2, 3\}$ l', i' und l'', i'' folgenderweise definieren: $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 1$, $1'' = 3$, $2'' = 1$, $3'' = 2$.

Aus (1,23) sieht man, dass man weiter durch geeignete Wahl des Bezugssystems erreichen kann, dass

$$a_l^{l'} = 0, \quad b_{l'}^l = 0 \tag{1,24}$$

ist, das heisst $a_1^2 = a_2^3 = a_3^1 = 0$, $b_1^3 = b_2^1 = b_3^2 = 0$, $v_i^j = 0$ $(i \neq j)$, so dass a_1^3, a_2^1, a_3^2, b_1^2, b_2^3, b_3^1 relative Invarianten sind.

Setzt man (1,24) in (1,22) ein, erhält man die Formeln, welche gemeinsam mit (1,16), (1,17), (1,18), (1,21), (1,18), (1,9) und (1,3) das Differentialsystem von L in folgende Gestalt bringen:

(1,25)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_i &= \omega_i^i A_i + \sum_j \alpha_i^j\omega_j A_j + \omega_i A_{i+3}, \\ \mathrm{d}A_{i+3} &= \omega_{i+3}^i A_i + a_i^{i''}\omega_{i''}A_{i''} + \omega_{i+3}^{i+3}A_{i+3} + \omega_i A_{i+6}, \\ \mathrm{d}A_{i+6} &= \sum_k \omega_{i+6}^k A_k + \omega_{i+6}^{i+3}A_{i+3} + b_i^{i'}\omega_i A_{i'+3} + \omega_{i+6}^{i+6}A_{i+6} + \sum_j \beta_i^j\omega_i A_{j+6}, \\ &\qquad (i \neq j). \end{aligned}$$

Die Ebenenkongruenz L ist jetzt durch das geschlossene Gleichungssystem ausgedrückt:

$$
(1,26)\qquad
\begin{gathered}
\omega_i^{i+6} = 0\,,\\
\omega_i^{i+3} = \omega_i\,, \quad \omega_i^{j+3} = 0\ (i \neq j)\,, \quad \omega_{i+3}^{i+6} = \omega_i\,,\\
\omega_{i+3}^{j+6} = 0\ (i \neq j)\,,\\
\omega_i^j = \alpha_i^j \omega_j\ (i \neq j)\,, \quad \omega_{i+3}^{j+3} = 0\ (i \neq j)\,, \quad \omega_{i+6}^{j+6} = \beta_i^j \omega_i\ (i \neq j)\,,\\
\omega_{l'+3}^{l} = a_{l'}^{l} \omega_l\,, \quad \omega_{l+6}^{l'+3} = b_l^{l'} \omega_l\,,\\
\omega_{l+3}^{l'} = 0\,, \qquad \omega_{l'+6}^{l+3} = 0\,,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_l \wedge \{\mathrm{d}\alpha_{l'}^{l} + \alpha_{l'}^{l}(2\omega_l^l - \omega_{l'}^{l'} - \omega_{l+3}^{l+3}) + \alpha_{l'}^{l''}\alpha_{l''}^{l}\omega_{l''} + a_{l'}^{l}\omega_{l'}\} = 0\,,\\
&\omega_{l'} \wedge \{\mathrm{d}\alpha_l^{l'} + \alpha_l^{l'}(2\omega_{l'}^{l'} - \omega_l^l - \omega_{l'+3}^{l'+3}) + \alpha_l^{l''}\alpha_{l''}^{l'}\omega_{l''}\} = 0\,,\\
&\omega_l \wedge \{\mathrm{d}\beta_l^{l'} + \beta_l^{l'}(\omega_l^l + \omega_{l'+6}^{l'+6} - \omega_{l+3}^{l+3} - \omega_{l+6}^{l+6}) + \beta_l^{l''}\beta_{l''}^{l'}\omega_{l''} + b_l^{l'}\omega_{l'}\} = 0\,,\\
&\omega_{l'} \wedge \{\mathrm{d}\beta_{l'}^{l} + \beta_{l'}^{l}(\omega_{l'}^{l'} + \omega_{l+6}^{l+6} - \omega_{l'+3}^{l'+3} - \omega_{l'+6}^{l'+6}) + \beta_{l'}^{l''}\beta_{l''}^{l}\omega_{l''}\} = 0\,,\\
&\omega_l \wedge \{\mathrm{d}a_{l'}^{l} + a_{l'}^{l}(2\omega_l^l - \omega_{l+3}^{l+3} - \omega_{l'+3}^{l'+3}) - \alpha_{l'}^{l}\omega_{l'+6}^{l'}\} + \omega_{l'} \wedge \omega_{l'+6}^{l} = 0\,,\\
&\omega_l \wedge \{\mathrm{d}b_l^{l'} + b_l^{l'}(\omega_l^l + \omega_{l'+3}^{l'+3} - \omega_{l+3}^{l+3} - \omega_{l+6}^{l+6}) + \beta_l^{l'}\omega_{l'+6}^{l'+3}\} - \omega_{l'} \wedge \omega_{l+6}^{l'} = 0\,,\\
&\omega_i \wedge \{2\omega_{i+3}^{i+3} - \omega_i^i - \omega_{i+6}^{i+6}\} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \{\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4\} + \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}r + r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0\,,\\
&\omega_l \wedge \omega_{l+6}^{l'} - \omega_{l'} \wedge \alpha_l^{l'}\omega_{l+3} + \omega_{l''} \wedge \alpha_{l''}^{l'}a_l^{l''}\omega_{l'} = 0\,,\\
&\omega_l \wedge \omega_{l'+6}^{l} - \omega_{l'} \wedge \{\beta_{l'}^{l}\omega_{l+6}^{l+3} + \beta_{l'}^{l''}b_{l''}^{l}\omega_{l''}\} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des Cartanschen Lemmas gelangen wir zu neuen Hauptformen mit $N = 42$ unabhängigen Koeffizienten. Weil die Zahl der unabhängigen Hauptformen $q = 35$ und die Zahl der unabhängigen quadratischen Gleichungen $s_1 = 28$ ist, haben wir $s_2 = 7$ und die Cartansche Zahl Q ist somit gleich 42. Deswegen ist das betrachtete System involutiv. So kann man nun folgenden Satz aussprechen:

Satz 1.1. *Die Existenz der Ebenenkongruenzen L im P_8 hängt von sieben willkürlichen Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher ab.*

§ 2. Sei eine Kongruenz L mit der erzeugenden Ebene $\sigma = \sigma(u, v)$ im P_8 durch das geschlossene Gleichungssystem (1,25) gegeben, das schon zu dem früher eingeführten spezializierten Bezugssystem R gehört. Ausser L betrachten wir noch eine weitere Kongruenz $\hat{L}$ mit der erzeugenden Ebene $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{v})$ im $\hat{P}_8$ mit ähnlich spezializiertem Bezugssystem $\hat{R}$, das von den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_9$ gebildet ist. Die Pfaffschen Formen, die relativen Invarianten und sämtliche zu $\hat{L}$ gehörende Beziehungen werden wir mit oberen Wellensymbolen bezeichnet.

Nehmen wir an, dass die Ebenenkongruenz $\hat{L}\widehat{(1{,}25)}$ derselben Gestalt ist wie L $\widehat{(1{,}25)}$ und dass sie durch das geschlossene Gleichungssystem $\widehat{(1{,}25)}$ beschrieben ist.

Im weiteren sei stets

$$\hat{\omega}_u^v = \omega_u^v + \tau_u^v . \tag{2,1}$$

Sei ferner $C : L \to \hat{L}$ eine nichtausgeartete Korrespondenz, die jeder erzeugenden Ebene $\sigma(u, v)$ von L die erzeugende Ebene $\hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{v})$ von $\hat{L}$ zuordnet und diese Korrespondenz sei durch die Gleichungen $\hat{u} = \hat{u}(u, v)$, $\hat{v} = \hat{v}(u, v)$ bestimmt.

Die Gleichungen der Korrespondenz C bringen wir in die Gestalt

$$\hat{\omega}_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 , \quad \hat{\omega}_2 = a_3\omega_1 + a_4\omega_2 \quad (a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0) ,$$

daraus folgt schon

$$\hat{\omega}_3 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \hat{r}(a_3\omega_1 + a_4\omega_2) .$$

Wir werden uns nur für solche Korrespondenzen $C : L \to \hat{L}$ interessieren, für welche gilt

$$a_2 = a_3 = 0 , \quad a_1 = a_4 = 1 , \quad r = \hat{r} .$$

Diese Korrespondenzen sollen als abwickelbar bezeichnet werden. Sie sind durch die Gleichungen

$$\hat{\omega}_i = \omega_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2,2}$$

oder

$$\tau_i^{i+3} = \tau_{i+3}^{i+6} = 0$$

bestimmt.

Hieraus erhalten wir durch Differentiation und mit Hilfe des Cartanschen Lemmas

$$\tau_{i+3}^{i+3} - \tau_i^i = f_i\omega_i , \quad \tau_{i+6}^{i+6} - \tau_{i+3}^{i+3} = f_{i+3}\omega_i . \tag{2,3}$$

Sei P_8^* der projektive Raum, der dual zum P_8 ist. Die Punkte des Raumes P_8^* sind also Hyperebenen des Raumes P_8. Zum Bezugssystem $R = (A_1, A_2, \ldots, A_9)$, ordnen wir das duale Bezugssystem $R^* = (E^1, E^2, \ldots, E^9)$ so zu, dass

$$E^m := (-1)^{m+1}[A_1A_2 \ldots A_{m-1}A_{m+1} \ldots A_9] \quad (m = 1, 2, \ldots, 9)$$

linear unabhängige arithmetische Hyperebenen sind.

Daraus folgt nach (1,1)

$$\mathrm{d}E^m = -\sum_u \omega_u^m E^u . \tag{2,4}$$

Dem Tangentialraum $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ der Ebenenkongruenz L längs der erzeugenden Ebene σ ist im dualen Raum P_8^* die Ebene $\sigma^* = (E^7E^8E^9)$ zugeordnet. Dabei ist σ^* die erzeugende Ebene einer Kongruenz L^*, Dualisation von L genannt.

Wenn wir die Ebenenkongruenz L so orientieren, dass A_1 erster, A_2 zweiter und A_3 dritter Brennpunkt ist, dann wird E^7 erster, E^8 zweiter und E^9 dritter Brennpunkt von L^*.

Hieraus bekommen wir mit Anwendung (2,4), (1,25) das Differentialgleichungssystem von L^*:

$$
\begin{aligned}
(2,5)\qquad \mathrm{d}E^{i+6} &= -\omega_{i+6}^{i+6}E^{i+6} - \sum_j \beta_j^i \omega_j E^{j+6} - \omega_i E^{i+3} \\
\mathrm{d}E^{i+3} &= -\omega_{i+6}^{i+3}E^{i+6} - b_{i'}^i \omega_{i'} E^{i''+3} - \omega_{i+3}^{i+3}E^{i+3} - \omega_i E^i \\
\mathrm{d}E^i &= -\sum_k \omega_{k+6}^i E^{k+6} - \omega_{i+3}^i E^{i+3} - a_{i'}^i \omega_i E^{i'+3} - \omega_i^i E^i - \sum_j \alpha_j^i \omega_i E^j \\
&\qquad (i \neq j)\,.
\end{aligned}
$$

Das duale Bezugssystem R^* bezüglich L^* ist auf völlig ähnliche Art zugeordnet, wie R bezüglich L.

Die Vergleichung von (1,25) und (2,5) ergibt leicht, dass der Übergang von L zu L^* nach der Schemata

$$
(2,6)\qquad \boxed{\begin{array}{l|l} \begin{array}{lll} L & : A_m & \omega_v^u \\ \downarrow L^* & : E^{m^*} & -\omega_{v^*}^{u^*} \end{array} & \begin{array}{llll} m: & 1\,2\,3 & 4\,5\,6 & 7\,8\,9 \\ \downarrow m^*: & 7\,8\,9 & 4\,5\,6 & 1\,2\,3 \end{array} \end{array}}
$$

$$
(2,7)\qquad \boxed{\begin{array}{c} \begin{array}{l|l} \begin{array}{ll} L & : \omega_i \\ \downarrow L^* & : -\omega_i \end{array} & \begin{array}{llll} \alpha_i^j & \beta_i^j & a_{l'}^l & b_l^{l'} \\ \downarrow \beta_j^i & \alpha_j^i & b_l^{l'} & a_{l'}^l \end{array} \end{array} \\ (i \neq j) \end{array}}
$$

realisierbar ist.

Der Übergang von der abwickelbaren Korrespondenz $C : L \to \hat{L}$ zur induzierten abwickelbaren Korrespondenz $C^* : L^* \to \hat{L}^*$, ist nach dem Schema

$$
(2,8)\qquad \boxed{\begin{array}{llllll} C & :q_u & c_u^v & f_i & m_i^j & n_i^j \\ \downarrow C^* & :q^*{}_u & c^*{}_{u^*}^{v^*} & -f_{i+3} & -n_j^i & -m_j^i \end{array}}
$$

realisierbar, wobei wir die Ausdrücke m_i^j und n_i^j erst später beschreiben werden.

Die gefundenen Schemata (2,6), (2,7) und (2,8) überführen die vorigen Ergebnisse sofort auf die dualen Fälle, ob es sich um Kongruenzen oder um ihre abwickelbare Korrespondenzen handelt.

§ 3. Sei eine Ebenenkongruenz L im P_8 durch die Gleichungen (1,25) und eine Ebenenkongruenz $\hat{L}$ im $\hat{P}_8$ durch die Gleichungen $\widehat{(1,25)}$ gegeben.

Sei ferner $C : L \to \hat{L}$ eine abwickelbare Korrespondenz zwischen L und $\hat{L}$, die durch die Gleichungen (2,2) bestimmt ist.

Man nennt C eine *Projektivabwicklung k-ter* $(k = 1, 2, 3)$ *Ordnung*, wenn zu jedem Paar sich entsprechender Ebenen $\sigma \in L$, $\hat{\sigma} \in \hat{L}$, eine solche nichtgeausartete Kollineation $K : P_8 \to \hat{P}_8$ existiert, dass KL und $\hat{L}$ die analytische Berührung *k-ter* Ordnung längs $\hat{\sigma} = K\sigma = C\sigma$ haben.

Diese Forderungen sind im Falle $k = 3$ folgendermassen ausgedrückt

$$K[\mathbf{A}] = [\hat{\mathbf{A}}] \tag{3,1}$$

$$K\,\mathrm{d}[\mathbf{A}] = \mathrm{d}[\hat{\mathbf{A}}] + \vartheta_1[\hat{\mathbf{A}}] \tag{3,2}$$

$$K\,\mathrm{d}^2[\mathbf{A}] = \mathrm{d}^2[\hat{\mathbf{A}}] + 2\vartheta_1\,\mathrm{d}[\hat{\mathbf{A}}] + \vartheta_2[\hat{\mathbf{A}}] \tag{3,3}$$

$$K\,\mathrm{d}^3[\mathbf{A}] = \mathrm{d}^3[\hat{\mathbf{A}}] + 3\vartheta_1\,\mathrm{d}^2[\hat{\mathbf{A}}] + 3\vartheta_2\,\mathrm{d}[\hat{\mathbf{A}}] \pmod{[\hat{\mathbf{A}}]}\,; \tag{3,4}$$

wo ϑ_1, ϑ_2 geeignete Differentialformen sind.

Die ersten drei, bzw. zwei vorliegende Gleichungen bestimmen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass C die Projektivabwicklung zweiter, bzw. erster Ordnung ist.

In Bezug auf (3,1) haben die Gleichungen der Kollineation K, welche die Abwicklung $C : L \to \hat{L}$ erster Ordnung realisiert die Form

$$KA_i = \sum_j c_i^j \hat{A}_j\,, \quad KA_M = \sum_u c_M^u \hat{A}_u \quad (M = 4, 5, \ldots, 9)\,, \tag{3,5}$$

wobei $c = \det |c_i^j| = 1$. Im weiteren bezeichnen wir mit C_i^j das algebraische Komplement zu c_i^j in der Matrix $\|c_i^j\|$.

Nach (1,23) ist für die Ebenenkongruenz L

$$\mathrm{d}[\mathbf{A}] = \sum_i \omega_i^i[\mathbf{A}] + \sum_i \omega_i[\mathbf{A}_{i+3}^i] \tag{3,6}$$

und eine ähnliche Gleichung hat auch die Ebenenkongruenz $\hat{L}$.

Nach einfacher Rechnung und mit Benützung von (3,5) erhalten wir $K[\mathbf{A}_{i+3}^i] = \sum_k C_i^k c_{i+3}^k[\hat{\mathbf{A}}] + (-1)^{i+1} \sum_k \sum_M C_i^k c_{i+3}^M[\hat{\mathbf{A}}_M^k]$ voraus wir leicht $K\,\mathrm{d}[\mathbf{A}]$ bestimmen. Nach Einsetzen in die Gleichung (3,2) ergibt die Vergleichung der Koeffizienten

$$\vartheta_1 = \sum_i \sum_k C_k^i c_{k+3}^i \omega_k - \sum_i \tau_i^i\,,$$

$$C_i^k c_{i+3}^{j+3} = 0 \quad (\text{für } i = k \text{ ist } i \neq j)\,, \quad C_i^k c_{i+3}^{j+6} = 0\,, \quad C_i^i c_{i+3}^{i+3} = 1\,. \tag{3,7}$$

Aus den Gleichungen (3,7) geht

$$c_{i+3}^{j+3} = 0 \ (i \neq j)\,, \quad c_{i+3}^{k+6} = 0\,, \quad C_i^j = 0 \ (i \neq j) \tag{3,8}$$

hervor.

Die Grundeigenschaften der zu $\|c_i^j\|$ inversen Matrix ergeben

$$c_i^j = 0 \ (i \neq j)\,.$$

Wenn wir der Einfachkeit halber

$$c_i^i = q_i \tag{3,9}$$

einführen, dann ist

$$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1$$

und

$$c_{i+3}^{i+3} = q_i \, .$$

Mittels dieser Ergebnisse ist dann

$$\vartheta_1 = \sum_i c_{i+3}^i q_i^{-1} \omega_i - \sum_i \tau_i^i \, . \tag{3,10}$$

Diese Betrachtungen bedeuten, dass jede abwickelbare Korrespondenz $C : L \to \hat{L}$ eine Projektivabwicklung erster Ordnung ist.

Die Kollineation, welche die Projektivabwicklung erster Ordnung realisiert, ist

$$\begin{aligned} KA_i &= q_i \hat{A}_i \, , \\ KA_{i+3} &= \sum_j c_{i+3}^j \hat{A}_j + q_i \hat{A}_{i+3} \, , \\ KA_I &= \sum_m c_I^m \hat{A}_m \, , \quad (I = 7, 8, 9) \, . \end{aligned} \tag{3,11}$$

Führen wir noch einige Hilfsrechnungen an, welche für die weiteren Untersuchungen der Projektivabwicklung zweiter und dritter Ordnung notwendig sind.

Durch Differenzierung der Gleichungen (3,6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2[\mathbf{A}] = {} & \{(\sum_i \omega_i^i)^2 + \sum_i (\omega_{i+3}^i \omega_i + \mathrm{d}\omega_i^i)\} \, [\mathbf{A}] + \\ & + \sum_i \{(\omega_i^i + \omega_{i+3}^{i+3} + 2 \sum_j \omega_j^j) \, \omega_i + \mathrm{d}\omega_i\} \, [\mathbf{A}_{i+3}^i] + \sum_i (\omega_i)^2 \, [\mathbf{A}_{i+6}^i] - \\ & - \sum_i \sum_j \alpha_i^j (\omega_j)^2 \, [\mathbf{A}_{j+3}] + \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j [\mathbf{A}_{i+3,j+3}^{i,j}] \quad (i \neq j) \, . \end{aligned} \tag{3,12}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3[\mathbf{A}] = {} & (\cdot) \, [\mathbf{A}] + \\ & + \sum_i \{(\omega_{i+3}^{i+3} + \sum_j \omega_j^j) \, (\omega_i^i + \omega_{i+3}^{i+3} + 2 \sum_j \omega_j^j) \, \omega_i + (\sum_{k=1}^{3} \omega_k^k)^2 \, \omega_i + \\ & + \sum_j \alpha_j^i \alpha_i^j \omega_j (\omega_i)^2 + 3 \sum_j \omega_{j+3}^j \omega_i \omega_j + 3(\sum_j \mathrm{d}\omega_j^j) \, \omega_i + (2 \, \mathrm{d}\omega_i^i + \mathrm{d}\omega_{i+3}^{i+3}) \, \omega_i + \\ & + (\omega_{i+3}^i + \omega_{i+6}^{i+3}) \, (\omega_i)^2 + (3 \sum_j \omega_j^j + \omega_i^i + 2\omega_{i+3}^{i+3}) \, \mathrm{d}\omega_i + \mathrm{d}^2\omega_i\} \, [\mathbf{A}_{i+3}^i] + \\ & + \sum_i \{3\omega_i \, \mathrm{d}\omega_i + (\omega_i^i + \omega_{i+3}^{i+3} + \omega_{i+6}^{i+6} + 3 \sum_j \omega_j^j) \, (\omega_i)^2\} \, [\mathbf{A}_{i+6}^i] - \\ & - \sum_i \sum_j \{\alpha_i^j (2(\omega_i^i + \omega_j^j + \omega_{j+3}^{j+3}) + 3\omega_k^k) \, (\omega_j)^2 - \alpha_i^k \alpha_k^j (\omega_j)^2 \, \omega_k + \end{aligned} \tag{3,13}$$

$$+ b_i^j(\omega_i)^3 + 2a_i^j\,\omega_i(\omega_j)^2 + (\omega_j)^2\,\mathrm{d}\alpha_i^j + 3\alpha_i^j\omega_j\,\mathrm{d}\omega_j\}\,[\mathbf{A}_{j+3}^i] -$$

$$- \sum_i\sum_j\{2\alpha_i^j(\omega_j)^3 - \beta_i^j(\omega_i)^3\}\,[\mathbf{A}_{j+6}^i] + \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_j\{3(\omega_i^i + \omega_{i+3}^{i+3} +$$

$$+ \omega_j^j + \omega_{j+3}^{j+3} + 2\omega_k^k)\,\omega_i\omega_j + 3(\omega_i\,\mathrm{d}\omega_j + \omega_j\,\mathrm{d}\omega_i)\}\,[\mathbf{A}_{i+3,j+3}^{i,j}] +$$

$$+ 3\sum_i\sum_j\omega_i(\omega_j)^2\,[\mathbf{A}_{i+3,j+6}^{i,j}] - \sum_i\sum_j 3\alpha_k^j\,\omega_i(\omega_j)^2\,[\mathbf{A}_{i+3,j+3}^{i,k}] +$$

$$+ \sum_i\sum_j\omega_i\omega_j\omega_k[\mathbf{A}_{i+3,j+3,k+3}^{i,j,k}]\ (i \neq j)\,;\quad (a_l^{l'} = 0,\ b_{l'}^l = 0)\,;\quad (k \neq i, j)\,.$$

Durch Anwendung von (3,10), (3,11) und (3,12) bekommen wir

$$K\,\mathrm{d}^2[\mathbf{A}] - \mathrm{d}^2[\hat{\mathbf{A}}] - 2\vartheta_1\,\mathrm{d}[\hat{\mathbf{A}}] - \vartheta_2[\hat{\mathbf{A}}] = \tag{3,14}$$

$$= \sum_i\{\Phi_{i+3}^i[\hat{\mathbf{A}}_{i+3}^i] + \Phi_{i+6}^i[\hat{\mathbf{A}}_{i+6}^i]\} + \sum_i\sum_j\{\Phi_{j+3}^i[\hat{\mathbf{A}}_{j+3}^i] + \Phi_{j+6}^i[\hat{\mathbf{A}}_{j+6}^i] +$$

$$+ \Phi_{i+3,j+3}^{i,j}[\hat{\mathbf{A}}_{i+3,j+3}^{i,j}]\}\quad (i \neq j)\,,$$

wo

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+3}^i &= (\tau_{i+3}^{i+3} - \tau_i^i)\,\omega_i - 2c_{i+3}^i\,q_i^{-1}(\omega_i)^2 + c_{i+6}^{i+3}\,q_i^{-1}(\omega_i)^2\,,\\
\Phi_{j+3}^i &= -(\alpha_i^j q_i^{-1} q_j + \hat{\alpha}_i^j)\,(\omega_j)^2 + c_{i+6}^{j+3}\,q_i^{-1}(\omega_i)^2\quad (i \neq j)\,,\\
\Phi_{i+6}^i &= (c_{i+6}^{i+6} q_i^{-1} - 1)\,(\omega_i)^2\,,\\
\Phi_{j+6}^i &= c_{i+6}^{j+6} q_i^{-1}(\omega_i)^2\quad (i \neq j)\,,\\
\Phi_{i+3,j+3}^{i,j} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den Gleichungen (3,3), (3,10), (2,3) und (3,14) liefert dann die Beziehungen

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3}\,, \tag{3,15}$$

$$q_i\hat{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j\quad (i \neq j)\,, \tag{3,16}$$

$$c_{i+6}^{j+3} = 0\quad (i \neq j)\,,\qquad c_{i+6}^{j+6} = 0\quad (i \neq j)\,, \tag{3,17}$$

$$c_{i+6}^{i+6} = q_i\,, \tag{3,18}$$

$$\vartheta_2 = (\sum_i\tau_i^i)^2 - \sum_i\mathrm{d}\tau_i^i - \sum_i(\tau_{i+3}^i + c_{i+6}^i q_i^{-1}\omega_i)\,\omega_i + \tag{3,19}$$

$$+ \sum_i\{c_{i+3}^i q_i^{-1}\,\langle\mathrm{d}\omega_i - \omega_i(\omega_i^i - \omega_{i+3}^{i+3} + 2\sum_j\tau_j^j)\rangle\} + 2\sum_i c_{i+3}^i c_{i'+3}^{i'} q_{i''}\omega_i\omega_{i'}\,.$$

Die Beziehungen (3,15)–(3,19) sind notwendige Bedingungen dafür, dass $C : L \to \hat{L}$ eine Projektivabwicklung zweiter Ordnung wird. Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, so dass wir also folgenden Satz aussprechen können

Satz 3.1. *Dir abwickelbare Korrespondenz $C : L \to \hat{L}$ ist genau dann eine Projektivabwicklung zweiter Ordnung, wenn solche Funktionen $q_i \neq 0$ existieren, dass für relativen Invarianten von L und $\hat{L}$ die Beziehungen* (3,16) *gelten.*

Die Kollineation K, welche die Projektivabwicklung zweiter Ordnung realisiert, ist wegen (3,17) und (3,18) der Gestalt

$$
\begin{aligned}
KA_i &= q_i \hat{A}_i\,, \\
KA_{i+3} &= c^i_{i+3} \hat{A}_i + q_i \hat{A}_{i+3}\,, \\
KA_{i+6} &= \sum_j c^j_{i+6} \hat{A}_j + c^{i+3}_{i+6} \hat{A}_{i+3} + q_i \hat{A}_{i+6}\,,
\end{aligned} \tag{3,20}
$$

wobei für die Koeffizienten die Beziehungen (3,15) gelten.

Bei der Untersuchung der Projektivabwicklung dritter Ordnung benützen wir die Ausdrücke m^j_i $(i \neq j)$ und das Lemma, welches wir jetzt aussprechen wollen.

Aus (1,26), (3,9) und (3,16) folgt wegen (2,3)

$$
\begin{gathered}
q_l\, \mathrm{d}\hat{\alpha}^{l'}_l - q_{l'}\, \mathrm{d}\alpha^{l'}_l + q_{l'} \alpha^{l'}_l (\tau^{l'}_{l'} - \tau^l_l) = m^{l'}_l \omega_{l'}\,, \\
q_{l'}\, \mathrm{d}\hat{\alpha}^l_{l'} - q_l\, \mathrm{d}\alpha^l_{l'} + q_l \alpha^l_{l'} (\tau^l_l - \tau^{l'}_{l'}) + (\hat{a}^l_{l'} q_{l'} - a^l_{l'} q_l)\, \omega_{l'} = m^l_{l'} \omega_l\,.
\end{gathered} \tag{3,21}
$$

Lemma 3.1. *Es seien die Gleichungssysteme* 1) $q_i \hat{\alpha}^j_i = q_j \alpha^j_i$, 2) $q_{l'} \hat{a}^l_{l'} = q_l a^l_{l'}$, 3) $m^j_i = 0\,(i \neq j)$ *gegeben. Dann ist* 3) *die Folge von* 1), 2) *und* 2) *die Folge von* 1), 3).

Beweis. Es seien die Beziehungen $q_i \hat{\alpha}^j_i = q_j \alpha^j_i$ $(i \neq j)$ erfüllt. Durch geeignete Multiplizierung der Gleichung (3,21) bekommen wir

$$
\begin{gathered}
\hat{\alpha}^l_{l'}\, \mathrm{d}\hat{\alpha}^{l'}_l - q_l^{-1} q_{l'} \hat{\alpha}^l_{l'}\, \mathrm{d}\alpha^{l'}_l + q_l^{-1} q_{l'} \alpha^{l'}_l \hat{\alpha}^l_{l'} (\tau^{l'}_{l'} - \tau^l_l) = q_l^{-1} \hat{\alpha}^l_{l'} m^{l'}_l \omega_{l'}\,, \\
\alpha^{l'}_l\, \mathrm{d}\hat{\alpha}^l_{l'} - q_l q_{l'}^{-1} \hat{\alpha}^{l'}_l\, \mathrm{d}\alpha^l_{l'} + \\
+ q_l q_{l'}^{-1} \hat{\alpha}^{l'}_l \alpha^l_{l'} (\tau^l_l - \tau^{l'}_{l'}) + (q_{l'} \hat{a}^l_{l'} - q_l a^l_{l'})\, q_l^{-1} \hat{\alpha}^{l'}_l \omega_{l'} = q_{l'}^{-1} \hat{\alpha}^{l'}_l m^l_{l'} \omega_l\,.
\end{gathered}
$$

Wir addieren beide vorige Gleichungen, nach (3,16) wird

$$
\mathrm{d}(\hat{\alpha}^{l'}_l \hat{\alpha}^l_{l'}) - \mathrm{d}(\alpha^{l'}_l \alpha^l_{l'}) = \{q_{l'}^{-1} \hat{\alpha}^{l'}_l m^l_{l'}\}\, \omega_l + \{q_l^{-1} \hat{\alpha}^l_{l'} m^{l'}_l + (\hat{a}^l_{l'} - a^l_{l'} q_l q_{l'}^{-1})\, \hat{\alpha}^{l'}_l\}\, \omega_{l'}\,.
$$

Aus den Beziehungen

$$
q_l \hat{\alpha}^{l'}_l = q_{l'} \alpha^{l'}_l
$$

folgt

$$
\hat{\alpha}^{l'}_l \hat{\alpha}^l_{l'} = \alpha^{l'}_l \alpha^l_{l'}
$$

so dass gleichzeitig

$$
q_l^{-1} \hat{\alpha}^l_{l'} m^{l'}_l + \hat{\alpha}^{l'}_l (\hat{a}^l_{l'} - a^l_{l'} q_l q_{l'}^{-1}) = 0 \quad q_{l'}^{-1} \hat{\alpha}^{l'}_l m^l_{l'} = 0\,. \tag{3,22}
$$

Hieraus sehen wir, dass

$$
m^j_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_{l'} \hat{a}^l_{l'} = q_l a^l_{l'}\,,
$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Aus den Beziehungen (3,15)–(3,19), (3,13), $\widehat{(3,13)}$, $\widehat{(3,12)}$ wegen (3,20) auf (3,13) und mit Anwendung (3,21) erhalten wir nach langer aber nicht schwieriger Rechnung

$$
\begin{aligned}
(3{,}23)\qquad & K\,\mathrm{d}^3[\mathbf{A}] - \mathrm{d}^3[\hat{\mathbf{A}}] - 3\vartheta_1\,\mathrm{d}^2[\hat{\mathbf{A}}] - 3\vartheta_2\,\mathrm{d}[\hat{\mathbf{A}}] = \\
& = \sum_i \{\Phi^i_{i+3}[\hat{\mathbf{A}}^i_{i+3}] + \Phi^i_{i+6}[\hat{\mathbf{A}}^i_{i+6}]\} + \sum_i \sum_j \{\Phi^i_{j+3}[\hat{\mathbf{A}}^i_{j+3}] + \Phi^i_{j+6}[\hat{\mathbf{A}}^i_{j+6}] + \\
& + \tfrac{1}{2}\Phi^{i,j}_{i+3,j+3}[\hat{\mathbf{A}}^{i,j}_{i+3,j+3}] + \Phi^{i,j}_{i+3,j+6}[\hat{\mathbf{A}}^{i,j}_{i+3,j+6}] + \Phi^{i,j}_{i+3,k+3}[\hat{\mathbf{A}}^{i,j}_{i+3,k+3}] + \\
& + \Phi^{i,j,k}_{i+3,j+3,k+3}[\hat{\mathbf{A}}^{i,j,k}_{i+3,j+3,k+3}] \pmod{[\hat{\mathbf{A}}]} \quad (i \neq j;\ k \neq i, j),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
(3{,}24)\qquad \Phi^i_{i+3} = & -\{(\omega^i_i + 2\omega^{i+3}_{i+3} + 3\sum_j \omega^j_j + f_i\omega_i)\, f_i(\omega_i)^2 + \omega_i\,\mathrm{d}(f_i\omega_i) + \\
& + 5f_i\omega_i\,\mathrm{d}\omega_i + 3c^i_{i+3}q_i^{-1}f_i(\omega_i)^3 + 6c^i_{i+3}q_i^{-1}(\omega^{i+3}_{i+3} + \sum_j \omega^j_j)\,(\omega_i)^2 - \\
& - c^{i+3}_{i+6}q_i^{-1}(\omega^i_i + \omega^{i+3}_{i+3} + \omega^{i+6}_{i+6} + 3\sum_j \omega^j_j)\,(\omega_i)^2 - \\
& - (2\tau^i_{i+3} - \tau^{i+3}_{i+6} - 3c^i_{i+3}q_i^{-1}\omega_i)\,(\omega_i)^2 + 6\sum_j c^j_{j+3}q_j^{-1}f_i(\omega_i)^2\,\omega_j\} \quad (i \neq j)\,; \\
\Phi^i_{j+3} = {} & 3c^i_{i+3}q_i^{-1}\hat{\alpha}^j_i\omega_i(\omega_j)^2 + 3c^j_{j+3}q_j\hat{\alpha}^j_i(\omega_j)^3 + q_i^{-1}m^j_i(\omega_j)^3 - \\
& - 2c^{j+3}_{j+6}q_i^{-1}\alpha^j_i(\omega_j)^3 - 3c^j_{i+6}q_i^{-1}(\omega_i)^2\,\omega_j + c^{j+3}_{j+6}q_i^{-1}\beta^j_i(\omega_i)^3 - \\
& - (a^j_iq_i^{-1}q_j - \hat{a}^j_i)\,\omega_i(\omega_j)^2 + (b^j_iq_i^{-1}q_j - \hat{b}^j_i)\,(\omega_i)^3 \\
& (i \neq j;\ a^{l'}_l = \hat{a}^{l'}_l = 0,\ b^l_{l'} = \hat{b}^l_{l'} = 0)\,; \\
\Phi^{i,j}_{i+3,j+3} = {} & 3(\tau^i_i - \tau^{i+3}_{i+3} + \tau^j_j - \tau^{j+3}_{j+3})\,\omega_i\omega_j - 3f_i(\omega_i)^2\,\omega_j - 3f_j\omega_i(\omega_j)^2\,; \\
\Phi^i_{i+6} = {} & (2\tau^i_i - \tau^{i+3}_{i+3} - \tau^{i+6}_{i+6})\,(\omega_i)^2 + 3c^i_{i+3}q_i^{-1}(\omega_i)^3\,; \\
\Phi^i_{j+6} = {} & (\beta^j_iq_i^{-1}q_j - \hat{\beta}^j_i)\,(\omega_i)^3\,; \quad \Phi^{i,j}_{i+3,j+6} \equiv 0\,; \\
\Phi^{i,j}_{i+3,k+3} \equiv {} & 0\,; \quad \Phi^{i,j,k}_{i+3,j+3,k+3} \equiv 0\,; \quad (i \neq j;\ k \neq i, j)\,.
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen (3,4), (2,3), (3,23), (3,24), (3,16) folgen mit Hilfe des Lemmas 3.1 die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
(3{,}25)\qquad & q_i\hat{\alpha}^j_i = q_j\alpha^j_i\,, \quad q_i\hat{\beta}^j_i = q_j\beta^j_i \quad (i \neq j)\,, \\
& q_{l'}\hat{a}^l_{l'} = q_l a^l_{l'}\,, \quad q_l\hat{b}^{l'}_l = q_{l'}b^{l'}_l\,, \\
(3{,}26)\qquad & \tau^i_i = \tau^{i+3}_{i+3} = \tau^{i+6}_{i+6}\,, \\
(3{,}27)\qquad & c^i_{i+3} = 0\,, \quad c^{i+3}_{i+6} = 0\,, \quad c^j_{i+j} = 0 \ (i \neq j)\,, \\
& 2\tau^i_{i+3} - \tau^{i+3}_{i+6} - 3c^i_{i+6}q_i^{-1}\omega_i = 0\,.
\end{aligned}
$$

In (3,25)–(3,27) sind notwendige Bedingungen dafür gefunden, das C eine Projektivabwicklung dritter Ordnung von Ebenenkongruenzen ist. Man kann sich aber leicht überzeugen, dass diese Bedingungen auch hinreichen. Mit Anwendung von (2,3) folgt also:

Satz 3.2. *Die abwickelbare Korrespondenz $C : L \to \hat{L}$ ist genau dann eine Projektivabwicklung dritter Ordnung, wenn solche Funktionen $q_i \neq 0$ existieren, dass für die relativen Invarianten von L und $\hat{L}$ die Beziehungen* (3,25) *erfüllt sind und*

$$f_i = f_{i+3} = 0 .$$

Die Kollineation K, welche die Projektivabwicklung dritter Ordnung realisiert, ist

$$KA_i = q_i\hat{A}_i , \quad KA_{i+3} = q_i\hat{A}_{i+3} , \quad KA_{i+6} = c^i_{i+6}\hat{A}_i + q_i\hat{A}_{i+6} , \tag{3,28}$$

wobei die Koeffizienten c^i_{i+6} die Beziehungen

$$3c^i_{i+6}\omega_i = \left(2\tau^i_{i+3} - \tau^{i+3}_{i+6}\right) q_i$$

erfüllen.

Im weiteren werden wir die Projektivabwicklung zweiter und dritter Ordnung von Kongruenzen L^* und $\hat{L}^*$ untersuchen.

Die abwickelbare Korrespondenz $C : L \to \hat{L}$ bestimmt natürlicherweise die abwickelbare Korrespondenz $C^* : L^* \to \hat{L}^*$ zwischen Dualisationen der Kongruenzen L und $\hat{L}$.

Mit Gebrauch der überführenden Schemata (2,6)–(2,8) für die Projektivabwicklung zweiter Ordnung von Kongruenzen L^* und $\hat{L}^*$ gelangen wir zu den Gleichungen

$$q^*_i\hat{\beta}^i_j = q^*_j\beta^i_j \quad (i \neq j) . \tag{3,29}$$

Die vorigen Beziehungen (3,29) liefern die notwendigen und auch hinreichenden Bedingungen, dass $C^* : L^* \to \hat{L}^*$ eine Projektivabwicklung zweiter Ordnung ist, so dass wir also folgenden Satz direkt bekommen:

Satz 3.3. *Die abwickelbare Korrespondenz $C^* : L^* \to \hat{L}^*$ ist genau dann eine Projektivabwicklung zweiter Ordnung, wenn solche Funktionen $q^*_i \neq 0$ existieren, dass für die relativen Invarianten von L^* und $\hat{L}^*$ die Beziehungen* (3,29) *erfüllt sind.*

Die Kollineation K^*, welche die vorige Projektivabwicklung zweiter Ordnung realisiert, ist wegen (3,20) und (2,6)–(2,8) der Gestalt

$$\begin{aligned} KE^{i+6} &= q^*_i\hat{E}^{i+6} , \\ KE^{i+3} &= c^{*i+6}_{i+3}\hat{E}^{i+6} + q^*_i\hat{E}^{i+3} , \\ KE^i &= \sum_j c^{*j}_i\hat{E}^j + c^{*i+3}_i\hat{E}^{i+3} + q^*_i\hat{E}^i \end{aligned} \tag{3,30}$$

wobei für die Koeffizienten gilt:

$$q_i^* f_{i+3} = c_i^{*i+3} - 2c_{i+3}^{*i+6} .$$

Aus den Gleichungen (1,27), (3,9*) und (3,29) geht wegen (2,3)

$$\begin{aligned} &q_l^* \mathrm{d}\hat{\beta}_{l'}^l - q_{l'}^* \mathrm{d}\beta_{l'}^l + q_{l'}^* \beta_{l'}^l (\tau_{l+6}^{l+6} - \tau_{l'+6}^{l'+6}) = n_{l'}^l \omega_{l'} , \\ &q_{l'}^* \mathrm{d}\beta_l^{l'} - q_l^* \mathrm{d}\beta_l^{l'} + q_l^* \beta_l^{l'} (\tau_{l'+6}^{l'+6} - \tau_{l+6}^{l+6}) + (q_{l'}^* \hat{b}_l^{l'} - q_l^* b_l^{l'})\, \omega_{l'} = n_l^{l'} \omega_l \end{aligned} \tag{3,31}$$

hervor.

Für die weiteren Rechnungen benützen wir

Lemma 3.2. *Es seien die Gleichungssysteme* 1) $q_i^* \hat{\beta}_j^i = q_j^* \beta_j^i$, 2) $q_{l'}^* \hat{b}_l^{l'} = q_l^* b_l^{l'}$, 3) $n_j^i = 0$ $(i \neq j)$ *gegeben. Dann ist* 3) *die Folge von* 1), 2) *und* 2) *die Folge von* 1), 3).

Der Beweis ist analogisch wie für Lemma 3.1 und folgt mit Gebrauch des Schema (2,6)–(2,8).

Jetzt finden wir die analytischen Bedingungen dafür, dass die Korrespondenz $C^* : L^* \to \hat{L}^*$ eine Projektivabwicklung dritter Ordnung wird. Aus den Gleichungen (3,25) bekommen wir nach (2,6)–(2,8)

$$\begin{aligned} &q_i^* \hat{\beta}_j^i = q_j^* \beta_j^i , \quad q_i^* \hat{\alpha}_j^i = q_j^* \alpha_j^i \quad (i \neq j) , \\ &q_{l'}^* \hat{b}_l^{l'} = q_l^* b_l^{l'} , \quad q_l^* \hat{a}_{l'}^l = q_{l'}^* a_{l'}^l . \end{aligned} \tag{3,32}$$

Mit Rücksicht auf (3,29*) und (3,30*) können wir folgenden Satz aussprechen

Satz 3.4. *Die abwickelbare Korrespondenz $C^* : L^* \to \hat{L}^*$ ist genau dann eine Projektivabwicklung dritter Ordnung, wenn solche Funktionen $q_i^* \neq 0$ existieren, dass für die relativen Invarianten von L^* und $\hat{L}^*$ die Beziehungen* (3,32) *erfüllt sind und*

$$f_{i+3} = f_i = 0 .$$

Die Kollineation K^*, welche die Projektivabwicklung dritter Ordnung realisiert, ist wegen (3,28) und (2,6)–(2,8) der Gestalt

$$KE^{i+6} = q_i^* \hat{E}^{i+6} , \quad KE^{i+3} = q_i^* \hat{E}^{i+3} , \quad KE^i = c_i^{*i+6} \hat{E}^{i+6} + q_i^* \hat{E}^i , \tag{3,33}$$

wobei für die Koeffizienten

$$3c_i^{*i+6} \omega_i = 2\tau_{i+6}^{i+3} q_i^* - \tau_{i+3}^i q_i^*$$

gilt.

Wenn wir darüber hinaus die Bedingungen (3,25), (3,32) und die Gestalt der zugehörigen Kollineationen (3,28) und (3,33) in Betracht nehmen, so kommen wir zum folgenden Satz:

Satz 3.5. *Die abwickelbare Korrespondenz $C : L \to \hat{L}$ ist genau dann eine Projektivabwicklung dritter Ordnung, wenn die induzierte abwickelbare Korrespondenz $C^* : L^* \to \hat{L}^*$ eine Projektivabwicklung dritter Ordnung ist.*

Die Kollineation (3,28), welche die Projektivabwicklung dritter Ordnung realisiert, ist wegen (2,4) und (3,31) in Hyperebenen-koordinaten folgendermassen ausgedrückt

$$KE^{i+6} = q_i^{-2}\hat{E}^{i+6}, \quad KE^{i+3} = q_i^{-1}\hat{E}^{i+3}, \qquad (3,34)$$
$$KE^i = -q_i^{-2}c^i_{i+6}\hat{E}^{i+6} + q_i^{-1}\hat{E}^i .$$

Durch Vergleich von (3,33) mit (3,34) sehen wir leicht, dass die beiden Kollineationen, welche eine Projektivabwicklung dritter Ordnung der Kongruenzen L, $\hat{L}$ und ihrer Dualisationen L^*, $\hat{L}^*$ realisieren, sind allgemein verschieden.

Die Forderung, des Zusammenfallens beider Kollineationen benötigt, wie aus (3,3) und (3,34) sehbar, die Gültigkeit der Beziehungen (3,25), (3,26) und

$$\tau^i_{i+3} + \tau^{i+3}_{i+6} = 0 .$$

Sei eine Kongruenz L gegeben. Untersuchen wir jetzt die Existenz des Paares $(C; \hat{L})$ sämtlicher Projektivabwicklungen $C : L \to \hat{L}$ zweiter Ordnung (für alle mögliche $\hat{L}$).

Die begleitenden Bezugssysteme der Kongruenzen L und $\hat{L}$ kann man so wählen, dass

$$\hat{\alpha}^j_i = \alpha^j_i \ (i \neq j), \quad q_i = 1 \quad \text{und} \quad r = 1 .$$

Die Abbildung C (samt der Kongruenz $\hat{L}$) ist jetzt durch das folgende geschlossene Gleichungssystem asugedrückt.

$$\tau^m_i = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 9;\ i \neq m), \qquad (3,35)$$
$$\tau^{j+3}_{i+3} = 0 \ (i \neq j), \quad \tau^{k+6}_{i+3} = 0, \quad \tau^{l'}_{l+3} = 0, \quad \hat{\tau}^{l+3}_{l'+6} = 0 .$$
$$\alpha^{l'}_l \omega_{l'} \wedge (\tau^{l'}_{l'} - \tau^l_l) = 0 ,$$
$$\alpha^l_{l'}\omega_l \wedge (\tau^l_l - \tau^{l'}_{l'}) + \omega_{l'} \wedge \tau^l_{l'+3} = 0 ,$$
$$\omega_l \wedge \tau^{l'}_{l+6} + (\alpha^{l'}_l \tau^l_{l+3} + \alpha^{l'}_{l''}\tau^{l''}_{l+3}) \wedge \omega_{l'} = 0 ,$$
$$\omega_l \wedge \tau^{l'}_{l'+6} + \omega_{l'} \wedge \{\beta^l_{l'}\omega^{l+3}_{l+6} - \hat{\beta}^l_{l'}\hat{\omega}^{l+3}_{l+6} + (\beta^{l''}_{l'} b^l_{l''} - \hat{\beta}^{l''}_{l'}\hat{b}^l_{l''})\,\omega_{l''}\} = 0 .$$

Mit Hilfe des Cartanschen Lemmas gelangen wir zu neuen Hauptformen mit 29 unabhängigen Koeffizienten. Weil die Zahl der unabhängigen Hauptformen $q = 17$ ist und die Zahl der unabhängigen quadratischen Gleichungen $s_1 = 12$ beträgt, haben wir $s_2 = 5$ und die *Cartansche Zahl* Q ist gleich 22. Deswegen ist das betrachtete System involutiv. Damit kann man folgenden Satz aussprechen:

Satz 3.6. *Ist L eine gegebene Kongruenz, dann ist die Existenz der Projektivabwicklungen zweiter Ordnung $C : L \to \hat{L}$ (samt der Kongruenzen $\hat{L}$) von fünf Funktionen zweier Veränderlicher abhängig.*

Sei eine Kongruenz L gegeben. Dann untersuchen wir die Existenz der Projektivabwicklungen $C : L \to \hat{L}$ dritter Ordnung für geeignete $\hat{L}$. Ohne Begrenzung der Allgemeinheit können wir auch hier voraussetzen, dass

$$\hat{\alpha}_i^j = \alpha_i^j, \quad \hat{\beta}_i^j = \beta_i^j \quad (i \neq j), \tag{3,36}$$
$$\hat{a}_{l'}^l = a_{l'}^l, \quad \hat{b}_l^{l'} = b_l^{l'}, \quad q_i = 1, \quad r = 1, \quad f_i = f_{i+3} = 0.$$

Aus (2,3) und (3,26) folgt

$$\tau_m^m = \tau_u^u \quad (m, u = 1, 2, \ldots, 9) \tag{3,37}$$

und somit gelten die Gleichungen (3,25).

In der Folgerung (3,36) und (3,37) ist das Paar $(C; \hat{L})$ durch ein geschlossenes Gleichungssystem gegeben:

$$\tau_i^m = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, 9; \; i \neq m), \tag{3,38}$$
$$\tau_{i+3}^j = 0, \quad \tau_{i+3}^{j+3} = 0, \quad \tau_{i+3}^{k+6} = 0, \quad \tau_{i+6}^{j+3} = 0, \quad \tau_{i+6}^{j+6} = 0, \quad (i \neq j);$$
$$\omega_l \wedge \tau_{l+6}^{l'} - \alpha_l^{l'} \omega_{l'} \wedge \tau_{l+3}^l = 0,$$
$$\omega_l \wedge \tau_{l+6}^{l''} - \alpha_l^{l''} \omega_{l''} \wedge \tau_{l+3}^l = 0,$$
$$\omega_l \wedge \tau_{l'+6}^l - \beta_{l'}^l \omega_{l'} \wedge \tau_{l+6}^{l+3} = 0,$$
$$\omega_{l'} \wedge \tau_{l+6}^{l'} - \beta_l^{l'} \omega_l \wedge \tau_{l'+6}^{l'+3} = 0.$$

Mit Hilfe des Lemmas von Cartan drücken wir die Formen

$$\tau_{i+3}^i, \; \tau_{i+6}^{i+3}, \; \tau_{i+6}^j \quad (i \neq j)$$

als lineare Kombination zweier unabhängigen Hauptformen ω_1, ω_2 mittels 24 Koeffizienten aus. Dann setzen wir sie in (3,38) ein, und bekommen 12 *Abhängigkeiten*. Deshalb sind soeben 12 Koefizienten unabhängig d.h. $N = 12$. Weil die Zahl der unabhängigen Formen $q = 12$ ist und die Zahl der unabhängigen quadratischen Gleichungen (3,38) $s_1 = 12$ beträgt, ist die Cartansche Zahl Q gleich 12. Also ist das System involutiv und es gilt

Satz 3.7. *Ist L eine Kongruenz, dann ist die Existenz der Projektivabwicklungen dritter Ordnung $C : L \to \hat{L}$ (samt der Kongruenz $\hat{L}$) von 12 willkürlichen Funktionen einer unabhängiger Veränderlicher abhängig.*

Literatur

[1] *A. Švec:* Projective Differential Geometry of Line Congruences, Prague, 1965.
[2] *A. Švec:* Déformation projective des congruences de droites dans S_n. Czech. Math. J., *5* (*80*) (1955), 546—557.
[3] *K. Svoboda:* Sur la déformation projective des pseudocongruences complétement focales I. Archivum mathematicum (Brno) T. *3* (1967), 83—98.
[4] *J. Beneš:* Projective deformation of line congruences in five-dimensional projective spaces. Czechoslovak Mathematical Journal, *18* (*93*) (1968), 457—475.
[5] *J. Bayer:* O projektivních deformacích kongruencí rovin v *n*-rozměrném projektivním prostoru. Časopis pro pěstování matematiky, *97*, (1972), 113—130.

Anschrift des Verfassers: 602 00 Brno, Hilleho 6, ČSSR (Vysoké učení technické).